# Гарчиг

# Өмнөх үг

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо 2025-2026 оны хичээлийн жилд дараах хуваарьтай үйл ажиллагаа явууллаа.

| **Үйл ажиллагаа** | **Хаана** | **Эхлэх** | **Дуусах** | **Ангилал** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ММО I даваа | Сургууль | 2025.10.24 | | C | D | E | F | | |
| ММО II даваа I шат | Аймаг/дүүрэг | 2025.12.13 | 2025.12.14 | C | D | E | F | S | T |
| ММО II даваа II шат | Бүс/хот | 2026.02.28 | 2026.03.01 | | D | E | F | S | T |
| ММО III даваа | Баянхонгор | 2026.03.28 | 2026.04.02 | | | E | F | | T |
| EGMO сорил 1 | МУИС | 2026.01.24 | 2026.01.25 | | | E | F | | |
| EGMO сорил 2 | МУИС | 2026.02.07 | 2026.02.08 | | | E | F | | |
| EGMO бэлтгэл | Улаанбаатар | 2026.02.02 | 2026.03.27 | | | E | F | | |
| EGMO | Франц | 2026.04.09 | 2026.04.15 | | | | F | | |
| IMO сорил 1 | МУИС | 2026.03.14 | 2026.03.15 | | | | F | | |
| IMO сорил 3 | МУИС | 2026.04.25 | 2026.04.26 | | | | F | | |
| IMO бэлтгэл | Улаанбаатар | 2026.04.20 | 2026.06.16 | | | E | F | | |
| IMSC | Хятад | 2026.06.21 | 2026.07.10 | | | | F | | |
| IMO | Хятад | 2026.07.10 | 2026.07.20 | | | | F | | |
| IGO | Олонлог.эгзэ | 2025.10.17 | | | D | E | F | | T |
| APMO | 11-р сургууль | 2026.03.10 | | | | | F | | |

Бидний үйл ажиллагааг дэмжиж ажилласан

АНД Глобал
Капитрон Банк

компаниудад талархал илэрхийлье. Энэхүү цувралаар бүх давааны бодлого болон бодолтуудыг, олон улсын олимпиадуудын мэдээтэй хамт толилуулж байна. Цувралын эх бэлтгэх, хэвлүүлэх, тараах ажлыг санхүүжүүлсэн оюунлаг ирээдүйг дэмжигч **Капитрон банк**, түүний удирдлага, хамт олонд гүн талархал дэвшүүлье, Баянхонгор аймагт зохион байгуулагдсан Монголын Математикийн 62-р Олимпиадын III даваа буюу Улсын Математикийн 62-р Олимпиадыг нэрэмжит болгон зохион байгуулсан **Бямбаагийн Баяржаргал** багшийн товч намтар.

1968 онд Баянхонгор аймагт төрсөн.

*Боловсрол*

1986 онд Баянхонгорын 1 дүгээр арван жилийн сургуулийг төгссөн.

1990 онд Улсын Багшийн Дээд Сургуулийн тоо-физикийн багшийн ангийг төгссөн.

1998 онд профессор Ц.Дашдоржийн удирдлага доор $\mathbb{Z}_p$ *бүлгийн бүтэц, дельта эрэмбийн тоонууд* сэдвээр судалгаа хийн шинэ үр дүн баталж, магистрийн зэрэг хамгаалсан.

*Ажлын туршлага*

1990-1997 онд Баянхонгор аймгийн 1 дүгээр арван жилийн сургууль, авъяастны сургуульд ажилласан.

1997-2002 онд Хобби, 32 дугаар сургуульд ажилласан.

2002 оноос эдүгээ Олонлог төв сургуульд ажиллаж байна.

2020 онд Хүртээмжтэй Боловсрол багш нарын нэгдэл ТББ хамтран байгуулсан.

2025 онд Хонгорын Математик ТББ хамтран байгуулсан.

*Амжилт*

1998 онд Монгол улсын зөвлөх багш болсон.

1998 онд шатрын Монгол улсын спортын дэд мастер болсон.

Улсын олимпиадын 5 удаагийн аварга, 3 удаагийн дэд аварга цолтой, уран бодолтын хошой шагналтай.

Эрдэм шинжилгээний 20 гаран өгүүлэл, нийтлэл хэвлүүлсэн.

Хамтарсан 15, бие даасан 4 ном, сурах бичиг зохиосон.

2004-2015 онуудад Олон Улсын Математикийн Олимпиадад оролцох Монгол улсын шигшээ багийн дасгалжуулагчийн багт ажиллаж, 2006 онд Словеньд багийн орлогч удирдагч, 2017 онд Бразилд ажиглагчаар ажилласан.

Энэхүү цувралыг Б. Баяржаргал багшид зориулав.

# Монголын Математикийн 62-р Олимпиадын I Даваа

Монголын математикийн 62-р олимпиадын I даваа буюу сургуулийн математикийн олимпиад 2025 оны 11 сарын 13 өдөр орон даяар нэгэн зэрэг зохион байгуулагдав.

Энэ хичээлийн жилд шударга өрсөлдөөнийг дэмжих үүднээс дүүргийн жагсаалтад тус олимпиадыг нэгээс цөөнгүй сургуультай хамтран зохион байгуулсан сургуулиудын сурагчдыг оруулснаараа онцлог байлаа. Шаардлага хангаагүй зарим сургуулийг жагсаалтаас хасав. Олимпиадад шударгаар өрсөлдөх нь амжилт гаргахаас ч илүү чухал, нандин зүйл билээ. Иймээс олимпиадыг шударга зохион байгуулахад санаа тавьж хамтран ажилласан бүх хүмүүстээ талархал илэрхийлье!

## Оролцогчид

Удирдамжийн дагуу оролцогчид C (5-6 анги), D (7-8 анги), E (9-10 анги), F (11-12 анги) гэсэн дөрвөн ангилалд өрсөлдөв. Олимпиадад орон нутагт 32 мянга, нийслэлд 26 мянга, нийт 669 сургуулийн 58 мянган сурагч оролцов.

| | Аймаг | Сургууль | C | D | E | F | Нийт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Архангай | 23 | 601 | 426 | 298 | 208 | 1,533 |
| 2 | Баян-Өлгий | 14 | 226 | 282 | 188 | 147 | 843 |
| 3 | Баянхонгор | 23 | 557 | 484 | 218 | 167 | 1,426 |
| 4 | Булган | 18 | 380 | 298 | 140 | 136 | 954 |
| 5 | Говь-Алтай | 24 | 443 | 458 | 248 | 236 | 1,385 |
| 6 | Говьсүмбэр | 4 | 113 | 119 | 61 | 56 | 349 |
| 7 | Дархан-Уул | 22 | 1,013 | 772 | 448 | 397 | 2,630 |
| 8 | Дорноговь | 21 | 506 | 444 | 299 | 168 | 1,417 |
| 9 | Дорнод | 16 | 311 | 318 | 154 | 111 | 894 |
| 10 | Дундговь | 18 | 357 | 313 | 244 | 161 | 1,075 |
| 11 | Завхан | 30 | 742 | 704 | 436 | 384 | 2,266 |
| 12 | Орхон | 19 | 636 | 625 | 450 | 311 | 2,022 |
| 13 | Өвөрхангай | 30 | 602 | 592 | 377 | 311 | 1,882 |
| 14 | Өмнөговь | 23 | 646 | 455 | 232 | 174 | 1,507 |
| 15 | Сүхбаатар | 16 | 566 | 489 | 367 | 243 | 1,665 |
| 16 | Сэлэнгэ | 33 | 655 | 763 | 429 | 460 | 2,307 |
| 17 | Төв | 31 | 646 | 500 | 337 | 198 | 1,681 |
| 18 | Увс | 25 | 515 | 410 | 222 | 159 | 1,306 |
| 19 | Ховд | 24 | 758 | 551 | 303 | 249 | 1,861 |
| 20 | Хөвсгөл | 23 | 658 | 590 | 406 | 270 | 1,924 |
| 21 | Хэнтий | 19 | 561 | 471 | 302 | 143 | 1,477 |
| | Орон нутаг | 456 | 11,492 | 10,064 | 6,159 | 4,689 | 32,404 |

| | Дүүрэг | Сургууль | C | D | E | F | Нийт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Багануур, Багахангай, Налайх | 13 | 607 | 512 | 362 | 374 | 1,855 |
| 2 | Баянгол | 33 | 1,103 | 1,235 | 737 | 628 | 3,703 |
| 3 | Баянзүрх | 49 | 1,796 | 1,825 | 1,272 | 988 | 5,881 |
| 4 | Сонгинохайрхан | 27 | 1,419 | 1,336 | 814 | 522 | 4,091 |
| 5 | Сүхбаатар | 30 | 1,078 | 1,189 | 832 | 662 | 3,761 |
| 6 | Хан-Уул | 43 | 1,514 | 1,487 | 945 | 645 | 4,591 |
| 7 | Чингэлтэй | 18 | 610 | 676 | 448 | 369 | 2,103 |
| | Нийслэл | 213 | 8,127 | 8,260 | 5,410 | 4,188 | 25,985 |
| | НИЙТ | 669 | 19,619 | 18,324 | 11,569 | 8,877 | 58,389 |

## Сэдэв

C, D ангиллын бодлогуудыг Т. Хулан ахлагчтай Б. Батбаясгалан, Ч. Гантөмөр, Ш.Доржсэмбэ нарын баг, E, F ангиллын бодлогуудыг Г. Баярмагнай ахлагчтай У. Батзориг, Х. Нурсолтан, Ү. Отгонбаяр нарын баг боловсруулав. Бодлогын хүндрэлийг зөв бодсон сурагчийн хувиар тооцоолов.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | 23% | 31% | 9% | 4% | 24% | 3% | 5% | 4% | 9% | 2% | | |
| D | 7% | 29% | 14% | 3% | 23% | 11% | 28% | 1% | 5% | 2% | | |
| E | 32% | 31% | 11% | 12% | 16% | 3% | 7% | 6% | 2% | 12% | 11% | 6% |
| F | 39% | 18% | 37% | 12% | 6% | 22% | 5% | 7% | 9% | 2% | 5% | 3% |

# Бодлогууд

**Бодлого C1.** Жолооч А ба Б хотын хоорондох замыг 99 цагт туулахаар төлөвлөжээ. Замын $\frac{1}{3}$ хэсгийг төлөвлөснөөс 3 дахин удаанаар, үлдэх хэсгийг төлөвлөснөөс 3 дахин хурднаар туулсан бол хоёр хотын хоорондох замыг хэдэн цагт туулсан бэ?

Хариу: 121.

**Бодлого C2.** А, Б, В, Г үсгүүд 0-ээс ялгаатай цифрүүд бөгөөд өөр, өөр үсгүүд өөр, өөр цифрийг төлөөлнө. $\overline{\text{АБВ}} + \overline{\text{БВГ}} + \overline{\text{ВГА}} + \overline{\text{ГАБ}} = 2331$ бол $\text{А} + \text{Б} + \text{В} + \text{Г}$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 21.

**Бодлого C3.** Баянхонгор аймагт болох улсын олимпиадад оролцох хүүхдүүдийг тээвэрлэн яваа гурван автобусны цуваа Улаанбаатараас хөдөлжээ. I цуваанд 168 хүүхэд, II цуваанд 273 хүүхэд, III цуваанд 420 хүүхэд тус, тус зорчиж байв. Автобус бүрд тэнцүү тооны хүүхэд сууж байсан бол хамгийн цөөндөө нийт хэдэн автобус хөдөлсөн бэ?

Хариу: 41.

**Бодлого C4.** Самбарт 1-ээс 2025 хүртэлх натурал тоонууд бичигдсэн байв. Амар 8-д хуваагдах тоо бүрийг дугуйлав. Харин Булган 7-д хуваагдахгүй тоо бүрийг дугуйлсан байна. Тэгвэл хэдэн тоо дугуйлагдаагүй үлдсэн бэ?

Хариу: 253.

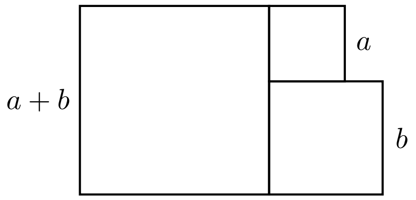
**Бодлого C5.** Гурван ялгаатай цифрээр бичигддэг, 11-д хуваагддаг хамгийн бага болон хамгийн их тоонуудын нийлбэрийг ол.

Хариу: 1100.

**Бодлого C6.** 2 ба 6 цифрүүд дараалж ороогүй гурван оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Жишээ нь 261, 162 тоонуудад 2 ба 6 цифрүүд дараалж орсон, харин 216, 115-д дараалж ороогүй.

Хариу: 864.

**Бодлого C7.** Зурагт $a$, $b$, $a+b$ нэгж талтай 3 квадрат өгөгдсөн ба $a$, $b$ нь $b > a$ байх эерэг бүхэл тоонууд байв. Энэ гурван квадратаар үүссэн дүрсийн периметр 62 нэгж бол хамгийн том квадратын талбай хамгийн ихдээ хэдтэй тэнцүү байж болох вэ?



Хариу: 144.

**Бодлого C8.** 1, 2, 5, 10-тын тус бүр зургаа, зургаан ширхэг зоосноос 98 төгрөгийг хэчнээн янзаар бүрдүүлж болох вэ?

Хариу: 9.

**Бодлого C9.** $\overline{ABC} + \overline{CBA} = \overline{DDD}$ бол $\overline{ABCD}$ тоо хамгийн ихдээ хэдтэй тэнцэж болох вэ? $A$, $B$, $C$, $D$ үсгүүд бүгд ялгаатай цифрийг тэмдэглэх ба бүгд 0-ээс ялгаатай цифрүүд байна.

Хариу: 7418.

**Бодлого C10.** Хэрэв шингэнийг 40 литрийн багтаамжтай савнуудад хийвэл энэ үед яг нэг сав нь гүйцэд дүүрэхгүй. Хэрэв энэ шингэнийг 50 литрийн багтаамжтай савнуудад хийвэл 5-аар цөөн сав хэрэглэгдэх бөгөөд тэдгээр нь бүгд дүүрэн шингэнтэй байна. Хэрэв энэ шингэнийг 70 литрийн багтаамжтай савнуудад хийвэл дахин 4-өөр цөөн сав хэрэглэгдэх бөгөөд яг нэг нь гүйцэд дүүрэхгүй. Хэдэн литр шингэн байсан бэ?

Хариу: 850.

**Бодлого D1.** Бат барилгын ажлыг ганцаараа 30 өдөр хийж байв. Гэтэл тэр ханиад хүрсэн тул ажиллах боломжгүй болж Дорж 5 өдөр ганцаараа ажил хийв. Бат эдгэрч тэд хамтдаа 10 өдөр ажиллаад бүх ажлаа дуусгав. Хэрэв тэд анхнаасаа хамтдаа ажилласан бол 20 өдөрт дуусгах байсан бол Бат ганцаараа хэдэн өдөрт хийх ажил байсан бэ?

Хариу: 100.

**Бодлого D2.** Цифрүүдийн нийлбэр нь 34-тэй тэнцүү, 4 оронтой тоо хэчнээн байх вэ?

Хариу: 10.

**Бодлого D3.** Ялгаатай, натурал $a, b, c, d$ тоонууд $a \cdot (b + c + d) = 100$ нөхцөлийг хангадаг бол $a$-ийн авч болох утгуудын үржвэр хэдтэй тэнцэх вэ?

Хариу: 400.

**Бодлого D4.** Ганаа 521, 522, ..., 670, 671 тоонуудаас арван ялгаатай тоо сонгон авч тэдгээрийн үржвэрийг олжээ. Ганаагийн олсон үржвэр хамгийн олондоо хэдэн тэгээр төгсөж болох вэ?

Хариу: 18.

**Бодлого D5.** Аравтын орны цифрийн куб дээр нь нэгжийн орны цифрийн квадратыг нь нэмэхэд өөрөө гардаг хоёр оронтой тоонуудын нийлбэрийг ол.

Хариу: 24.

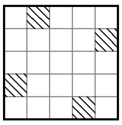
**Бодлого D6.** 18-аар үржүүлэхэд цифрүүдийн нийлбэр нь өөрчлөгддөггүй хамгийн бага, гурван оронтой натурал тоог ол.

Хариу: 117.

**Бодлого D7.** Нийлээд 18 хүний бүрэлдэхүүнтэй хоёр баг гурван өдрийн турш нэг нэгээрээ тасралтгүй жижүүрт гарахаар болов. Эхний хоёр өдөр нэгдүгээр багийн гишүүд бүгд ижил хугацаанд жижүүрлэв. Сүүлийн гурав дахь өдөр хоёрдугаар баг 3 эмэгтэй гишүүнээ нэг нэг цаг жижүүрт гаргаж, үлдсэн хугацааг эрэгтэйчүүд тэнцүү хувааж жижүүр хийв. Тооцож үзэхэд хоёрдугаар багийн нэг эрэгтэйн жижүүрлэсэн хугацаа, нэгдүгээр багийн нэг гишүүний жижүүр хийсэн хугацааны нийлбэр 9 цаг хүрэхгүй байсан бол хоёрдугаар баг хэдэн эрэгтэй гишүүнтэй вэ?

Хариу: 6.

**Бодлого D8.** $5 \times 5$ квадрат хүснэгтийн дөрвөн нүдийг буджээ. Ядаж нэг будагдсан нүд дотроо агуулсан хэдэн тэгш өнцөгт байх вэ? (квадратыг тэгш өнцөгтөд тооцно.)



Хариу: 127.

**Бодлого D9.** $ABC$ гурвалжны $\angle ABC = 100^\circ$ байв. $AC$ тал дээр $AD = AB$ байх $D$ цэгийг, $CE = CB$ байх $E$ цэгийг авав. Хэрэв $3\angle BDA = 4\angle BEC$ байсан бол $\angle BAC$ өнцөг хэдэн градус байх вэ?

Хариу: 20.

**Бодлого D10.** 1-ээс 9 цифрүүдийг тус бүр нэг удаа ашиглаад аль ч дараалсан гурван цифрийнх нь нийлбэр 15-аас хэтрэхгүй байхаар хэчнээн 9 оронтой тоо үүсгэж болох вэ?

Хариу: 128.

**Бодлого E1.** $3^n$ болон $n!$ тоонууд ижил цифрээр эхэлдэг байх хамгийн бага натурал $n$ тоог ол.

Хариу: 6.

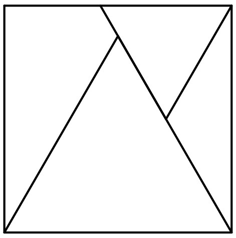
**Бодлого E2.** $f(x) = ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнтийн хувьд $f(1) = 2$, $f(2) = 6$, $f(6) = 2$ байдаг бол $f(5)$ утгыг ол.

Хариу: 6.

**Бодлого E3.** $1000 \times 1002 \times 1004 \times \cdots \times 2026$ үржвэр хамгийн ихдээ 7-гийн хэдэн зэрэгтэд хуваагдах вэ?

Хариу: 84.

**Бодлого E4.** $19\sqrt{3}$ урттай талтай квадрат дотор том жижиг хоёр зөв гурвалжин зурагт үзүүлснээр байрлаж байв. Жижиг зөв гурвалжингийн талын уртыг ол.



Хариу: 19.

**Бодлого E5.** $(2n+1) : m$ ба $(2m+1) : n$ харьцаанууд бүхэл байдаг $m$, $n$ натурал тоонуудын хувьд $mn$ үржвэр хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

Хариу: 21.

**Бодлого E6.** $3 \times 3$ хүснэгтийн нүднүүдэд натурал тоонуудыг мөр болон багана болгоны тоонуудын нийлбэр 6 байхаар хэдэн янзаар бичиж болох вэ?

Хариу: 55.

**Бодлого E7.** $ABCD$ тэгш өнцөгтийн талууд $AB = 20$ ба $AD = 26$ урттай байв. $CD$ талын дундаж цэгийг $M$ гээд $NM$ хэрчмийн дундаж цэг $A$ байхаар $N$ цэгийг авав. $NBD$ гурвалжны талбайг ол.

Хариу: 650.

**Бодлого E8.** $a + 2b = 2$ ба $a^2 + 2b^2 = 3$ бол $29a^3 + 88b^3$ нийлбэрийг ол.

Хариу: 148.

**Бодлого E9.** $\angle ABC = 90^\circ$ тэгш өнцөгт гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг $I$ гээд $BI$ шулуун $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин $D$ цэгт огтолдог гэе. $I$ цэгийг дайрсан $AC$ талтай параллел шулуун $AB$ талыг $M$ цэгт, $BC$ талыг $N$ цэгт огтолно. $BM = 3$ ба $BN = 4$ бол $BD^2$ утгыг ол.

Хариу: 288.

**Бодлого E10.** Дөрвөн оронтой $\overline{abcd}$ тоо хөрвүүлсэн $\overline{dcba}$ тооноосоо тэгш тоо дахин бага байв. $\overline{abcd}$ тоог ол.

Хариу: 2178.

**Бодлого E11.** Хоёр ялгаатай анхны тооны нийлбэрт яг гурван янзаар бичигддэг хамгийн бага натурал тоог ол. Энд нэмэгдэхүүний байр сольсныг ижил нийлбэр гэж үзнэ.

Хариу: 24.

**Бодлого E12.** $F_1 = F_2 = 1$ ба $n \geq 3$ үед $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ байдаг дараалал өгөгдөв. $F_{1000}$ гишүүнийг 991-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

Хариу: 55.

**Бодлого F1.** $62m^2 + 1$ тоо бүхэл тооны квадрат болдог хамгийн бага натурал $m$ тоог ол.

Хариу: 8.

**Бодлого F2.** $(-1, -1)$, $(13, 0)$, $(0, 11)$ цэгүүд дээр оройтой гурвалжны дотоод хэсэгт орших бүхэл координаттай цэгүүдийн тоог ол.

Хариу: 83.

**Бодлого F3.** $x, y$ натурал тоонуудын хувьд $x+y = 338$ ба $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 24$ байдаг бол $\sqrt{(x + 72)(y + 72)}$ илэрхийллийн утгыг ол.

Хариу: 209.

**Бодлого F4.** $8\sqrt{3}$ радиустай тойрогг хоорондоо $60^\circ$ өнцөг үүсгэдэг хөвч ба диаметр өгөгдөв. Диаметр нь хөвчийг $1:2$ харьцаатай хуваадаг бол хөвчийн уртыг ол.

Хариу: 24.

**Бодлого F5.** $2^m 3^n$ тоо $\binom{2025}{1012}$ сэлгэмлийг хуваадаг бол $m+n$ нийлбэрийн хамгийн их утгыг ол.

Хариу: 11 *(хэсэглэл)*, 1519 *(сэлгэмэл)*.

**Бодлого F6.** $2n(n+11)$ илэрхийлэл ямар нэг натурал тооны факториал болдог байх хамгийн их хоёр оронтой натурал $n$ тоог ол.

Хариу: 45.

**Бодлого F7.** $ABCD$ параллелграмын $\angle A = 78^\circ$ байдаг. $AB$ тал дээр $CM = CD$ байх $M$ цэгийг, $BC$ тал дээр $CN = MN$ байх $N$ цэгийг авав. Хэрэв $C$, $D$, $M$, $N$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол $\angle CDM$ өнцөг хэдэн градус байх вэ?

Хариу: 68.

**Бодлого F8.** $a$, $b$ бүхэл тоонууд ба $P(x)$ бүхэл коэффициенттой олон гишүүнтийн хувьд $x^{2026} + 10x^{62} + ax + b = (x^2+x+1)P(x)$ байдаг бол $P(1)$ утгыг ол.

Хариу: 10.

**Бодлого F9.** $10000002^7$ тооны цифрүүдийн нийлбэрийг ол.

Хариу: 81.

**Бодлого F10.** $a+b+c+d=4$ нийлбэртэй $a$, $b$, $c$, $d \geq 0$ сөрөг биш тоонуудын хувьд

$$(3a+1)(3b+1)(3c+1)(3d+1) = 131abcd + 125$$

байдаг бол $3(a^2+b^2+c^2+d^2)$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Хариу: 16.

**Бодлого F11.** 12-оос хэтрэхгүй натурал тоонууд дотроос 32-оос хэтрэхгүй нийлбэртэй ялгаатай таван тооноос тогтох олонлогийг хэдэн янзаар сонгож болох вэ?

Хариу: 396.

**Бодлого F12.** $ABC$ гурвалжинд багтсан тойргийн $I$ төв, радиус 45 байв. $A$ оройн биссектрисийн суурийг $D$ гэе.$ADC$ гурвалжинд багтсан тойргийн радиус 36 бөгөөд $DC = CI$ бол $IDC$ гурвалжинд багтсан тойргийн радиусыг ол.

Хариу: 20.

# Монголын Математикийн 62-р Олимпиадын II Давааны I шат

Монголын математикийн 62-р олимпиадын II давааны I шат буюу аймаг, дүүргийн математикийн олимпиад 2025 оны 12 сарын 13, 14 өдрүүдэд орон даяар нэгэн зэрэг зохион байгуулагдав.

Дүүргийн олимпиадыг зохион байгуулсан дараах сургуулиудын удирдлага, багш, ажилчдад талархал илэрхийлье.

| **Дүүрэг** | **Сургууль** |
|---|---|
| Багануур | Оюуны Эрин сургууль |
| Багахангай | 91-р сургууль |
| Налайх | 199-р сургууль |
| Баянгол | 40-р сургууль |
| Баянзүрх | 14-р сургууль |
| Сонгинохайрхан | Ирээдүй сургууль |
| Сүхбаатар | 1-р сургууль |
| Хан-Уул | Олонлог төв сургууль |
| Чингэлтэй | Олонлог эгзэ сургууль |

Удирдамжийн дагуу оролцогчид C (5-6 анги), D (7-8 анги), S (Бага ангийн багш), E (9-10 анги), F (11-12 анги), T (Багш) гэсэн зургаан ангилалд өрсөлдөв.

C, D, S ангиллын бодлогуудыг Б. Батбаясгалан ахлагчтай У. Батзориг, Т. Хулан нарын баг, E, F, T ангиллын бодлогуудыг Г. Баярмагнай ахлагчтай Х. Нурсолтан, Ү. Отгонбаяр нарын баг боловсруулав.

## Оролцогчид

Олимпиадад нийслэлд 3784, орон нутагт 6609, нийт 10 мянга гаран сурагч оролцов.

| № | Дүүрэг | C | D | S | E | F | T | Нийт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Багануур, Багахангай, Налайх | 95 | 99 | 31 | 69 | 66 | 19 | 379 |
| 2 | Баянгол | 178 | 168 | 23 | 141 | 173 | 25 | 708 |
| 3 | Баянзүрх | 142 | 157 | 16 | 138 | 134 | 34 | 621 |
| 4 | Сонгинохайрхан | 119 | 111 | 22 | 98 | 94 | 25 | 469 |
| 5 | Сүхбаатар | 154 | 150 | 10 | 162 | 124 | 35 | 635 |
| 6 | Хан-Уул | 158 | 156 | 43 | 134 | 126 | 37 | 654 |
| 7 | Чингэлтэй | 68 | 92 | 12 | 66 | 69 | 11 | 318 |
|  | Нийслэл | 914 | 933 | 157 | 808 | 786 | 186 | 3,784 |

| № | Аймаг | C | D | S | E | F | T | Нийт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Архангай | 108 | 101 | 32 | 81 | 81 | 33 | 436 |
| 2 | Баян-Өлгий | 52 | 76 | 7 | 66 | 51 | 20 | 272 |
| 3 | Баянхонгор | 72 | 89 | 30 | 52 | 51 | 26 | 320 |
| 4 | Булган | 41 | 41 | 39 | 42 | 32 | 21 | 216 |
| 5 | Говь-Алтай | 35 | 38 | 15 | 31 | 32 | 33 | 184 |
| 6 | Говьсүмбэр | 23 | 20 | 7 | 18 | 18 | 7 | 93 |
| 7 | Дархан-Уул | 72 | 80 | 38 | 82 | 69 | 49 | 390 |
| 8 | Дорноговь | 57 | 47 | 23 | 38 | 40 | 23 | 228 |
| 9 | Дорнод | 86 | 83 | 37 | 82 | 51 | 51 | 390 |
| 10 | Дундговь | 35 | 45 | 9 | 38 | 41 | 16 | 184 |
| 11 | Завхан | 72 | 69 | 48 | 59 | 59 | 49 | 356 |
| 12 | Орхон | 153 | 158 | 49 | 140 | 136 | 56 | 692 |
| 13 | Өвөрхангай | 75 | 91 | 38 | 82 | 76 | 38 | 400 |
| 14 | Өмнөговь | 42 | 59 | 21 | 45 | 47 | 38 | 252 |
| 15 | Сүхбаатар | 52 | 45 | 44 | 39 | 35 | 38 | 253 |
| 16 | Сэлэнгэ | 61 | 73 | 23 | 53 | 58 | 36 | 304 |
| 17 | Төв | 77 | 66 | 35 | 57 | 51 | 0 | 286 |
| 18 | Увс | 57 | 59 | 51 | 50 | 37 | 39 | 293 |
| 19 | Ховд | 126 | 103 | 43 | 66 | 54 | 38 | 430 |
| 20 | Хөвсгөл | 82 | 69 | 39 | 72 | 62 | 68 | 392 |
| 21 | Хэнтий | 50 | 61 | 16 | 41 | 44 | 26 | 238 |
|  | Орон нутаг | 1,428 | 1,473 | 644 | 1,234 | 1,125 | 705 | 6,609 |
|  | НИЙТ | 2,342 | 2,406 | 801 | 2,042 | 1,911 | 891 | 10,393 |

## Сэдэв

Бодлогын төрөл A = Алгебр, C = Комбинаторик, G = Геометр, N = Тооны онол. Бодлогын хүндрэлийг улсын дундаж оноо ба Сүхбаатар дүүргийн дундаж оноогоор тооцоолов.

C, D, S ангилалд 1 өдөр 4 бодлого, E, F, T ангилалд 2 өдөр $2 \times 3 = 6$ бодлого бодов.

|  |  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| C | Төрөл | A | C | A | N |
|  | Дундаж | 0.65 | 0.29 | 1.04 | 0.18 |
|  | СБД | 1.92 | 0.30 | 2.87 | 0.60 |
| D | Төрөл | C | A | G | N |
|  | Дундаж | 0.53 | 0.74 | 0.41 | 0.18 |
|  | СБД | 2.00 | 3.37 | 2.27 | 0.94 |
| S | Төрөл | A | G | C | N |
|  | Дундаж | 3.56 | 0.13 | 0.26 | 2.19 |
|  | СБД | 5.40 | 0.80 | 1.20 | 4.90 |

|  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | Төрөл | C | N | A | A | G | C |
|  | Дундаж | 4.13 | 1.93 | 0.16 | 0.80 | 0.27 | 0.12 |
|  | СБД | 5.42 | 3.77 | 1.01 | 2.05 | 1.11 | 0.52 |
| F | Төрөл | C | N | A | A | G | C |
|  | Дундаж | 2.24 | 1.55 | 0.20 | 0.79 | 0.38 | 0.17 |
|  | СБД | 4.07 | 3.23 | 1.35 | 2.23 | 2.02 | 0.98 |
| T | Төрөл | C | N | G | G | A | C |
|  | Дундаж | 2.22 | 1.31 | 0.30 | 3.07 | 0.91 | 0.08 |
|  | СБД | 5.80 | 4.20 | 1.83 | 4.69 | 2.97 | 0.60 |

Эндээс харахад C, D ангилалд бодлого арай хүндэдсэн, бусад ангилалд таарсан байна.

# Бодлогууд

## C ангилал (5–6 анги)

**Бодлого C1.** Гүйлтийн тойрог зам дээр Аагий, Баагий, Даагий гурав тус бүрдээ тогтмол хурдтайгаар гүйж байв. Аагий, Баагий хоёр ижил чиглэлд, харин Даагий тэдний эсрэг чиглэлд гүйжээ. Аагий Баагийг 120 секунд тутамд гүйцдэг, Аагий Даагийтай 30 секунд тутамд зөрдөг байв. Тэгвэл Баагий, Даагий хоёр хэдэн секунд тутамд зөрөх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого C2.** Чимгээ дөрвөлжин шугамтай дэвтрээс $8\times 10$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хайчилж аваад бүх нүдийг ялгаатай өнгөөр буджээ. Уг тэгш өнцөгтийг шугамын дагуу, гурван тэгш өнцөгт болгон хуваав. Хэчнээн ялгаатай аргаар хувааж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого C3.** $30$, $32$, $33$, $37$, $39$, $41$, $44$, $47$, $48$, $50$ гр жинтэй арван ширхэг чулуу байв. Бат эдгээрээс хэсэг чулуу, Дорж үлдсэн чулуунаас хэсэг чулуу аваад нэг чулуу үлдээв. Батын авсан чулууны нийт жин, Доржийн чулууны нийт жингийн $\frac{9}{11}$-тэй тэнцүү байсан бол үлдсэн нэг чулуу ямар жинтэй вэ? Энэ тохиолдолд Бат заавал $47$ гр жинтэй чулууг авсан байх албатай юу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого C4.** Хоёр оронтой 2 тооны үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? Жишээлбэл 35, 50 тоонуудын үржвэр $35 \times 50 = 1750$, үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэр $1 + 7 + 5 + 0 = 13$ байна.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

## D ангилал (7–8 анги)

**Бодлого D1.** Зөв 8 өнцөгтийн оройнууд дээр $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$, $7$, $9$ цифрүүдийг нэг, нэгээр нь бичих болжээ. (Эргүүлэлтээр бие, биедээ шилжих байрлуулалтыг ижилд тооцно!)

(1) Нийт хэдэн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

(2) 1 ба 2-ын цифр хөрш биш байхаар хэдэн аргаар бичиж болох вэ?

(3) Тэгш цифрүүд хөрш биш байхаар хэдэн аргаар бичиж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого D2.** Дээр нь $62^2$ тоог бичсэн гурван карт, $62^3+1$ тоог бичсэн гурван карт, үржүүлэх $\times$ тэмдэг бичсэн гурван карт, хасах $-$ тэмдэг бичсэн гурван карт байжээ. Эдгээрийг ашиглан хариу нь $62^3$ гардаг илэрхийлэл зохио. (Бүх картыг ашиглах албагүй)

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого D3.** $AC = BC$ байх адил хажуут, хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны $A$ оройгоос буусан өндрийн суурийг $H$, $A$ оройгоос гарсан дотоод биссектриссийн суурийг $D$ гэе. Хэрэв $AD = 2HD$ бол $\angle ACB$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого D4.** Гүйлтийн тойрог зам дээр Аагий, Баагий, Даагий гурав бие, биеэсээ нэгэн ижил зайд байрлаж байв. Биеийн тамирын багш дохио өгөхөд Аагий, Баагий хоёр ижил чиглэлд, харин Даагий тэдний эсрэг чиглэлд гүйв. Тэд бүгд ижил, тогтмол хурдаар гүйдэг ба уулзмагцаа тэр даруй өөрсдийн чиглэлийг өөрчлөн өөрсдийн гүйж байсныхаа эсрэг чиглэлд үргэлжлүүлэн гүйнэ. Дохио өгөөд 10 секунд өнгөрөхөд хамгийн эхэлж Аагий, Даагий хоёр, дараа нь Аагий, Баагий хоёр уулзсан бол дохио өгснөөс хойш 2026 секунд өнгөрөхөд Баагий, Даагий хоёр нийт хэдэн удаа уулзсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

## S ангилал (Бага ангийн багш)

**Бодлого S1.** Дэлгүүрээс 7 кг алим, 8 кг гадил, 5 кг усан үзэм авахад 9 кг алим, 12 кг гадил, 3 кг усан үзэм авсантай ижил үнэтэй байв. Яг энэ мөнгөөрөө 3 кг алим аваад үлдсэнд нь усан үзэм авчээ. Хэдэн кг усан үзэм авсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого S2.** Нэгж талтай $ABCD$ квадратын $A$ оройг дайрсан $BC$, $CD$ хэрчмүүдийг шүргэдэг тойргийг $\omega$ гэе. $ABCD$ квадрат болон $\omega$ тойргийн огтлолцолд үүсэх дүрсийн талбайг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

**Бодлого S3.** Аль ч хоёр нь параллел биш, аль ч гурав нь нэг цэгт огтлолцдоггүй зургаан шулуун өгөгдөв. Огтлолцлын $15$ цэг дотроос аль ч гурав нь нэг шулуун дээр оршдоггүй таван цэгийг хэдэн янзаар сонгож авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого S4.** $\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{PRIME}} = \overline{\mathrm{EMIRP}}$ байх A цифр ба $\overline{\mathrm{PRIME}}$ тоог ол. Энд ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэсэн ба P, E цифрүүд тэгээс ялгаатай.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

## E ангилал (9–10 анги)

**Бодлого E1.** $\overline{abc} > \overline{cba}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй гурван оронтой тоо $\overline{abc}$ хэд байх вэ? Тоонд цифр давтагдаж болно.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого E2.** $3^n = m! + 9$ байдаг бүх натурал тоон $(m, n)$ хосыг ол. Энд $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого E3.** $x + y + z = 0$ байдаг $x$, $y$, $z$ тоонуудын хувьд

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq \frac{25}{2} x^2 y^2 z^2$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

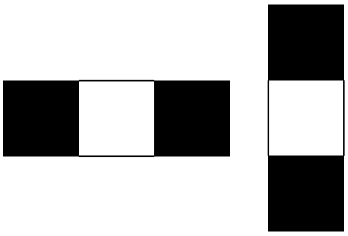
**Бодлого E4.** $f(1) = 2$, $f(2) = 6$ байх рационал коэффициенттой $f(x) = ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнт цор ганц язгууртай байх боломжгүйг харуул. Энд $a \neq 0$.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого E5.** $ABC$ гурвалжинд $BE$, $CF$ өндрүүд татав. $A$ оройгоос татсан өндөр $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой $D$ цэгт огтлолцдог байг. $AED$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $BEC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой $E$ цэгээс ялгаатай $P$ цэгээр огтлолцдог бол $FP$ болон $BC$ шулуунууд перпендикуляр гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүдэй)

**Бодлого E6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$4 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог ол. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн 1 янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $\overline{abcde} > \overline{edcba}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, таван оронтой тоо $\overline{abcde}$ хэд байх вэ? Тоонд цифр давтагдаж болно.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F2.** $3(p^2 - p) = q^6 - q^2$ байдаг бүх $(p, q)$ анхны тоон хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F3.** $xy + yz + zx = 0$ байдаг $x$, $y$, $z$ тоонуудын хувьд

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq \frac{25}{2}x^2y^2z^2$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F4.** Дараах нөхцөлүүдийг зэрэг хангадаг бүх тэг биш бүхэл тоон $(m, n, k)$ гурвалыг ол.

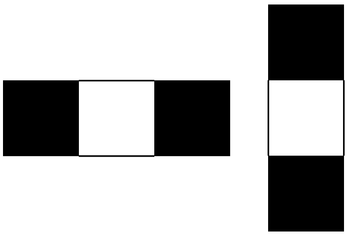
$$\frac{121}{m^2} = \frac{12}{n} + \frac{1}{k} \quad \text{ба} \quad \frac{144}{n^2} = \frac{11}{m} + \frac{1}{k}$$

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F5.** $AC > AB$ байх $ABC$ гурвалжны $BC$ талд перпендикуляр байх $l$ шулуун $BA$ цацрагийг $A$ цэгээс цааш $E$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $F$ цэгт, $BC$ талыг $D$ цэгт огтолдог байг. Хэрэв $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $AEF$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэг нь $P$ бол $DP$ шулуун $l$ шулуунаас үл хамаарах тогтмол $Q$ цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого F6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$6 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог ол. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн $1$ янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

## Т ангилал (Багш)

**Бодлого Т1.** $n \geq 1$ сондгой тоо гэе. Тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой $\overline{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n}$ тоог хөрвүүлэн бичихэд гарах $\overline{a_na_{n-1}\dots a_2a_1}$ тоог авч үзье.

(1) $\overline{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n} = \overline{a_na_{n-1}\dots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(2) $\overline{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n} \neq \overline{a_na_{n-1}\dots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(3) $\overline{a_1a_2\dots a_{n-1}a_n} > \overline{a_na_{n-1}\dots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Т2.** Натурал $n$ тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(n)$ гэж тэмдэглэе.

$S(2^p) - S(2^{p+1}) = 1$ байх бүх $p$ анхны тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Т3.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $A$ оройг агуулсан $BC$ нумын дундаж цэг $N$, $A$ оройг агуулаагүй $BC$ нумын дундаж цэг $M$ байг. $M$ цэгийг дайрсан $AM$ шулуунд перпендикуляр шулуун $BC$ шулуунтай $D$ цэгт огтлолцдог байв.

$AM$ шулуун $NB$, $NC$, $ND$ шулуунуудтай харгалзан $P$, $Q$, $R$ цэгүүдээр огтлолцдог бол $PR = RQ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого Т4.** $ABC$ зөв гурвалжин дотор $LMN$ жижиг зөв гурвалжныг $M$, $N$ цэгүүд энэ дарааллаараа $BC$ тал дээр оршихоор авав. $BM = 62$, $MN = AL$, $NC = 448$ байдаг бол $BC$ талын уртыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

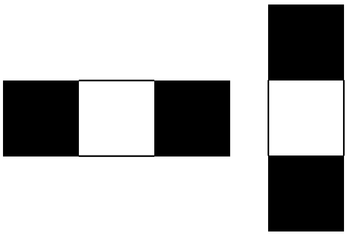
**Бодлого Т5.** Бүгд нэгэн зэрэг тэг биш $a$, $b$, $c$ тоонуудын нийлбэр $0$ бол

$$2 \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{12}{5}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$8 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог $a_n$ гэе. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн 1 янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно. Хангалттай том $N$ натурал тооноос их $n$ натурал тоо бүрийн хувьд

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2n} < a_n < 3^{2n}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

## Бодолтууд

### C ангилал (5–6 анги)

**Бодлого C1.** Гүйлтийн тойрог зам дээр Аагий, Баагий, Даагий гурав тус бүрдээ тогтмол хурдтайгаар гүйж байв. Аагий, Баагий хоёр ижил чиглэлд, харин Даагий тэдний эсрэг чиглэлд гүйжээ. Аагий Баагийг 120 секунд тутамд гүйцдэг, Аагий Даагийтай 30 секунд тутамд зөрдөг байв. Тэгвэл Баагий, Даагий хоёр хэдэн секунд тутамд зөрөх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Хариу: 40.

Замыг 120 хэсэг гэвэл Аагий, Баагий хоёрын хурдны зөрөө 1 секундэд 1 хэсэг, Аагий, Даагий хоёрын хурдны нийлбэр 1 секундэд 4 хэсэг болно. Иймд Баагий, Даагий хоёрын нийлээд 1 секундэд 3 хэсэг зам туулна. Иймд тэд $\frac{120}{3} = 40$ секунд тутамд зөрнө.

**Бодлого C2.** Чимгээ дөрвөлжин шугамтай дэвтрээс $8 \times 10$ хэмжээтэй тэгш өнцөгт хайчилж аваад бүх нүдийг ялгаатай өнгөөр буджээ. Уг тэгш өнцөгтийг шугамын дагуу, гурван тэгш өнцөгт болгон хуваав. Хэчнээн ялгаатай аргаар хувааж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

*Бодолт.* Хариу: 309.

$8 \times 10$ тэгш өнцөгтийн торон шугамын дагуу зүсэлт хийе. Хоёр эсрэг талын ирмэгийг бүрэн холбосон зүсэлтийг *урт зүсэлт* эсрэг тохиолдолд *богино зүсэлт* гэе. Яг 3 тэгш өнцөгт үүсгэх боломж нь хоёрхон тохиолдолд бий:

(1) хоёр параллель урт зүсэлт хийх;

(2) нэг урт зүсэлт, нөгөө нь үүнд перпендикуляр богино зүсэлт байх.

Эдгээрийг тус тусад нь тоолъё.

(1) Хоёр параллель бүрэн урттай зүсэлт.

Босоо чиглэлд $10-1=9$ янзын урт зүсэлт бий. Эдгээрээс 2-ыг сонгож 3 тэгш өнцөгт болгон хуваах боломж $\binom{9}{2} = 36$ байна. Хэвтээ чиглэлд $8-1=7$ янзын урт зүсэлт бий. Эдгээрээс 2-ыг сонговол $\binom{7}{2} = 21$ байна. Иймд энэ тохиолдол нийт $36+21=57$ боломжтой.

(2) Нэг урт зүсэлт + нэг перпендикуляр богино зүсэлт.

*А. Урт босоо зүсэлт.* Урт босоо зүсэлт хийх 9 боломж байна. Үүний дараа богино хэвтээ зүсэлт нь уг зүсэлтийн *зүүн талд* эсвэл *баруун талд* байрлаж болно: 2 сонголт. Богино зүсэлтийн байрлал хэвтээ торон шугамуудаас сонгогдоно, тэдгээрийн тоо 7. Иймд $9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$ боломж байна.

*Б. Урт хэвтээ зүсэлт.* Өмнөх тохидолтой адилаар, урт хэвтээ зүсэлтийн 7 боломж, богино босоо зүсэлтийн 9 боломж, мөн 2 талд байх боломжтой тул $7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$ боломжтой. Иймд II тохиолдолд нийт $126+126=252$ боломжтой. Нийт боломжийн $57+252=309$ байна.

**Бодлого C3.** 30, 32, 33, 37, 39, 41, 44, 47, 48, 50 гр жинтэй арван ширхэг чулуу байв. Бат эдгээрээс хэсэг чулуу, Дорж үлдсэн чулуунаас хэсэг чулуу аваад нэг чулуу үлдээв. Батын авсан чулууны нийт жин, Доржийн чулууны нийт жингийн $\frac{9}{11}$-тэй тэнцүү байсан бол үлдсэн нэг чулуу ямар жинтэй вэ? Энэ тохиолдолд Бат заавал 47 гр жинтэй чулууг авсан байх албатай юу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Хариу: 41. *Албагүй.*

Батын чулууны нийт жинг $a$, Доржийн чулууны жин $b$ гэвэл $a : b = 9 : 11$ буюу $11a = 9b$ болно. Эндээс $11(a+b) = 20b$ тул $20 \mid a+b$ буюу Бат, Дорж хоёрын чулууны нийт жин 20-д хуваагдана. 10 чулууны нийт жин

$$30 + 32 + 33 + 37 + 39 + 41 + 44 + 47 + 48 + 50 = 401$$

Эдгээрээс зөвхөн 41-ийг хасахад үлдэх тоонуудын нийлбэр 20-д хуваагдана. Иймд $a + b = 360$ болох ба $11 \cdot 360 = 20b \Rightarrow b = 198$, $a = 162$ байна.

Албагүй. Жишээ нь Батын чулуунууд 33, 37, 44, 48 гр жинтэй нийт 162 гр, Доржийнх 30, 32, 39, 47, 50 гр жинтэй нийт 198 гр байж болно.

PS: Батын боломжууд $\{30, 37, 47, 48\}$, $\{32, 33, 47, 50\}$, $\{33, 37, 44, 48\}$.

**Бодлого C4.** Хоёр оронтой 2 тооны үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэр хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? Жишээлбэл 35, 50 тоонуудын үржвэр $35 \times 50 = 1750$, үржвэрийн цифрүүдийн нийлбэр $1 + 7 + 5 + 0 = 13$ байна.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Хариу: $86 \times 93 = 7998$ *үед* $S(7998) = 33$.

Хоёр оронтой тоонуудын үржвэр $n = ab$ нь $n \leq 99 \cdot 99 = 9801$ байна. Тэгэхээр үржвэр нь хамгийн ихдээ 4 оронтой тоо болж чадна.

$$S(n) \leq 9 + 9 + 9 + 9 = 36.$$

(1) $S(n) = 36$ бол $n = 9999$, харин $9999 > 9801$ тул боломжгүй.

(2) $S(n) = 35$ боломжит тоонууд нь 9998, 9989, 9899, 8999. Эдгээрээс зөвхөн $8999 < 9801$ боловч 8999 анхны тул 35 боломжгүй.

(3) $S(n) = 34$ боломжит тоонууд 9799, 8998, 8989, 8899, 7999. Эдгээрийн задаргаа:

$$9799 = 41 \cdot 239, \quad 8998 = 2 \cdot 4499, \quad 8989 = 89 \cdot 101, \quad 8899 = 11 \cdot 809, \quad 7999 = 19 \cdot 421.$$

Бүгд 100-аас их анхны тоон хуваагчтай тул боломжгүй.

(4) $S(n) = 33$ боломжтой. Жишээ нь:

$$86 \times 93 = 7998, \quad S(7998) = 7 + 9 + 9 + 8 = 33.$$

Иймд хамгийн ихдээ $S(n) = 33$ байна.

## D ангилал (7–8 анги)

**Бодлого D1.** Зөв 8 өнцөгтийн оройнууд дээр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 цифрүүдийг нэг, нэгээр нь бичих болжээ. (Эргүүлэлтээр бие, биедээ шилжих байрлуулалтыг ижилд тооцно!)

(1) Нийт хэдэн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

(2) 1 ба 2-ын цифр хөрш биш байхаар хэдэн аргаар бичиж болох вэ?

(3) Тэгш цифрүүд хөрш биш байхаар хэдэн аргаар бичиж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

*Бодолт.* Хариу: *(1)* $8! \div 8 = 7! = 5040$, *(2)* $6! \cdot 5 = 7! - 6! \cdot 2 = 3600$, *(3)* $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$.

Эргүүлэлтээр давхцах байрлалыг ижил гэж тооцох тул тойрог дээрх 8 тоог зөв 8 өнцөгтийн оройнууд дээр яг нэг янзаар байрлуулж болно. Иймд цаашид тойрог дээрх тоонуудыг тоолъё.

(1) Тойрог дээр 8 ялгаатай тоо бичих боломжийн тоо $8! \div 8 = 7! = 5040$ болно.

(2) 1-р арга (шууд тоолох) 2-ын цифрээс бусад долоон цифрийг тойрог дээр $6!$ аргаар бичиж болно. 1-ийн цифрийг 2 талын нүх дүүрэхгүй, 2-ын цифрийг бичихгүй, үлдсэн 5 нүхээр бичиж болох тул нийт $6! \times 5 = 3600$ аргаар бичиж болно. (зураг хар!)

2-р арга (эсрэг боломж тоолох) 1 ба 2-ын цифр хөрш бичигдэх боломжийн тоо $6! \times 2! = 1440$ тул энэ хоёр цифр хөрш бичигдэхгүй байх боломжийн тоо $7! - 6! \cdot 2! = 5040 - 1440 = 3600$.

(3) Эхлээд бүх сондгой цифрүүдээ тойрог дээр бичье. Тэгэхэд тойрог $A, B, C, D, E$ гэсэн таван нумд хуваагдана. Эдгээр дээр $2, 4, 6$ гэсэн тэгш цифрүүдээ нэг, нэгээр зөв бичих боломжийн тоо $5 \times 4 \times 3$ юм. Иймд бидний олох ёстой тоо $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$ болов.

**Бодлого D2.** Дээр нь $62^2$ тоог бичсэн гурван карт, $62^3 + 1$ тоог бичсэн гурван карт, үржүүлэх $\times$ тэмдэг бичсэн гурван карт, хасах $-$ тэмдэг бичсэн гурван карт байжээ. Эдгээрийг ашиглан хариу нь $62^3$ гардаг илэрхийлэл зохио. (Бүх картыг ашиглах албагүй)

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

*Бодолт.*

$$a^3 = (a^3 + 1) \times (a^3 + 1) - a^2 \times a^2 \times a^2 - (a^3 + 1)$$

адилтгалд $a = 62$ гэж аваад хангалттай. Нэг ширхэг $-$ тэмдэг бичсэн карт ашиглагдахгүй үлдэнэ.

**Бодлого D3.** $AC = BC$ байх адил хажуут, хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны $A$ оройгоос буусан өндрийн суурийг $H$, $A$ оройгоос гарсан дотоод биссектриссийн суурийг $D$ гэе. Хэрэв $AD = 2HD$ бол $\angle ACB$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

*Бодолт.* Хэрэв $\angle ACB = x$ гэвэл $\angle CAB = 90° - x/2$, $\angle CAD = 45° - x/4$ болно. Хамар өнцгийн чанараар $\angle ADB = x + 45° - x/4 = 45° + \frac{3}{4}x$.

Нөгөө талаас, $AHD$ тэгш өнцөгт гурвалжны $AD$ гипотенузын дунджийг $M$ гэвэл $AM = MD = MH$ болох тул $MDH$ нь зөв гурвалжин болно. Иймд $\angle ADH = 60°$.

$BC$ тал дээр $D$, $H$ цэгүүд хэрхэн байрлахаас хамааран дараах 2 тохиолдол үүснэ.

1-р тохиолдол, $B, H, D, C$ дараалаар байрлах бол $\angle ADH = \angle ADB$ болно. Дээрх өнцгүүдийг энд орлуулбал $60° = 45° + \frac{3}{4}x$. $x = 20°$ гарна.

2-р тохиолдол $B, D, H, C$ дараалаар байрлах бол $\angle ADC = 180° - (45° + \frac{3}{4}x) = \angle ADH = 60°$ болно. Эндээс $x = 60°$ болох ба $D$, $H$ цэгүүд давхцах тул бодлогын нөхцөл биелэхгүй.

**Бодлого D4.** Гүйлтийн тойрог зам дээр Аагий, Баагий, Даагий гурав бие, биесээ нэгэн ижил зайд байрлаж байв. Биеийн тамирын багш дохио өгөхөд Аагий, Баагий хоёр ижил чиглэлд, харин Даагий тэдний эсрэг чиглэлд гүйв. Тэд бүгд ижил, тогтмол хурдаар гүйдэг ба уулзмагцаа тэр даруй өөрсдийн чиглэлийг өөрчлөн өөрсдийн гүйж байсныхаа эсрэг чиглэлд үргэлжлүүлэн гүйнэ. Дохио өгөөд 10 секунд өнгөрөхөд хамгийн эхлэж Аагий, Даагий хоёр, дараа нь Аагий, Баагий хоёр уулзсан бол дохио өгснөөс хойш 2026 секунд өнгөрөхөд Баагий, Даагий хоёр нийт хэдэн удаа уулзсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Тойргийн уртыг 6 хэсэг гэвэл сурагчид 10 секундэд 1 хэсэг зам туулна. Сурагчдын төлөвийг $(x, y, z)$ гуравтаар дараах байдлаар бичье. $x$ сурагч, $y$ чиглэл, $z$ оройн дугаар. $x \in \{a, b, d\}$, $y \in \{1, -1\}$, $z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 0\}$ ба анхны төлөв $(a, -1, 1)$, $(b, -1, 3)$, $(d, 1, 5)$. 10 секунд тутамд өөрчлөгдөх төлөвийг бичвэл

00: $(a, -1, 1)$, $(b, -1, 3)$, $(d, 1, 5)$

10: $(a, 1, 0)$, $(b, -1, 2)$, $(d, -1, 0)$

20: $(a, -1, 1)$, $(b, 1, 1)$, $(d, -1, 5)$

30: $(a, -1, 0)$, $(b, 1, 2)$, $(d, -1, 4)$

40: $(a, -1, 5)$, $(b, -1, 3)$, $(d, 1, 3)$ (Баагий, Даагий хоёр уулзав)

50: $(a, 1, 4)$, $(b, -1, 2)$, $(d, -1, 4)$

60: $(a, 1, 5)$, $(b, -1, 1)$, $(d, -1, 3)$

70: $(a, -1, 0)$, $(b, 1, 0)$, $(d, -1, 2)$ ($a \to d \to b \to a$ цикл сэлгэмэл үүсэж байна.)

80: $(a, -1, 5)$, $(b, -1, 1)$, $(d, 1, 1)$ (Баагий, Даагий хоёр уулзав)

90: $(a, -1, 4)$, $(b, -1, 0)$, $(d, 1, 2)$

100: $(a, 1, 3)$, $(b, -1, 5)$, $(d, -1, 3)$

110: $(a, -1, 4)$, $(b, 1, 4)$, $(d, -1, 2)$

120: $(a, -1, 3)$, $(b, 1, 5)$, $(d, -1, 1)$ ($a \to b \to d \to a$ цикл сэлгэмэл үүсэж байна.)

130: $(a, -1, 2)$, $(b, -1, 0)$, $(d, 1, 0)$ (Баагий, Даагий хоёр уулзав)

140: $(a, 1, 1)$, $(b, -1, 5)$, $(d, -1, 1)$

150: $(a, 1, 2)$, $(b, -1, 4)$, $(d, -1, 0)$

160: $(a, -1, 3)$, $(b, 1, 3)$, $(d, -1, 5)$

170: $(a, -1, 2)$, $(b, -1, 4)$, $(d, 1, 4)$ (Баагий, Даагий хоёр уулзав)

180: $(a, -1, 1)$, $(b, -1, 3)$, $(d, 1, 5)$

Иймд 180 секундийн дараа анхны төлөв давтагдаж байна. Энэ хугацаанд $b$, $d$ хоёр нийт 4 удаа уулзана. (60 сек тутамд цикл өөрчлөлт гарах тул нийт 4 уулзалт гэж тооцож болно.)

$$2026 = 11 \times 180 + 46$$

тул эхний $11 \times 180 = 1980$ секундэд $11 \times 4 = 44$ удаа, дараагийн 46 секундэд 1 буюу нийт 45 удаа уулзана.

## S ангилал (Бага ангийн багш)

**Бодлого S1.** Дэлгүүрээс 7 кг алим, 8 кг гадил, 5 кг усан үзэм авахад 9 кг алим, 12 кг гадил, 3 кг усан үзэм авсантай ижил үнэтэй байв. Яг энэ мөнгөөрөө 3 кг алим аваад үлдсэнд нь усан үзэм авчээ. Хэдэн кг усан үзэм авсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

*Бодолт.* 1 кг алимын үнийг $x$, бананын үнийг $y$, усан үзмийн үнийг $z$ гэвэл

$$7x + 8y + 5z = 9x + 12y + 3z$$

болох ба эндээс $2y = z - x$ гэж мөрдөнө. Нийт үнээ тооцохдоо $y$-ийг орлуулбал

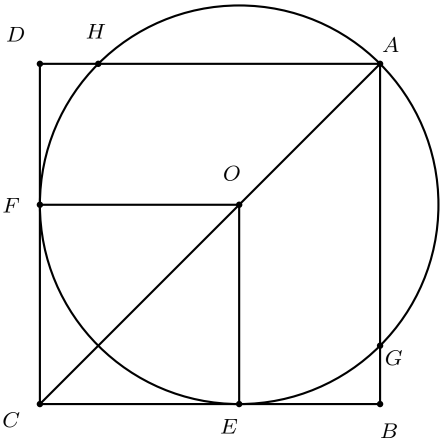
$$S = 7x + 8y + 5z = 7x + 4z - 4x + 5z = 3x + 9z$$

болох ба 3 кг алим авсан тул 9 кг усан үзэм авсан байна.

**Бодлого S2.** Нэгж талтай $ABCD$ квадратын $A$ оройг дайрсан $BC$, $CD$ хэрчмүүдийг шүргэдэг тойргийг $\omega$ гэе. $ABCD$ квадрат болон $\omega$ тойргийн огтлолцолд үүсэх дүрсийн талбайг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

*Бодолт.* $\omega$ тойрог $BC$ болон $CD$ хэрчмүүдийг харгалзан $E$, $F$ цэгээр шүргэдэг, $BA$, $AD$ талыг харгалзан $G$, $H$ цэгээр огтолдог байг. $\omega$ тойргийн төвийг $O$, радиусыг $r$, огтлолцолд үүсэх дүрсийн талбайг $S$ гэе.



Тэгвэл $\angle GAH = 90^\circ$ тул $GH$ нь $\omega$ тойргийн диаметр болно. Мөн $\omega$ тойрог, $ABCD$ квадрат нь $AC$ диагоналийн хувьд тэгш хэмтэй тул $GAH$ адил хажуут гурвалжин байна. Иймд

$$S = \frac{r \cdot 2r}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = r^2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

болно.

$BAC$ гурвалжны хувьд Пифагорын теорем хэрэглэвэл $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$ буюу $AC = \sqrt{2}$ байна. Мөн ижлээр $OECF$ квадрат тул $OEC$ гурвалжны хувьд Пифагорын теорем хэрэглэвэл $OC^2 = OE^2 + EC^2$ буюу $OC^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ болно. Иймд $AC = AO + OC = r + \sqrt{2}r$ гэдгээс $r = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$ болно. Эндээс $S = (2-\sqrt{2})^2\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ болов.

**Бодлого S3.** Аль ч хоёр нь параллел биш, аль ч гурав нь нэг цэгт огтлолцдоггүй зургаан шулуун өгөгдөв. Огтлолцлын 15 цэг дотроос аль ч гурав нь нэг шулуун дээр оршдоггүй таван цэгийг хэдэн янзаар сонгож авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хариу: 537.

Огтлолцлын 15 цэгээс таван цэг сонгоё. Тавуулаа нэг шулуун дээр оршдог $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{5} = 6$ байрлал байна. Яг дөрөв нь нэг шулуун дээр оршдог $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{10}{1} = 300$ байрлал байна.

Гурав нь нэг шулуун дээр оршдог $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{10}{2} = 2700$ байрлал байна. Энд гурван цэгийг дайрсан хоёр шулууны огтлолцол байх боломж $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 540$ давхар тоологдоно.

Нийт $\binom{15}{5} = 3003$ боломж байгаа аль ч гурав нь нэг шулуун дээр оршдоггүй байрлалын тоо $3003 - 6 - 300 - 2700 + 540 = 537$ байна.

**Бодлого S4.** $\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{PRIME}} = \overline{\mathrm{EMIRP}}$ байх A цифр ба $\overline{\mathrm{PRIME}}$ тоог ол. Энд ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэсэн ба P, E цифрүүд тэгээс ялгаатай.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: $\mathrm{A} = 4$ *ба* $\overline{\mathrm{PRIME}} = 21978$.

$\mathrm{E} \neq \mathrm{P}$ гэдгээс $\mathrm{A} \geq 2$ байна. Мөн $\mathrm{A} \times \mathrm{P} \leq \mathrm{E} < \mathrm{A} \times (\mathrm{P} + 1)$ байна. Тухайлбал $2 \leq \mathrm{A} < \mathrm{E}$ байна. Цаашилбал $\mathrm{P} < 10/\mathrm{A}$ ба $\mathrm{P} \equiv \mathrm{A} \times \mathrm{E} \pmod{10}$ байхыг анзааръя.

$\mathrm{A} = 2$ үед P тэгш ба $2 \neq \mathrm{P} < 5 = 10/\mathrm{A}$ тул $\mathrm{P} = 4$ байна. Модулийн нөхцөлөөс $\mathrm{E} = 7$ болох ба $\mathrm{A} \times \mathrm{P} = 2 \times 4 > 7 = \mathrm{E}$ тул боломжгүй.

$\mathrm{A} = 3$ үед $\mathrm{P} < 10/\mathrm{A}$ тул $\mathrm{P} = 1, 2$ байна. $\mathrm{P} = 1$ үед модулийн нөхцөлөөс $\mathrm{E} = 7$ болох ба $\mathrm{A} \times (\mathrm{P} + 1) = 3 \times 2 < 7 = \mathrm{E}$ тул боломжгүй. $\mathrm{P} = 2$ үед модулийн нөхцөлөөс $\mathrm{E} = 4$ ба $\mathrm{A} \times \mathrm{P} = 3 \times 2 > 4 = \mathrm{E}$ тул боломжгүй.

$\mathrm{A} = 4$ үед $\mathrm{P} < 10/\mathrm{A}$ тэгш гэдгээс $\mathrm{P} = 2$ ба модулийн нөхцөлөөс $\mathrm{E} = 8$ байна. Эндээс $4 \times \overline{\mathrm{RIM}} + 3 = \overline{\mathrm{MIR}}$ биелэх тул R сондгой ба $10 > 4 \times \mathrm{R}$ тул $\mathrm{R} = 1$ ба $\mathrm{M} = 7$ байна. Иймээс $4 \times 1\mathrm{I}7 + 3 = 7\mathrm{I}1$ биелэх тул $\mathrm{I} = 9$ байна.

$\mathrm{A} \geq 5$ үед $\mathrm{P} < 10/\mathrm{A} \leq 2$ тул $\mathrm{P} = 1$ байна. Модулийн нөхцөлөөс $\mathrm{A} = 7$, $\mathrm{E} = 3$ болох ба $\mathrm{A} < \mathrm{E}$ гэдэгт зөрчих тул боломжгүй.

## E ангилал (9–10 анги)

**Бодлого E1.** $\overline{abc} > \overline{cba}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй гурван оронтой тоо $\overline{abc}$ хэд байх вэ? Тоонд цифр давтагдаж болно.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: 360.

Тэгээр төгсөөгүй гурван оронтой тоо нийт $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$ байгаа ба энд хөрвүүлсэнтэйгээ тэнцдэг тоо $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ байгаа. Бусад тоонууд нөхцөл хангадаг тоо, түүнийг хөрвүүлсэн тоо гэсэн хосод хуваагдах тул хариу $(810 - 90)/2 = 360$ байна.

**Бодлого E2.** $3^n = m! + 9$ байдаг бүх натурал тоон $(m, n)$ хосыг ол. Энд $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хариу: $(n, m) = (6, 6)$.

$6! + 9 = 729 = 3^6$ тул дээрх хариу шийд болно. Өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$m! + 9 > 3^2$ тул $n \geq 3$ ба $m! \equiv -9 \pmod{27}$ байна. Одоо $m! \equiv 0 \pmod 9$ гэдгээс $m \geq 6$ байх ба $m! \not\equiv 0 \pmod{27}$ гэдгээс $m \leq 8$ байна. Энд $m = 6$ үед $n = 6$ шийд тул $6! \equiv -9 \pmod{27}$ байна. Эндээс $7!$, $8! \not\equiv -9 \pmod{27}$ болох тул $m = 7, 8$ үед шийдгүй.

**Бодлого E3.** $x + y + z = 0$ байдаг $x$, $y$, $z$ тоонуудын хувьд

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq \frac{25}{2}x^2y^2z^2$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $x = 0$ үед илт тул $x = 1$, $y = t$, $z = -(1 + t)$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. Энэ үед $2(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^1) - 25x^2y^2z^2 = (2t + 1)^2(t - 1)^2(t + 2)^2 \geq 0$ байна.

$t = 1$ үед $x = y$, $t = -1/2$ үед $y = z$, $t = -2$ үед $z = x$ болох тул хоёр нь тэнцүү үед тэнцэтгэл биелнэ. Үнэндээ $x + y + z = 0$ үед

$$2(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) - 25x^2y^2z^2 = (x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2 \geq 0$$

байна.

**Бодлого E4.** $f(1) = 2$, $f(2) = 6$ байх рационал коэффициенттой $f(x) = ax^2 + bx + c$ квадрат гурван гишүүнт цор ганц язгууртай байх боломжгүйг харуул. Энд $a \neq 0$.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

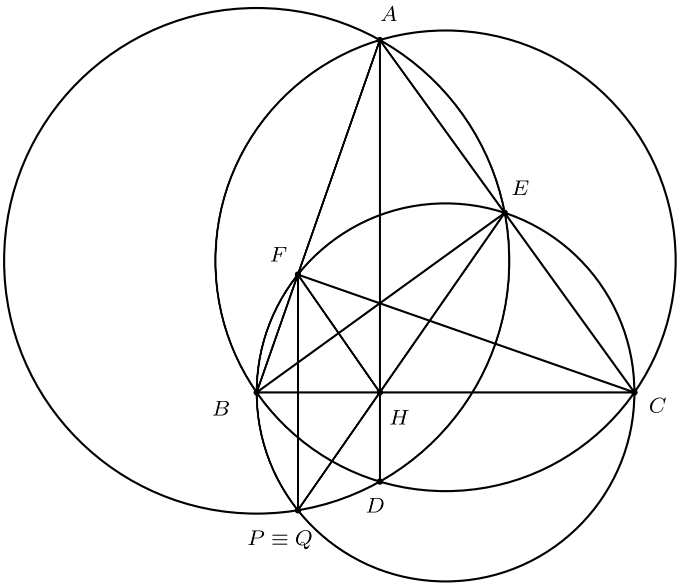
*Бодолт.* $f(x) = ax^2 + bx + c$ гэвэл $f(1) = a + b + c = 2$ ба $f(2) = 4a + 2b + c = 6$ гэдгээс $3a + b = 4$ болно. Эндээс $c = 2 - a - b = 2a - 2$ болох тул $b^2 - 4ac = (4 - 3a)^2 - 8a(a - 1) = (a - 8)^2 - 48$. Хэрэв $f(x)$ цор ганц язгууртай бол $((a - 8)/4)^2 = 3$, гэвч $\sqrt{3}$ рационал биш тул энэ тэнцэл биелэх боломжгүй.

**Бодлого E5.** $ABC$ гурвалжинд $BE$, $CF$ өндрүүд татав. $A$ оройгоос татсан өндөр $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой $D$ цэгт огтлолцдог байг. $AED$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $BEC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой $E$ цэгээс ялгаатай $P$ цэгээр огтлолцдог бол $FP$ болон $BC$ шулуунууд перпендикуляр гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүдэй)

*Бодолт.* Хоёр бодолт хийе.

*Радикал тэнхлэг ашигласан бодолт.* $ABDC$, $AEDP$, $BECP$ дөрвөн өнцөгтүүдийг багтаасан гурван тойргийн $AD$, $EP$, $BC$ радикал тэнхлэгүүд $H$ огтолцдог гэе. Тэгвэл $\angle BHP = \angle EHC = \angle BAC = \angle FHB$ болно. Цаашлаад $\angle BEC = 90^\circ = \angle BFC$ гэдгээс $F$, $P$ цэгүүд $BC$ диаметртэй тойрог дээр оршино. Иймд $P$, $F$ цэгүүд $BC$ шулууны хувь дахь тэгш хэмтэй байх тул $BC \perp FP$ байна.

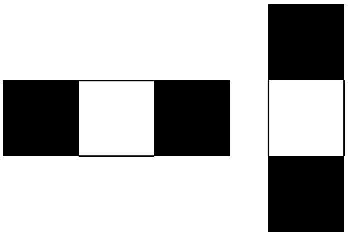


*Огтлолцсон хөвч ашигласан бодолт.* $F$ цэгийг $BC$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргасан цэгийг $Q$ гэе. Иймд

$$\angle BQC = \angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$$

тул $(BEFCQ)$ таван өнцөгт $BC$ диаметртэй тойрогт багтана. Нөгөө талаас $A$ оройн өндрийн суурийг $H$ гэвэл $\angle QHB = \angle FHB = \angle BAC = \angle EHC$ болох тул $Q$, $H$, $E$ цэгүүд нэг шулуун болно. $QBEC$, $ABDC$ багтсан дөрвөн өнцөгтүүдийн хувьд огтлолцсон хөвчийн теорем хэрэглэвэл $QH \cdot HE = BH \cdot HC$, $BH \cdot HC = AH \cdot HD$ болох тул $QH \cdot HE = AH \cdot HD$ байна. Иймд огтлолцсон хөвчийн урвуу теоремоор $AEDQ$ багтсан дөрвөн өнцөгт болох ба $Q$ нь $BEC$ болон $AED$ тойргийн огтлолцлын хоёр дахь цэг болох тул $Q \equiv P$ байна. Эндээс $P$ нь $F$ цэгийг $BC$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргасан цэг тул $BC \perp FP$ болж батлагдав.

**Бодлого E6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$4 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог ол. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн 1 янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.* Бодлогын нөхцөлийг хангахаар хучих боломжийн тоог $a_n$, $2 \times k$ хүснэгтийг $1 \times 2$ болон $2 \times 1$ дүрс ашиглан дүрс давхцуулахгүй, илүү гаргахгүй хучих боломжийн тоог $f_k$ гэе.

Хүснэгтийн сондгой дугаартай мөрийг улаан, ногоон, улаан, ногоон, ... гэх мэт, тэгш дугаартай мөрийг хөх, шар, хөх, шар, ... гэх мэт сөөлжүүлэн будъя. Тэгвэл нэг дүрсэд үргэлж ижил өнгийн хоёр нүд орох тул

$$a_{2k} = f_k^4, \quad a_{2k+1} = f_k^2 \cdot f_{k+1}^2$$

болно. $0 < k$ хувьд $f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$ болохыг харж болох бөгөөд $f_1 = 1$; $f_2 = 2$ тул $f_k$ нь Фибоначийн дарааллын $k+1$-р гишүүн байна.

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $\overline{abcde} > \overline{edcba}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, таван оронтой тоо $\overline{abcde}$ хэд байх вэ? Тоонд цифр давтагдаж болно.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: 40050.

Тэгээр төгсөөгүй таван оронтой тоо нийт $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 81000$ байгаа ба энд хөрвүүлсэнтэйгээ тэнцдэг тоо $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$ байгаа. Бусад тоонууд нөхцөл хангадаг тоо, түүнийг хөрвүүлсэн тоо гэсэн хост хуваагдах тул хариу $(81000 - 900)/2 = 40050$ байна.

**Бодлого F2.** $3(p^2 - p) = q^6 - q^2$ байдаг бүх $(p, q)$ анхны тоон хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хариу: $(p, q) = (5, 2)$.

$3(5^2 - 5) = 2^6 - 2^2$ тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. Эхлээд $q^2 \mid 3p(p-1)$ болохыг анзааръя.

$q = 3$ үед $p^2 - p = (3^6 - 3^2)/3 = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ анхны тоон шийдгүй.

$q = p$ үед $p(p+1)(p^2+1) = 3$ бүхэл тоон шийдгүй.

$(q, 3p) = 1$ үед $q^2 \mid p - 1$ байна. Энд $p = aq^2 + 1$ гэвэл $3a(aq^2 + 1) = q^4 - 1$ болно. Одоо $q^2 \mid 3a + 1 = q^2(q^2 - 3a^2)$ гэдгээс $3a \geq q^2 - 1$ болох тул $(q^2-1)(aq^2+1) \leq 3a(aq^2+1) = (q^2-1)(q^2+1)$ болно. Эндээс $a = 1$ болох ба энэ үед $q^2 \mid 4$ гэдгээс $q = 2,\ p = q^2 + 1 = 5$ байна.

**Бодлого F3.** $xy + yz + zx = 0$ байдаг $x$, $y$, $z$ тоонуудын хувьд

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \geq \frac{25}{2} x^2 y^2 z^2$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $xyz = 0$ үед илт тул $xyz \neq 0$ гэж үзье. $1/x$, $1/y$, $1/z$ урвуунуудыг авч үзэх замаар $x + y + z = 0$ үед тэнцэтгэл бишийг батлахад хангалттай.

$x = 0$ үед илт тул $x = 1$, $y = t$, $z = -(1+t)$ гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. Энэ үед $2(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^1) - 25x^2y^2z^2 = (2t+1)^2(t-1)^2(t+2)^2 \geq 0$ байна.

$t = 1$ үед $x = y$, $t = -1/2$ үед $y = z$, $t = -2$ үед $z = x$ болох тул хоёр нь тэнцүү үед тэнцэтгэл биелнэ. Үнэндээ $xy + yz + zx = 0$ үед

$$2(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) - 25x^2y^2z^2 = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 \geq 0$$

байна.

**Бодлого F4.** Дараах нөхцөлүүдийг зэрэг хангадаг бүх тэг биш бүхэл тоон $(m, n, k)$ гурвалыг ол.

$$\frac{121}{m^2} = \frac{12}{n} + \frac{1}{k} \quad \text{ба} \quad \frac{144}{n^2} = \frac{11}{m} + \frac{1}{k}$$

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: $(m, n, k) = (22, 24, -4)$.

Дээрх хариу зөв болохыг шалгах хэцүү биш. Өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$r = 11/m \neq 0$, $s = 12/n \neq 0$ ба $t = 1/k$ гэвэл бодлогын нөхцөл $r^2 = s + t$, $s^2 = r + t$ гэж бичигдэнэ. Эндээс $(r - s)(r + s + 1) = r^2 - s^2 + r - s = 0$ болно.

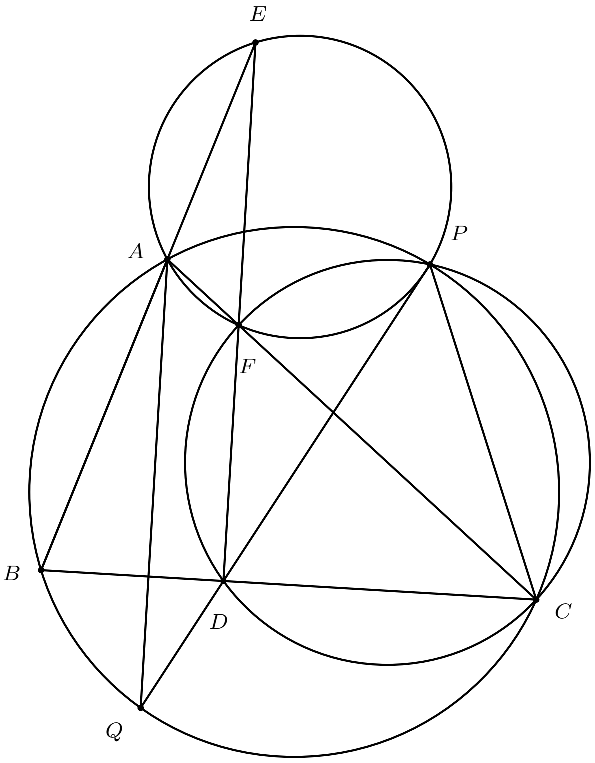
$r = s$ үед $11(11 - m)k = m^2$ гэдгээс $11 \mid m$ байна. Иймд $d = m/11 = 1/r \neq 0$ бүхэл ба $(1 - d)c = d^2$ байна. Энд $d - 1 \mid d^2 - (d^2 - 1) = 1$ гэдгээс $d = 2$ ба $m = 11d = 22$, $n = 12/s = 12d = 24$, $k = d^2/(1 - d) = -4$ болно.

$r \neq s$ үед $r + s + 1 = 0$ байх ба энэ үед $r^2 + r + 1 = t$ гэдгээс $1/k = t \geq 3/4$ болно. Иймд $k = t = 1$ байна. Эндээс $0 \neq rs = -r(r + 1) = 1 - t = 0$ болж зөрчил гарна.

**Бодлого F5.** $AC > AB$ байх $ABC$ гурвалжны $BC$ талд перпендикуляр байх $l$ шулуун $BA$ цацрагийг $A$ цэгээс цааш $E$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $F$ цэгт, $BC$ талыг $D$ цэгт огтолдог байг. Хэрэв $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $AEF$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой огтлолцох хоёр дахь цэг нь $P$ бол $DP$ шулуун $l$ шулуунаас үл хамаарах тогтмол $Q$ цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

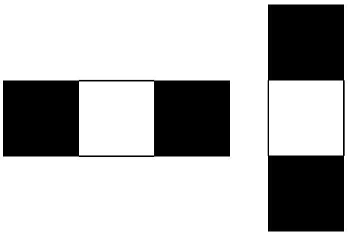
*Бодолт.* $PD$ шулуун $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин $Q$ цэгээр огтолдог гэе.



$P$ цэг нь $AB$, $AC$, $BC$, $DF$ шулуунаар үүсэх гүйцэт дөрвөн өнцөгтийн Микелийн цэг болох тул $CDFP$ багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Эндээс $\angle AQP = \angle ACP = \angle FCP = \angle FDP$ тул $AQ \parallel DF$

болж, $DF \perp BC$ гэдгийг санавал $AQ \perp BC$ болно. Эндээс $Q$ цэг нь $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог дээр орших бөгөөд $AQ \perp BC$ байх цэг болж батлагдав.

**Бодлого F6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$6 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог ол. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн 1 янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.* Бодлогын нөхцөлийг хангахаар хучих боломжийн тоог $a_n$, $k > 0$ үед $3 \times k$ хүснэгтийг $1 \times 2$ болон $2 \times 1$ дүрс ашиглан зүйж хучих боломжийн тоог $x_k$ гээд $x_0 = 1$ гэе.

Хүснэгтийн сондгой дугаартай мөрийг улаан, ногоон, улаан, ногоон,...гэх мэт, тэгш дугаартай мөрийг хөх, шар, хөх, шар, ...гэх мэт сөөлжүүлэн будъя. Тэгвэл нэг дүрсэд үргэлж ижил өнгийн хоёр нүд орох тул $k > 0$ хувьд

$$a_{2k-1} = x_{k-1}^2 x_k^2, \quad a_{2k} = x_k^4$$

болно. $k$ сондгой үед $2 \nmid 3k$ тул $x_k = 0$ байна. $k = 2m$, $m \geq 0$ үед $x_k = y_m$ гэвэл $y_0 = 1$, $y_1 = 3$ ба $m > 0$ хувьд

$$y_{m+1} = y_m + (2y_m + 2y_{m-1} + \cdots + 2y_1 + 2y_0)$$

болно. Эндээс $y_2 = 11$ ба

$$y_{m+2} = y_{m+1} + (2y_{m+1} + 2y_m + \cdots + 2y_1 + 2y_0) = y_{m+1} + (2y_{m+1} + y_{m+1} - y_m) = 4y_{m+1} - y_m$$

болно. $\{y_m\}_{m \geq 0}$ дарааллын характеристикийн тэгшитгэл нь $y^2 = 4y - 1$ байх ба шийдүүд нь

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

тул $\{y_m\}_{m \geq 0}$ дарааллын ерөнхий гишүүний томьёо

$$y_m = \lambda_1(2+\sqrt{3})^m + \lambda_2(2-\sqrt{3})^m = \frac{\lambda_1(1+\sqrt{3})^{2m} + \lambda_2(1-\sqrt{3})^{2m}}{2^m}$$

байна.

$$\begin{cases} 1 = y_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = y_1 = \lambda_1(2+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3}) \end{cases} = \begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \lambda_1 \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \lambda_2 \end{cases}$$

тул $x_k = y_m = \dfrac{(1+\sqrt{3})^{2m+1} - (1-\sqrt{3})^{2m+1}}{\sqrt{3} \cdot 2^{m+1}}$ болно. Эндээс $n = 2k+1$ үед $k$, $k+1$ хоёрын ядаж нэг нь сондгой тул $a_n = 0$, харин $4 \nmid n$ үед $a_n = 0$, $4 \mid n$ үед $n = 2k = 4m$ гэвэл $a_n = x_k^4 = y_m^4$ болно.

## Т ангилал (Багш)

**Бодлого Т1.** $n \geq 1$ сондгой тоо гэе. Тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n}$ тоог хөрвүүлэн бичихэд гарах $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$ тоог авч үзье.

(1) $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(2) $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} \neq \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(3) $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n} > \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1}$ байдаг тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: *(1)* $9\cdot 10^{(n-1)/2}$, *(2)* $81\cdot 10^{n-2} - 9\cdot 10^{(n-1)/2}$, *(3)* $(81\cdot 10^{n-2} - 9\cdot 10^{(n-1)/2})/2$.

$n = 2m+1$ гэе.

(1) Хөрвүүлсэнтэйгээ тэнцдэг $n$ оронтой, тэгээр төгсөөгүй тоо $9\cdot 10^m \cdot 1^m$ байна.

(2) Тэгээр төгсөөгүй, $n$ оронтой тоо $9\cdot 10^{2m-1}\cdot 9$ байх тул хөрвүүлсэнтэйгээ тэнцдэггүй тоо $81\cdot 10^{2m-1} - 9\cdot 10^m$ байна.

(3) Хөрвүүлсэнтэйгээ тэнцдэггүй тоонууд хөрвүүлснээсээ их тоо ба түүнийг хөрвүүлсэн тоо гэсэн хост хуваагдах тул хөрвүүлснээсээ их тоо $(81\cdot 10^{2m-1} - 9\cdot 10^m)/2$ байна.

**Бодлого Т2.** Натурал $n$ тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(n)$ гэж тэмдэглэе.

$S(2^p) - S(2^{p+1}) = 1$ байх бүх $p$ анхны тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: $p = 3$.

$p = 3$ үед $S(8) - S(16) = 1$ байна. Одоо өөр шийдгүй гэж харуулъя.

Эхлээд $N \equiv S(N) \pmod 9$ болохыг анзааръя. Энд $1 = S(2^p) - S(2^{p+1}) \equiv 2^p - 2^{p+1} \equiv -2^p \equiv 2^{p+3} \pmod 9$ гэдгээс $p + 3 \equiv 0 \pmod 6$ болно. Иймд $3 \mid p$ байна.

**Бодлого Т3.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $A$ оройг агуулсан $BC$ нумын дундаж цэг $N$, $A$ оройг агуулаагүй $BC$ нумын дундаж цэг $M$ байг. $M$ цэгийг дайрсан $AM$ шулуунд перпендикуляр шулуун $BC$ шулуунтай $D$ цэгт огтлолцдог байв.

$AM$ шулуун $NB$, $NC$, $ND$ шулуунуудтай харгалзан $P$, $Q$, $R$ цэгүүдээр огтлолцдог бол $PR = RQ$ гэж батал.

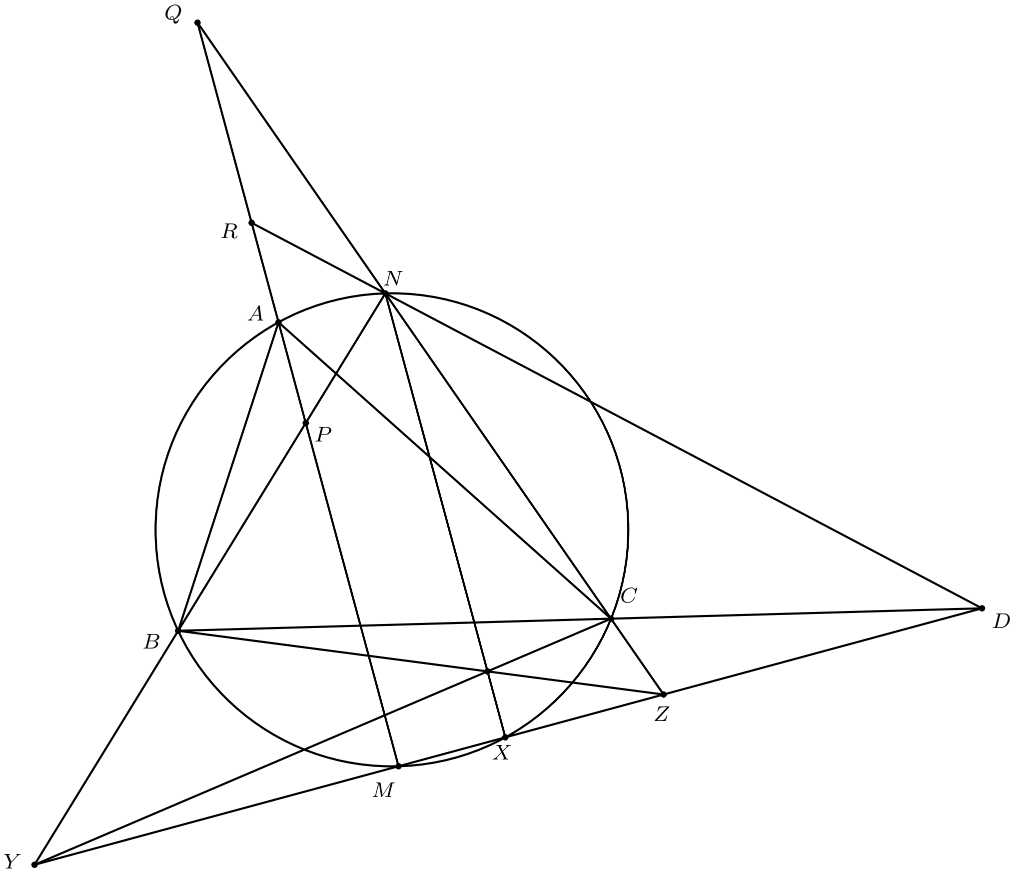
(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.* $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийг $\omega$ гэвэл $NM$ нь түүний диаметр болно. $N$ цэгийг дайрсан $AM$ шулуунтай параллел шулуун $MD$ шулуунтай $X$ цэгт, $NB$, $NC$ шулуунууд $MD$ шулууныг харгалзан $Y$, $Z$ цэгт огтолдог байг. Тэгвэл $PR = RQ \iff (Y, X; Z, D) = -1$ гэдгээс $YNZ$ гурвалжны хувьд $B$, $C$, $D$ цэгүүд коллинеар тул $YC$, $NX$, $ZB$ шулуунуудыг $YNZ$ гурвалжны чевиан гэж батлахад хангалттай.

$AM \parallel NX$, $AM \perp MD$ тул $NX \perp MD$ буюу $\angle NXM = 90^\circ$ болно. Эндээс $X$ нь $\omega$ дээр оршино. Эндээс өнцөг хөөгөөд, харьцаа бичвэл

$$\frac{NB}{BY}\cdot\frac{YX}{XZ}\cdot\frac{ZC}{CN} = \frac{NX\tan\angle YNX}{BM\tan\angle BMY}\cdot\frac{MC\tan\angle CMZ}{NX\tan\angle ZNX} = \frac{\tan\angle YNX}{\tan\angle BNX}\cdot\frac{\tan\angle CNX}{\tan\angle ZNX} = 1$$

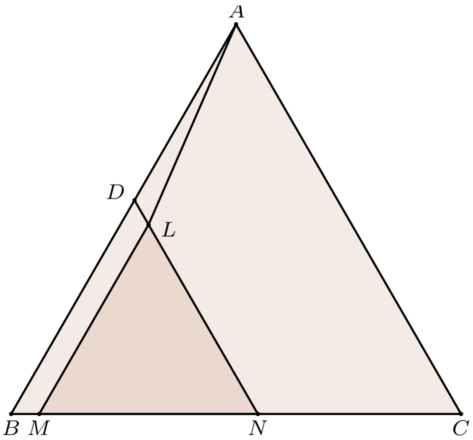
болж бодлого батлагдав.



**Бодлого T4.** $ABC$ зөв гурвалжин дотор $LMN$ жижиг зөв гурвалжныг $M$, $N$ цэгүүд энэ дарааллаараа $BC$ тал дээр оршихоор авав. $BM = 62$, $MN = AL$, $NC = 448$ байдаг бол $BC$ талын уртыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

*Бодолт.* Хариу: 992.



$LN$ шулуун $AB$ талтай $D$ цэгт огтлолцдог гэе. $DLMB$, $CNDA$ адил хажуут трапец болох тул $DL = BM = 62$ ба $DA = NC = 448$ байна. Цаашилбал $\angle ADL = 120^\circ$ тул $ADL$ гурвалжны хувьд косинусын теорем бичвэл $AL^2 = DA^2 + DL^2 - 2DA \cdot DL \cdot \cos 120^\circ = 448^2 + 62^2 + 448 \cdot 62 = 482^2$ болно. Иймд $MN = AL = 482$ ба $BC = 62 + 482 + 448 = 992$ байна.

**Бодлого T5.** Бүгд нэгэн зэрэг тэг биш $a$, $b$, $c$ тоонуудын нийлбэр 0 бол

$$2 \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{12}{5}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Эхлээд доод заагийг харуулъя. $a+b+c = 0$ гэдгээс $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^2+b^2+c^2)^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = 0$ байна. Иймд

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)} = 2$$

байна. $abc = 0$ үед тэнцэтгэл биелэхийг харах хэцүү биш. Эндээс тэнцэтгэл биелэх нөхцөл аль нэг нь тэг байх болно. Үнэндээ $a+b+c = 0$ үед

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} - 2 = \frac{5a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

байна.

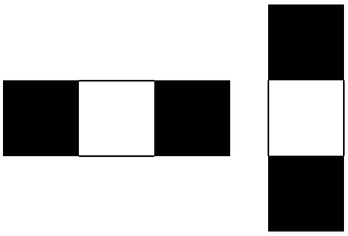
Одоо дээд заагийг харуулъя. $a = 1, b = x, c = -(1+x)$ гэхэд явцуурах зүйлгүй. Энэ үед $F(a,b,c) = 12\prod(a^2+b^2) - 5\sum a^2(a^2+b^2)(a^2+c^2) = 4x^6 + 12x^5 - 3x^4 - 26x^3 - 3x^2 + 12x + 4 = (x-1)^2(x+2)^2(2x+1)^2 \geq 0$ байна.

$x = 1$ үед $a = b$, $x = -2$ үед $a = c$, $x = -1/2$ үед $b = c$ байна. Иймд тэнцэтгэл биелэх нөхцөл хоёр нь тэнцүү байх болно. Үнэндээ $a+b+c = 0$ үед

$$\frac{12}{5} - \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

байна.

**Бодлого T6.** Хар өнгөөр будсан хоёр ширхэг нэгж квадратыг нэгж урттай хоёр хэрчмээр холбосон дүрсийг авч үзье. Квадрат хоорондын зайг хоосон гэж үзэх ба квадратууд хоорондоо нэгж зайтай байрлана (зурагт үзүүлэв).



$8 \times n$ хүснэгтийг энэ дүрсийг ашиглан дүрс давхардуулахгүйгээр зүйж хучих боломжийн тоог $a_n$ гэе. Энд квадратын ирмэгүүд болон хэрчмүүд давхцахыг зөвшөөрнө. Жишээлбэл $4 \times 1$ хүснэгтийг ийм дүрсээр зөвхөн 1 янзаар давхардуулахгүйгээр зүйж хучиж болно. Хангалттай том $N$ натурал тооноос их $n$ натурал тоо бүрийн хувьд

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2n} < a_n < 3^{2n}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.* Бодлогын нөхцөлийг хангахаар хучих боломжийн тоог $a_n$, $k > 0$ үед $4 \times k$ хүснэгтийг $1 \times 2$ болон $2 \times 1$ дүрс ашиглан зүйж хучих боломжийн тоог $x_k$ гээд $x_0 = 1$ гэе.

Хүснэгтийн сондгой дугаартай мөрийг улаан, ногоон, улаан, ногоон, ...гэх мэт, тэгш дугаартай мөрийг хөх, шар, хөх, шар, ...гэх мэт сөөлжүүлэн будъя. Тэгвэл нэг дүрсэд үргэлж ижил өнгийн хоёр нүд орох тул $k > 0$ хувьд

$$a_{2k-1} = x_{k-1}^2 x_k^2, \quad a_{2k} = x_k^4$$

болно. Иймд хангалттай том $K$ натурал тооноос их дурын $k$ тоо бүрийн хувьд $\left(\frac{5}{2}\right)^k < x_k < 3^k$ гэж батлахад хангалттай. $1 \leq k$ хувьд

$$x_k = 2(x_{k-1} + \cdots + x_1 + x_0) - x_{k-1} + (x_{k-2} + x_{k-4} + \ldots) + x_{k-2}$$

болох ба

$$x_{k+1} + x_k = 2x_k + 4(x_{k-1} + \cdots + x_0) - x_{k-1} - x_k + (x_{k-1} + \cdots + x_0) + x_{k-2} + x_{k-1}$$

буюу $x_{k+1} = 5(x_{k-1} + \cdots + x_0) + x_{k-2}$ эндээс $x_{k+2} = x_{k+1} + 5x_k + x_{k-1} - x_{k-2}$ болно. $\{x_k\}_{k \geq 0}$ дарааллын характеристик олон гишүүнт нь $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x + 1$ байх ба язгууруудыг нь $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \leq |\alpha_4|$ гэвэл

$$P(-2) > 0 > P(-1.5), \quad P(-1) < 0 < P(0), \quad P(0) > 0 > P(1), \quad P(2.5) < 0 < P(3)$$

тул завсрын утгын теоремоор $P(x)$ олон гишүүнтийн бүх язгуурууд ялгаатай бөгөөд

$$-2 < \alpha_3 < -1.5, \quad -1 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, \quad 2.5 < \alpha_4 < 3$$

гэж үзэж болно. Иймд $k \geq 0$ хувьд

$$x_k = \lambda_1 \alpha_1^k + \lambda_2 \alpha_2^k + \lambda_3 \alpha_3^k + \lambda_4 \alpha_4^k$$

болно. $\{x_k\}_{k \geq 0}$ дараалал нь эрс өсөх дараалал гэдгийг тооцвол $\lambda_4 > 0$ болох тул $x_k \sim \lambda_4 \alpha_4^k$ байна. Үүнээс хангалттай том $K$ натурал тооны хувьд $K < k$ хувьд $\left(\frac{5}{2}\right)^k < x_k < 3^k$ болж батлагдах болно.

# Монголын Математикийн 62-р Олимпиадын II Давааны II шат

Монголын математикийн 62-р олимпиадын II давааны II шат буюу бүс/нийслэлийн математикийн олимпиад 2026 оны 2 сарын 28 болон 3 сарын 1 өдрүүдэд зохион байгуулагдав.

Бүс/нийслэлийн олимпиадыг зохион байгуулсан дараах аймаг болон сургуулийн удирдлага, багш, ажилтдад талархал илэрхийлье.

| Газар | Зохион байгуулагч |
|---:|---|
| Баруун бүс | Баян-Өлгий аймаг |
| Говийн бүс | Дундговь аймаг |
| Төвийн бүс | Төв аймаг |
| Нийслэл | 1 дүгээр сургууль |

Зохион байгуулах газар байгаагүйн улмаас зүүн бүсийн олимпиад цуцлагдав.

## Оролцогчид

Удирдамжийн дагуу оролцогчид D (7-8 анги), E (9-10 анги), F (11-12 анги), S (Бага ангийн багш), T (Багш) гэсэн таван ангилалд өрсөлдөв. D, S ангиллын оролцогчид нэг өдөр 4 бодлого, E, F, T ангиллын оролцогчид хоёр өдөр нийт 6 бодлого бодов.

Олимпиадад нийслэлд 462, орон нутагт 445, нийт 900 гаран багш сурагч оролцож мэдлэг оюунаа сорин уралдав.

| | | D | E | F | S | T | Нийт |
|---|---:|---:|---:|---:|---:|---:|---:|
| Баруун | 5 | 26 | 31 | 21 | 18 | 23 | 119 |
| Говь | 4 | 34 | 31 | 29 | 16 | 24 | 134 |
| Төв | 7 | 53 | 47 | 45 | 20 | 27 | 192 |
| Нийслэл | 7 | 118 | 128 | 130 | 32 | 54 | 462 |
| Нийт | | 231 | 237 | 225 | 86 | 128 | 907 |

Монгол улсын гавьяат багш С.Цагааны нэрэмжит нийслэлийн математикийн олимпиадын дүнгийн хурал 2026 оны 3 сарын 9 өдөр Логарифм сургууль дээр зохион байгуулагдлаа. Ангилал тус бүрд медаль хүртсэн болон улсын олимпиадад оролцох эрх авсан багш сурагчдад баяр хүргэж Цагаан сангийн тэргүүн Ц.Болд сэтгэгдлээ хэлэв.

## Сэдэв

Сэдэв боловсруулахад Г. Баярмагнай ахлагчтай Х. Нурсолтан, Ү. Отгонбаяр нарын баг голлон ажиллав. Олимпиадад алгебр 6, комбинаторик 7, геометр 7, тооны онол 6 бодлого тавигдав.

Засалтыг Т. Хулан ахлагчтай хорооны гишүүд, МУИС-ийн багш, оюутнуудаас бүрдсэн баг гүйцэтгэв. Даамлаар Ү. Отгонбаяр (D), Т. Хулан (E), Б. Батбаясгалан (F), С. Цогзолмаа (S), Э. Оргил-Эрдэнэ (T) нар ажиллав.

Бодлогын хүндрэлийн тухай дэлгэрэнгүй мэдээллийг `mmo.mn` сайтаас харах боломжтой. Нийслэл болон бүсд авсан дундаж оноог доор харуулав. Төвийн бүс мэдээгээ форматын дагуу ирүүлээгүй тул оролцогчдын дүнг системд оруулах боломжгүй байлаа. Иймд доорх статистикт төвийн бүсийн дүн ороогүй болно.

| Бодлого | Төрөл | Дэвшүүлсэн | Нийслэл | Бүс |
|---|---|---|---|---|
| D1 | N | Гэрэлхүү | 4.97 | 3.68 |
| D2 | G | Батзориг | 1.95 | 0.25 |
| D3 | A | Базар | 1.17 | 0.23 |
| D4 | C | Батбаясгалан | 2.08 | 1.42 |
| S1 | N | Эрдэнэбаяр | 1.16 | 1.08 |
| S2 | A | Батбаясгалан | 1.06 | 0.42 |
| S3 | C | Батбаясгалан | 0.25 | 0.36 |
| S4 | G | Базар | 0.31 | 0.25 |
| E1 | C | Баярмагнай | 4.54 | 3.04 |
| E2 | N | Эрдэнэбаяр | 3.97 | 2.58 |
| E3 | G | Хулан | 0.17 | 0.00 |
| E4 | G | Нурсолтан | 1.75 | 0.73 |
| E5 | A | Отгонбаяр | 1.11 | 0.56 |
| E6 | C | Баярмагнай | 0.56 | 0.36 |
| F1 | C | Отгонбаяр | 2.39 | 1.39 |
| F2 | N | Эрдэнэбаяр | 1.98 | 1.21 |
| F3 | G | Нурсолтан | 0.73 | 0.00 |
| F4 | G | Нурсолтан | 3.90 | 2.05 |
| F5 | A | Отгонбаяр | 1.76 | 0.39 |
| F6 | C | Баярмагнай | 0.98 | 0.63 |
| T1 | C | Баярмагнай | 5.52 | 4.55 |
| T2 | N | Гэрэлхүү | 4.28 | 3.57 |
| T3 | A | Отгонбаяр | 0.20 | 0.06 |
| T4 | G | Нурсолтан | 3.18 | 1.00 |
| T5 | A | Отгонбаяр | 0.54 | 0.00 |
| T6 | N | Баярмагнай | 0.12 | 0.20 |

# Бодлогууд

## D ангилал (7–8 анги)

**Бодлого D1.** $1! + 2! + \cdots + n!$ нийлбэр бүтэн квадрат болдог бүх натурал $n$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

**Бодлого D2.** $ACB = 90^\circ$ байх $ABC$ тэгш өнцөгт гурвалжны $AC$, $BC$, $AB$ талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан $X$, $Y$, $Z$ гэж тэмдэглэе. $ABC$ гурвалжны гадна талд $AXF$ ба $BYE$ зөв гурвалжнууд байгуулав. $\angle FZE$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого D3.** Тэгээс ялгаатай $a$, $b$, $c$ тоонуудын нийлбэр тэгээс ялгаатай байв. Хэрэв

$$ab + \frac{16}{c}, \qquad bc + \frac{30}{a}, \qquad ca + \frac{28}{b}, \qquad \frac{2}{a+b+c}$$

илэрхийллүүд ижил утга авдаг бол энэ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

**Бодлого D4.** Өгсөн тоог өөрийг нь 5-р үржүүлсэн тоогоор, эсвэл сүүлийн цифрийг нь тайран авч 2-оор үржүүлээд, үлдэх тооноос хассан тоогоор сольж болно. Энд хоёр дахь үйлдлийг зөвхөн үр дүн нь натурал тоо гардаг үед зөвшөөрнө.

Жишээ нь 371-г $5 \cdot 371 = 1855$ эсвэл $37-2 \cdot 1 = 35$ тоогоор сольж болно. Анх 1 гэсэн тоо өгсөн гэе.

(1) Хэдэн удаа үйлдэл хийгээд 26-г гаргаж авч чадна гэж батал.

(2) Яг 2025 удаа үйлдэл хийж 26-г гаргаж авч чадахгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

## S ангилал (Бага ангийн багш)

**Бодлого S1.** $m > n \geq 2$ натурал тоонуудын хувьд $2q^2 = m! - n!$ гэж бичигддэг байх бүх $q$ сондгой анхны тоог ол. Энд $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ үржвэр буюу факториалыг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

**Бодлого S2.** Геологич өдөр бүр тодорхой нэг цагт ажлаа дуусгадаг бөгөөд яг тэр үед нь хээрийн баазаас түүнийг авахаар машин ирдэг. Нэг өдөр геологич яаралтай харихаар шийдэн ажлаа төлөвлөснөөсөө 40 минутын өмнө дуусган машинаа угтан алхжээ. Тэрээр 10 минут алхсаны дараа замд тарсан малчнаас морь авч цааш хоёр дахин илүү хурдаар явж машинтайгаа таарчээ. Хэрвээ геологич ердийн цагаасаа 10 минутын өмнө бааздаа хүрсэн бол суудлын машин геологичоос хэд дахин хурдан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S3.** Аль ч дараалсан гурван цифр нь эрс өсдөг арифметик прогресс үүсгэдэггүй таван оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Энд $b - a = c - b$ үед $a$, $b$, $c$ гурвалыг арифметик прогресс гэдгийг санаа.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S4.** $\angle ACB = 42^\circ$ байх $ABC$ гурвалжны $AC$ тал дээр $D$ цэгийг $BD = DC$ байхаар, $BD$ хэрчим дээр $E$ цэгийг $CE = AB$ байхаар авав. $AB + BE = AC$ байдаг бол $\angle ABC$ өнцгийн хэмжээг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

## E ангилал (9–10 анги)

**Бодлого E1.** $(1, 2, \ldots, 7)$ дарааллын хэдэн ширхэг $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$ сэлгэмлийн хувьд

$$S = 1a_1 + 2a_2 + \cdots + 7a_7$$

нийлбэр сондгой байх вэ? Энд сэлгэмэл гэж өгөгдсөн дарааллын гишүүдийн байрыг дураараа сольж бичсэн дарааллыг хэлнэ. Жишээлбэл $(1, 2, 3)$ дараалал

$$(1,2,3) \qquad (1,3,2) \qquad (2,1,3) \qquad (2,3,1) \qquad (3,1,2) \qquad (3,2,1)$$

гэсэн зургаан сэлгэмэлтэй.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого E2.** Ялгаатай $p$, $q$ анхны тоонуудын хувьд $m! - n! = pq^2$ гэж бичигддэг байх бүх $m > n \geq 2$ натурал тоон хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

**Бодлого E3.** $AB \neq AC$ байх хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны дотор $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектрис дээр $D$ цэг авав. $ADB$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $D$ оройг агуулаагүй $AB$ нум дээр $E$ цэгийг, $ADC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $D$ оройг агуулаагүй $AC$ нум дээр $F$ цэгийг $\angle EAB = \angle FAC$ байхаар авав. $BD$ хэрчмийн дунджад татсан перпендикуляр, $\angle BDE$ өнцгийн биссектристэй $K$ цэгт огтлолцоно. $CD$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр, $\angle CDF$ өнцгийн биссектристэй $L$ цэгт огтлолцоно. $KL$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр шулуун $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектристэй $P$ цэгт огтлолцоно. $\angle KPL + \angle BAF = 180^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого E4.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны $B$ оройн өндрийн суурийг $D$ гээд $C$ оройн өндрийн суурийг $E$ гэе. $D$ цэгийг $B$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгийг $P$ гээд $E$ цэгийг $C$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгийг $Q$ гэе. $APQ$ гурвалжны $A$ оройн өндрийн суурь $H$ бол $\angle AHE = \angle AHD$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого E5.** $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n(a_n + 1)}$$

гэж тодорхойлогдсон дарааллын хувьд $n \geq 5$ бол $2^{n+1} < a_n^2 < 2^{n+2}$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого E6.** 81 нүдтэй $9 \times 9$ хүснэгтийн нүд бүр ядаж нэг хар нүдтэй хөрш байхаар $N$ ширхэг нүдийг хар өнгөөр будав. Будагдаагүй нүд бүр хоёроос цөөнгүй хар нүдтэй хөрш байсан бол $N$ тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Энд ерөнхий цэгтэй хоёр нүдийг (хэвтээ тэнхлэг, босоо тэнхлэг, диагоналийн дагуу) хөрш гэж үзнэ. Жишээлбэл зүүн дээд булангийн нүд гурван хөрштэй.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $n \geq 2$ натурал гэе. $\{1, 2, \ldots, n\}$ олонлогийн ядаж хоёр гишүүнтэй дэд олонлогуудын багаасаа хоёрт жагсах гишүүдийн математик дундаж 4-өөс бага гэж батал.

*Жишээ:* $X$ олонлогийн багаасаа хоёрт жагсах гишүүнийг $fX$ гэж тэмдэглэе.

$n = 3$ үед $\{1, 2, 3\}$ олонлог ядаж хоёр гишүүнтэй дөрвөн дэд олонлогтой ба харгалзан

$$f\{1,2\} = 2, \quad f\{1,3\} = 3, \quad f\{2,3\} = 3, \quad f\{1,2,3\} = 2$$

утга авах тул $f$-ийн математик дундаж $(2+3+3+2)/4 = 2.5 < 4$ байна.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F2.** $n! - n^d$ ялгавар анхны тооны натурал зэрэгт болох бүх натурал тоон $(n, d)$ хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

**Бодлого F3.** $AB < AC$ байх $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ ба $A$ оройгоос буулгасан өндрийн суурь $D$ байг. $AB$, $AC$ талын дундаж цэгүүд харгалзан $M$, $N$ ба ортотөв нь $H$, хүндийн төв нь $G$ байг. $MH$ болон $NH$ цацраг $\omega$ тойргийг харгалзан $P$, $Q$ цэгт огтолно. $MN$, $PQ$ шулуунууд $R$ цэгт огтлолцох ба $\omega$ тойрог дээр $A$ цэгээс ялгаатай $T$ цэгийг $RA = RT$ байхаар авав. $BMT$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $CNT$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой дахин $S$ цэгээр огтлолцох бол $DG$ шулуун $S$ цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого F4.** Элдэв талт $ABC$ гурвалжны $B$ оройн өндрийн суурь $E$, $C$ оройн өндрийн суурь $F$, орто төв $H$ байг. $BE$ шулуун дээр $M$ цэгийг $MA = MH$, $CF$ шулуун дээр $N$ цэгийг $NA = NH$ байхаар авав. $M$ цэг дээр төвтэй $MA$ радиустай тойрог $CF$ шулуунтай $H$ цэгээс ялгаатай $P$ цэгээр, $N$ цэг дээр төвтэй $NA$ радиустай тойрог $BE$ шулуунтай $H$ цэгээс ялгаатай $Q$ цэгээр огтлолцдог бол $H$ цэгийг $APQ$ гурвалжинд багтсан тойргийн төв гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого F5.** $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{2a_n(a_n+1)} \rfloor$ байдаг дараалал болон $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$ ба $n \geq 3$ үед $b_{n+1} = b_n + b_{n-2}$ байдаг дарааллыг авч үзье. Дурын $n \geq 1$ хувьд $b_n \geq a_n$ байна гэж батал.

Энд $x$ тооноос хэтэрдэггүй хамгийн их бүхэл тоог $\lfloor x \rfloor$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F6.** $n \geq 1$ гэе. $N$ ширхэг нүдэнд нь 1, бусад нүдэнд нь 0 бичигдсэн $9n^2$ нүдтэй $3n \times 3n$ хүснэгт байв. Нүд бүр дэх тоон дээр хөрш нүднүүд дэх бүх тоог нэмсэн нийлбэр хоёроос багагүй байв. $N$ тооны боломжит хамгийн бага утгыг ол.

Энд ерөнхий цэгтэй хоёр нүдийг (хэвтээ тэнхлэг, босоо тэнхлэг, диагоналийн дагуу) хөрш гэж үзнэ. Жишээлбэл зүүн дээд булангийн нүд гурван хөрштэй байна.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

## Т ангилал (Багш)

**Бодлого T1.** 1, 2, ..., 10 тоонуудын $a_1$, $a_2$, ..., $a_{10}$ сэлгэмлийн хувьд

$$S = 1a_1 + 2a_2 + \cdots + 10a_{10}$$

нийлбэрийг авч үзье. $S$ нийлбэр тэгш байх сэлгэмлийн тоо нь $S$ нийлбэр сондгой байх сэлгэмлийн тоотой тэнцүү гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого T2.** $1!+2!+\cdots+n!$ нийлбэр натурал тооны хоёр эсвэл түүнээс их натурал зэрэгт болдог байх бүх натурал $n$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

**Бодлого T3.** Дурын $n$ натурал тооны хувьд

$$3^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{n-\frac{1}{2}} < \sum_{k=1}^{n} 2^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{k}\binom{n}{k} < 3^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{n}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого T4.** $AB < AC$ байх $ABC$ гурвалжны дотор орших $P$ цэгээс $ABC$ гурвалжны $A$ оройн дотоод биссектрис руу буулгасан перпендикуляр шулуун $AB$ шулууныг $D$ цэгээр, $AC$ шулууныг $E$ цэгээр огтолдог байв. $BDP$ гурвалжныг багтаасан тойрог $CEP$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин $Q$ цэгт огтолдог бол $PQ$ шулуун $P$ цэгийн сонголтоос үл хамааран ямагт нэг цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

**Бодлого T5.** Бодит тоонуудаас тогтох $2 \times 2$ хэмжээтэй матрицын $(A, B, C)$ гурвалыг

$$\begin{cases} A^2 = AB + I \\ B^2 = BC + I \\ C^2 = CA + I \end{cases}$$

систем тэгшитгэлийг хангадаг бол *сайн* гэе. Энд $I$ нэгж матриц.

(1) Сайн гурвал төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

(2) Рационал тоонуудаас тогтох сайн гурвал олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого T6.** $n \geq 2$ гэе. $\overbrace{11\ldots1}^{n}$ тоонд хуваагдах $62n$-ээс хэтрэхгүй оронтой бүх тоог залгуулан бичихэд үүсэх тоонд 1 ба 2 цифрүүд ижил тоотой орохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

# Бодолтууд

## D ангилал (7–8 анги)

**Бодлого D1.** $1! + 2! + \cdots + n!$ нийлбэр бүтэн квадрат болдог бүх натурал $n$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

*Бодолт.* Хариу: $n = 1, 3$.

$!n = 1! + \cdots + n!$ гэж тэмдэглэе. $!1 = 1 = 1^2$, $!2 = 3$, $!3 = 9 = 3^2$, $!4 = 33$ тул $1 \le n \le 4$ үед $n = 1, 3$ гэсэн хоёр шийдтэй. $n \ge 5$ үед $!n \equiv !4 \equiv 3 \pmod 5$ ба $m^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ тул шийдгүй.

Жич: энд $10$ модулиар жиших буюу нэгжийн орны цифрийг харах замаар шийдгүй гэж хэлж болно: $n \ge 4$ үед $!n$ нийлбэр 3-аар төгсөх ба 3-аар төгсөх бүтэн квадрат байхгүй.

**Бодлого D2.** $ACB = 90^\circ$ байх $ABC$ тэгш өнцөгт гурвалжны $AC$, $BC$, $AB$ талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан $X$, $Y$, $Z$ гэж тэмдэглэе. $ABC$ гурвалжны гадна талд $AXF$ ба $BYE$ зөв гурвалжнууд байгуулав. $\angle FZE$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

*Бодолт.* Хариу: $120^\circ$.

$\angle ACB = 90^\circ$ ба $X, Y, Z$ дундаж цэгүүд тул $XZYC$ тэгш өнцөгт болно. Эндээс, $AXF$ ба $BYE$ зөв гурвалжнууд тул $FX = YZ$, $XZ = YF$ болно. Нөгөө талаас, $\angle FXZ = \ EYZ = 150^\circ$ тул ТӨТ шинжээр $\triangle FXZ = \triangle EYZ$. Иймд

$$\angle FZE = 90^\circ + \angle FZX + \angle EZY = 120^\circ.$$

**Бодлого D3.** Тэгээс ялгаатай $a$, $b$, $c$ тоонуудын нийлбэр тэгээс ялгаатай байв. Хэрэв

$$ab + \frac{16}{c}, \qquad bc + \frac{30}{a}, \qquad ca + \frac{28}{b}, \qquad \frac{2}{a+b+c}$$

илэрхийллүүд ижил утга авдаг бол энэ утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

*Бодолт.* Хариу: 2.

Ерөнхий утгыг $X$ гэвэл

$$2 = (a+b+c)X = a\left(bc + \frac{30}{a}\right) + b\left(ca + \frac{28}{b}\right) + c\left(ab + \frac{16}{c}\right) = 3abc + 74$$

гэдгээс $abc = -24$ байна. Эндээс

$$X^3 = \left(ab + \frac{16}{c}\right)\left(bc + \frac{30}{a}\right)\left(ca + \frac{28}{b}\right) = \frac{-8}{c} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{4}{b} = 8 \cdot \frac{-24}{abc} = 8$$

болох тул $X = 2$ байна. (Энд $(a, b, c) = (3, 2, -4)$ байна.)

**Бодлого D4.** Өгсөн тоог өөрийг нь 5-р үржүүлсэн тоогоор, эсвэл сүүлийн цифрийг нь тайран авч 2-оор үржүүлээд, үлдэх тооноос хассан тоогоор сольж болно. Энд хоёр дахь үйлдлийг зөвхөн үр дүн нь натурал тоо гардаг үед зөвшөөрнө.

Жишээ нь 371-г $5 \cdot 371 = 1855$ эсвэл $37{-}2 \cdot 1 = 35$ тоогоор сольж болно. Анх 1 гэсэн тоо өгсөн гэе.

(1) Хэдэн удаа үйлдэл хийгээд 26-г гаргаж авч чадна гэж батал.

(2) Яг 2025 удаа үйлдэл хийж 26-г гаргаж авч чадахгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.*

(1) $1 \cdot 5^5 = 3125,\ \ 312 - 2 \cdot 5 = 302,\ \ 30 - 2 \cdot 2 = 26$ тул 7 үйлдлээр гаргаж авч чадна.

(2) $a_0 = 1$ гээд $n$ үйлдлийн дараа $a_n$ гарсан гэе.

$5(10a+b) \equiv a-2b \pmod 7$ тул $a_{n+1} \equiv 5a_n \pmod 7$ байна. Тухайлбал дурын $n$ хувьд $a_n \equiv 5^n \pmod 7$ байна. Одоо $5^3 = 125 \equiv -1 \pmod 7$ гэдгээс $a_{2025} \equiv 5^{2025} \equiv (-1)^{675} \equiv -1 \pmod 7$ ба $26 \equiv 5 \pmod 7$ тул яг 2025 үйлдлээр 26-г гаргах боломжгүй. (Энэ бодолтоос 26-г 7-оос цөөн үйлдлээр гаргах боломжгүй болох нь харагдана)

## S ангилал (Бага ангийн багш)

**Бодлого S1.** $m > n \geq 2$ натурал тоонуудын хувьд $2q^2 = m! - n!$ гэж бичигддэг байх бүх $q$ сондгой анхны тоог ол. Энд $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ үржвэр буюу факториалыг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* Хариу: $q = 3$.

$m > n$ тул $n! \mid 2q^2$ байна. $q$ сондгой гэдгээс $4 \nmid 2q^2$ ба $n \geq 4$ үед $8 \mid n!$ тул $n < 4$ байна. Мөн $m! \geq 2! + 2 \cdot 3^2 = 20$ гэдгээс $m \geq 4$ байна.

$n = 2$ үед $2(1 + q^2) = m!$ шийдгүй гэж хоёр аргаар харуулъя.

(i) $q^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ гэдгээс $2(1 + q^2)$ тоо 3-т хуваагдахгүй ба $m \geq 3$ үед $3 \mid m!$ тул шийдгүй.

(ii) $q = 2k + 1$ гэвэл $2(1 + q^2) = 4(1 + 2k(k + 1))$ тоо 8-д хуваагдахгүй ба $m \geq 4$ үед $8 \mid m!$ тул шийдгүй.

$n = 3$ үед $6 \mid 2q^2$ гэдгээс $q = 3$ байна. $2 \cdot 3^2 = 4! - 3!$ гэдгээс $q = 3$ шийд болно.

**Бодлого S2.** Геологич өдөр бүр тодорхой нэг цагт ажлаа дуусгадаг бөгөөд яг тэр үед нь хээрийн баазаас түүнийг авахаар машин ирдэг. Нэг өдөр геологич яаралтай харихаар шийдэн ажлаа төлөвлөснөөсөө 40 минутын өмнө дуусган машинаа угтан алхжээ. Тэрээр 10 минут алхсаны дараа замд тарсан малчнаас морь авч цааш хоёр дахин илүү хурдаар явж машинтайгаа таарчээ. Хэрвээ геологич ердийн цагаасаа 10 минутын өмнө баздаа хүрсэн бол суудлын машин геологичоос хэд дахин хурдан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Хариу: 12.

1. *Машины хэмнэсэн хугацааг олох:* Машин баазад ердийн ирдэг цагаасаа 10 минутын өмнө ирсэн. Энэ нь машин уулзсан цэгээс ердийн уулзах ёстой байсан цэг хүртэл яваад, буцаж ирэхэд зарцуулах байсан хугацааг хэмнэсэн гэсэн үг юм. Машины хэмнэсэн хугацааг $\Delta t_m$ гэвэл: $\Delta t_m = 10\,\text{мин}$.

   Машин нэг талдаа (уулзах цэгээс ердийн уулзах цэг хүртэл) хэмнэсэн хугацааг $t$ гэвэл:

   $$t = \frac{10}{2} = 5\,\text{мин}$$

   Энэ нь машин ердийн уулзах ёстой байсан цагаас ($T$) яг 5 минутын өмнө геологичтой уулзсан гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл, уулзсан цаг нь $T - 5$ юм.

2. *Геологичийн хөдөлгөөнд зарцуулсан нийт хугацаа:* Геологич ажлаа 40 минутын өмнө буюу $T - 40$ цагт дуусгаад хөдөлсөн. Тэрээр $T - 5$ цагт машинд суусан тул нийт зарцуулсан хугацаа $t_{\text{н}}$ нь:

   $$t_{\text{н}} = (T - 5) - (T - 40) = 35\,\text{мин}$$

3. *Геологичийн хөдөлгөөнийг задлах:* Явган алхсан хугацаа: $t_1 = 10\,\text{мин}$. Мориор явсан хугацаа: $t_2 = 35 - 10 = 25\,\text{мин}$. Геологичийн алхах хурдыг $v$, морины хурдыг $2v$ гэе. Түүний туулсан нийт замыг $S$ гэвэл:

   $$S = v \cdot t_1 + 2v \cdot t_2 = v \cdot 10 + 2v \cdot 25 = 10v + 50v = 60v$$

4. *Хурдны харьцааг олох:* Геологичийн туулсан энэхүү $S$ зам нь машины ердийн уулзах цэг хүртэл явах байсан 5 минутын замтай тэнцүү юм. Машины хурдыг $V$ гэвэл:

$$V \cdot 5 = 60v$$

Эндээс машины хурд геологичийн алхах хурднаас хэд дахин их болохыг олбол:

$$\frac{V}{v} = \frac{60}{5} = 12$$

байна.

**Бодлого S3.** Аль ч дараалсан гурван цифр нь эрс өсдөг арифметик прогресс үүсгэдэггүй таван оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Энд $b - a = c - b$ үед $a$, $b$, $c$ гурвалыг арифметик прогресс гэдгийг саная.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Хариу: 85006.

1, 2, 3-р цифрийг $A$ байрлал, 2, 3, 4-р цифрийг $B$ байрлал, 3, 4, 5-р цифрийг $C$ байрлал гэе.

Гурван натурал тоо өсдөг арифметик прогресс үүсгэх нөхцөл нь эхний ба сүүлийн тоонууд нь тэгш сондгойгоороо адилхан бөгөөд сүүлийн тоо нь их байна (энэ үед голын тоог эхний болон сүүлийн тоонуудын дунджаар авна). Иймд $A$ байрлалд арифметик прогресс үүсгэх 3 тоо байрлуулах боломжийн тоо $C_4^2 + C_5^2 = 6 + 10 = 16$ тул нийт $16 \cdot 10 \cdot 10 = 1600$ боломжтой, $B$, $C$ байрлалуудад арифметик прогресс үүсгэх 3 тоо байрлах боломжийн тоо $2C_5^2 = 20$ тул тус бүр нийт $20 \cdot 9 \cdot 10 = 1800$ боломжтой.

$A$ ба $B$ байрлалд арифметик прогресс гэвэл 4 урттай арифметик прогресс болно. Эдгээр нь $d = 1$ үед $1, 2, 3, 4$; $2, 3, 4, 5$; ..., $6, 7, 8, 9$; $d = 2$ үед $1, 3, 5, 7$; $2, 4, 6, 8$, $3, 5, 7, 9$ тул нийт $9 \cdot 10 = 90$.

$A$ ба $C$ байрлалд арифметик прогресс гэвэл 1,3,5 дахь цифрүүд тэгш сондгойгоороо ижил, өсдөг дараалал байна. Иймд $C_4^3 + C_5^3 = 14$.

$B$ ба $C$ байрлалд арифметик прогресс гэвэл 4 урттай арифметик прогресс болно. Эдгээр нь $d = 1$ үед $0, 1, 2, 3$; $1, 2, 3, 4$; ..., $6, 7, 8, 9$; $d = 2$ үед $0, 2, 4, 8$; $1, 3, 5, 7$; $2, 4, 6, 8$; $3, 5, 7, 9$; $d = 3$ үед $0, 3, 6, 9$ тул нийт $12 \cdot 9 = 108$.

$A$, $B$, $C$-д арифметик прогресс гэвэл 5 урттай арифметик прогресс болно. $d = 1$ үед $1, 2, 3, 4, 5$; $2, 3, 4, 5, 6$; ..., $5, 6, 7, 8, 9$; $d = 2$ үед $1, 3, 5, 7, 9$ буюу 6 боломжтой. Иймд ядаж нэг байрлалд өсдөг арифметик прогресстой тоо

$$1600 + 1800 + 1800 - 90 - 14 - 108 + 6 = 4994$$

Нийт 5 оронтой тоо 90000 тул $90000 - 4994 = 85006$ тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

**Бодлого S4.** $\angle ACB = 42^\circ$ байх $ABC$ гурвалжны $AC$ тал дээр $D$ цэгийг $BD = DC$ байхаар, $BD$ хэрчим дээр $E$ цэгийг $CE = AB$ байхаар авав. $AB + BE = AC$ байдаг бол $\angle ABC$ өнцгийн хэмжээг ол.

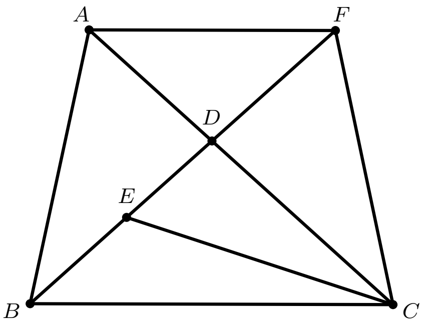
(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

*Бодолт.* Хариу: $78^\circ$.

*I бодолт:* $ED$ цацраг дээр $EF = EC$ байх $F$ цэг авъя. Тэгвэл $ABC$ болон $FCB$ гурвалжны хувьд бодлогын нөхцөлөөс $BD = DC$ буюу $\angle FBC = \angle ACB$ мөн

$$BF = BE + EF = BE + EC = BE + AB = AC$$

тул ТӨТ-ын шинжүүрээр $ABC = FCB$ болно. Эндээс $FC = AB$ цаашлаад $FC = CE = CF$ буюу $EFC$ гурвалжин зөв гурвалжин болно. Эндээс $\angle BAC = \angle CFB = 60^\circ$ болох тул $\angle ABC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CAB = 180^\circ - 42^\circ - 60^\circ = 78^\circ$ байна.



*II бодолт:* $CD$ тал дээр $DK = DE$ байх K цэг авъя. Тэгвэл бодлогын нөхцөлөөс $AK = AB$ буюу $\angle AKB = \angle ABK$ мөн $KE \parallel BC$ болно.

Эндээс $EC = KB$ болох тул $AKB$ зөв гурвалжин болно. Мөн $KE \parallel BC$ гэдгээс $\angle AKB = 60^\circ - 42^\circ = 18^\circ = \angle KBC$ ба $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = 60^\circ + 18^\circ = 78^\circ$ байна.

## E ангилал (9–10 анги)

**Бодлого E1.** $(1, 2, \ldots, 7)$ дараалын хэдэн ширхэг $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$ сэлгэмлийн хувьд

$$S = 1a_1 + 2a_2 + \cdots + 7a_7$$

нийлбэр сондгой байх вэ? Энд сэлгэмэл гэж өгөгдсөн дараалын гишүүдийн байрыг дураараа сольж бичсэн дараалыг хэлнэ. Жишээлбэл $(1, 2, 3)$ дараалал

$$(1,2,3) \qquad (1,3,2) \qquad (2,1,3) \qquad (2,3,1) \qquad (3,1,2) \qquad (3,2,1)$$

гэсэн зургаан сэлгэмэлтэй.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: $2304$.

$O = \{1, 3, 5, 7\}$, $E = \{2, 4, 6\}$ гэе. $(a_i)$ сэлгэмлийн хувьд $q = |\{i \in O \,|\, a_i \in O\}|$ гэвэл $S \equiv q \pmod 2$ байх нь илт. Бэхлэгдсэн $q$-ийн хувьд $O$ дотроос $q$ байрлал, $E$ дотроос $|O| - q$ байрлал сонгоод $O$ гишүүдийг сэлгэн байрлуулж, үлдсэн байрлалд $E$-ийн гишүүдийг сэлгэн байрлуулахад болно. Иймд $q = 1$ байх сэлгэмлийн тоо $\binom{O}{1}\binom{E}{3}|O|!|E|! = 576$ ба $q = 3$ байх сэлгэмлийн тоо $\binom{O}{3}\binom{E}{1}|O|!|E|! = 1728$ байх тул $S$ сондгой байх сэлгэмлийн тоо $2304$ байна.

**Бодлого E2.** Ялгаатай $p$, $q$ анхны тоонуудын хувьд $m! - n! = pq^2$ гэж бичигддэг байх бүх $m > n \geq 2$ натурал тоон хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* Хариу: $(m, n) = (4, 3)$.

*I бодолт:* $n! \mid pq^2$ ба $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ гэдгээс $2 \leq n \leq 4$ байна.

$n = 2$ гэе. $2 \mid pq^2$ гэдгээс $p = 2$ эсвэл $q = 2$ байна. $p = 2$ үед $2(1 + q^2) \equiv 0 \pmod 3$ болж зөрчил гарна. $q = 2$ үед $m = 3$ нөхцөл хангахгүй ба $m \geq 4$ үед $2 + 4p \equiv 0 \pmod 4$ болж зөрчил гарна.

$n = 3$, $4$ үед $6 \mid pq^2$ гэдгээс $\{p, q\} = \{2, 3\}$ байна. $3! + 18 = 4!$ ба $4! + 18 < 5!$ гэдгээс өөр шийдгүй.

*II бодолт:* $n! \cdot \left(\dfrac{m!}{n!} - 1\right) = pq^2$ гэж бичье.

(i) $n \geq 2$ тул $n! \neq 1$.

(ii) $n! = p$ эсвэл $n! = q$ бол $n = 2$ байна. Энэ хэсэг I бодолтын $n = 2$ тохиолдолтой ижил.

(iii) $n! = pq$ үед $n = 3$ гэсэн ганц боломжтой. Энэ үед $\{p, q\} = \{2, 3\}$ ба $m! = 6(q + 1)$ байна. Эндээс $q = 2$ боломжгүй ба $q = 3$ үед $m = 4$ шийд болно.

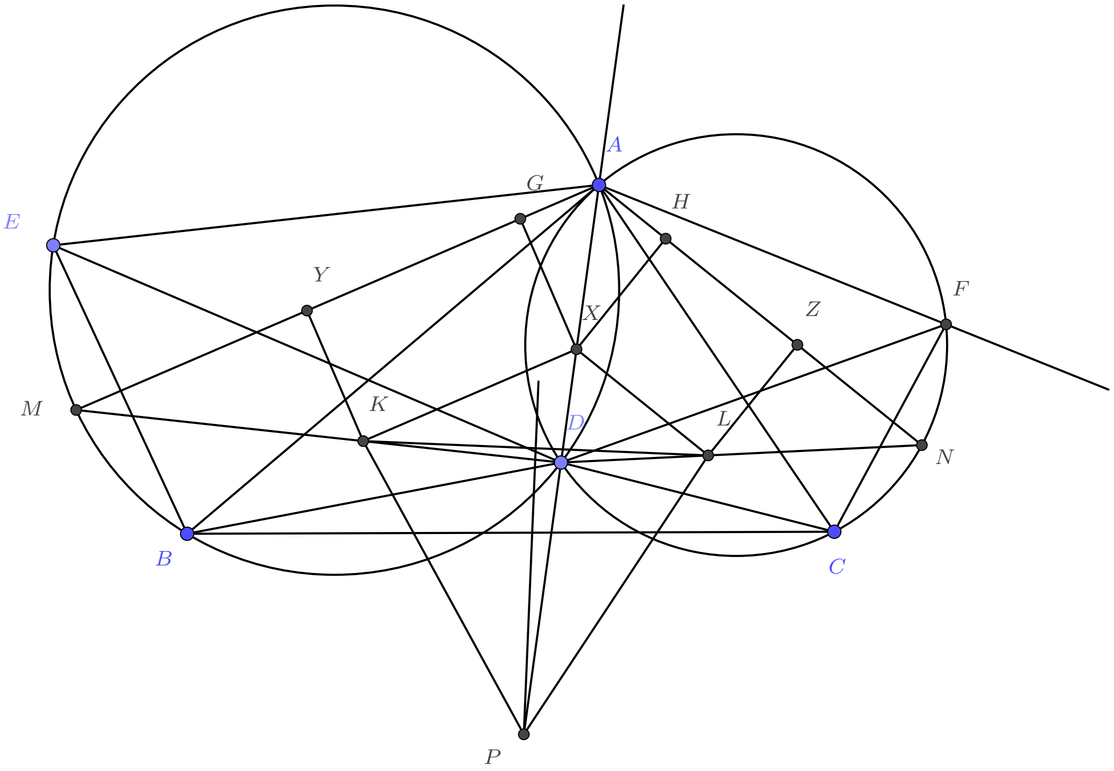
(iv) $n! = q^2$ байх боломжгүй. Учир нь $n \geq 4$ үед $2^3 \mid n!$ ба $n \leq 3$ үед иим хэлбэргүй.

(v) $n! = pq^2$ байх боломжгүй. Учир нь $n \geq 4$ үед $2^3 \mid n!$ ба $n \leq 3$ үед иим хэлбэргүй.

**Бодлого E3.** $AB \neq AC$ байх хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны дотор $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектрис дээр $D$ цэг авав. $ADB$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $D$ оройг агуулаагүй $AB$ нум дээр $E$ цэгийг, $ADC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $D$ оройг агуулаагүй $AC$ нум дээр $F$ цэгийг $\angle EAB = \angle FAC$ байхаар авав. $BD$ хэрчмийн дунджад татсан перпендикуляр, $\angle BDE$ өнцгийн биссектристэй $K$ цэгт огтлолцоно. $CD$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр, $\angle CDF$ өнцгийн биссектристэй $L$ цэгт огтлолцоно. $KL$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр шулуун $\angle BAC$ өнцгийн дотоод биссектристэй $P$ цэгт огтлолцоно. $\angle KPL + \angle BAF = 180^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

*Бодолт.*



$ADB$, $ADC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус $R_1$, $R_2$ байг. $BE$ жижиг нумын дунджийг $M$, $CF$ жижиг нумын дунджийг $N$ гэе. $K$ цэгийг дайрсан $AM$-тэй параллел шулуун, $L$ цэгийг дайрсан $AN$-тэй параллел шулуунтай $X$ цэгт огтлолцдог гэе. $K$, $X$ цэгээс $AM$ рүү буусан перпендикулярын суурийг $Y$, $G$ гэе. $L$, $X$ цэгээс $AN$ рүү буусан перпендикулярын суурийг $Z$, $H$ гэе. Тэгвэл

$$YK = MK \cdot \sin \angle KMY = MK \cdot \frac{AD}{2R_1}$$

$$LZ = NL \cdot \sin \angle LNZ = NL \cdot \frac{AD}{2R_2}$$

болох ба энэ 2 тэнцэлийн ноогдворыг авбал

$$\frac{YK}{LZ} = \frac{MK}{LN} \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

болно. $\angle BDM = \frac{1}{2}\angle EAB = \frac{1}{2}\angle FAC = \angle CDN$ ба $\angle BMD = \angle BAD = \angle DAC = \angle DNC$ гэдгийг тооцвол $\triangle BDM \sim \triangle CDN$ гэж мөрдөнө. Эндээс төсөөгийн харьцаа бичвэл

$$\frac{MK}{LN} = \frac{MD}{ND} = \frac{R_1}{R_2}$$

болох ба үүнийг дээр орлуулбал

$$\frac{YK}{LZ} = \frac{MK}{LN} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = 1$$

болж

$$KY = XG = XH = LZ$$

гэж мөрдөнө. Иймд $X \in AP$ байна.

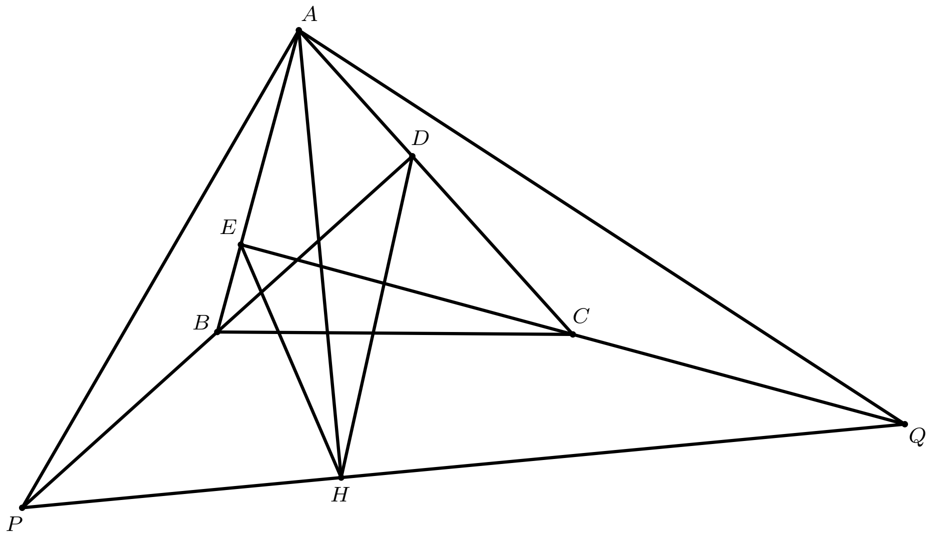
$\angle KXP = \angle LXP$ байна. $KXL$-ийн биссектрис $(KXL)$-г дахин $P'$-д огтолдог гэвэл $P'K = P'L$ болно. Иймд $P'$ цэг $KL$-ийн дунджад татсан перпендикуляр дээр орших болж $P \equiv P'$ гэж гарна.

Иймд $KXLP$ тойрогт багтана. Эндээс $\angle KPL + \angle KXL = 180^\circ = \angle KPL + \angle MAN = \angle KPL + \angle BAF$ болж батлагдав.

**Бодлого E4.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжны $B$ оройн өндрийн суурийг $D$ гээд $C$ оройн өндрийн суурийг $E$ гэе. $D$ цэгийг $B$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгийг $P$ гээд $E$ цэгийг $C$ цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах цэгийг $Q$ гэе. $APQ$ гурвалжны $A$ оройн өндрийн суурь $H$ бол $\angle AHE = \angle AHD$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.*



Бодлогын нөхцөлөөс $BD$ болон $CE$ нь $ABC$ гурвалжны өндөр, $AH$ нь $APQ$ гурвалжны өдөр тул

$$\angle ADP = \angle AHP = 90^\circ = \angle AHQ = \angle AEQ$$

буюу $ADHP$ болон $AEHQ$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтах болно (1). $\angle BAD = \angle CAE$ бөгөөд $\angle ADB = 90^\circ = \angle AEC$ гэдгээс $ABD$, $ACE$ гурвалжнууд төсөөтэй. Эндээс

$$\angle ABP = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - \angle ACE = \angle ACQ$$

болох ба

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

тул $ABP$ болон $ACQ$ гурвалжнууд төсөөтэй ба (1)-ээс $\angle EHA = \angle AQE = \angle APD = \angle AHD$ болж батлагдав.

**Бодлого E5.** $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n(a_n + 1)}$$

гэж тодорхойлогдсон дарааллын хувьд $n \geq 5$ бол $2^{n+1} < a_n^2 < 2^{n+2}$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Доод заагийг баталъя. $a_1 = 1$ ба $a_{n+1}^2 = 2(a_n^2 + a_n)$ гэдгээс $a_2^2 = 2(1+1) = 4$, $a_3^2 = 2(4+2) = 12 > 3^2$, $a_4^2 > 2(12+3) = 30 > 5^2$, $a_5^2 > 2(30+5) = 70 > 2^6$ байна. Цаашилбал $n \geq 5$ үед

$$a_{n+1}^2 > 2a_n^2 > \cdots > 2^{n-4}a_5^2 > 2^{n+2}$$

байна. Дээд заагийг баталъя. $\lambda = 1 + 1/\sqrt{2}$ гэе.

$n \geq 1$ хувьд $a_{n+1} < \sqrt{2a_n(a_n+1) + 1/2} = \sqrt{2}a_n + 1/\sqrt{2}$ гэдгээс

$$a_{n+1} + \lambda < \sqrt{2}a_n + 1/\sqrt{2} + \lambda = \sqrt{2}(a_n + \lambda) < \cdots < \sqrt{2}^n(a_1 + \lambda)$$

байна. Энд $a_1 + \lambda = 2 + 1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ тул $a_{n+1} < \sqrt{2}^{n+3}$ болно.

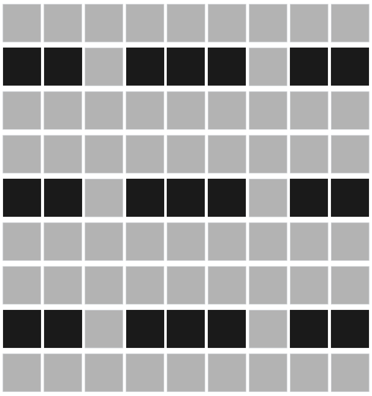
**Бодлого E6.** 81 нүдтэй $9 \times 9$ хүснэгтийн нүд бүр ядаж нэг хар нүдтэй хөрш байхаар $N$ ширхэг нүдийг хар өнгөөр будав. Будагдаагүй нүд бүр хоёроос цөөнгүй хар нүдтэй хөрш байсан бол $N$ тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Энд ерөнхий цэгтэй хоёр нүдийг (хэвтээ тэнхлэг, босоо тэнхлэг, диагоналийн дагуу) хөрш гэж үзнэ. Жишээлбэл зүүн дээд булангийн нүд гурван хөрштэй.

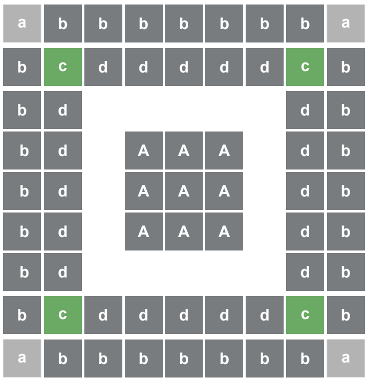
(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: 21.

Шаардлагыг биелүүлсэн байхаар 21 нүдийг хар өнгөөр хэрхэн будахыг доорх зурагт үзүүлэв.



Одоо шаардлагыг биелүүлсэн байхаар 21-с цөөн нүд будах боломжгүйг харуулъя.



| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | b | b | b | b | b | b | a |
| b | c | d | d | d | d | d | c | b |
| b | d | | | | | | d | b |
| b | d | | A | A | A | | d | b |
| b | d | | A | A | A | | d | b |
| b | d | | A | A | A | | d | b |
| b | d | | | | | | d | b |
| b | c | d | d | d | d | d | c | b |
| a | b | b | b | b | b | b | b | a |

Дээрх зурагт үзүүлсэн $b$ үсэгтэй нүднүүдтэй хөрш хар нүдний тоог $N$ гэе. Тэдгээр хар хөршүүд $a$, $b$, $c$, $d$ үсэгтэй нүднүүдээс өөр нүдэнд байх боломжгүй. $a$, $b$, $c$, $d$ үсэгтэй хар нүдний тоог харгалзан $x_a$, $x_b$, $x_c$, $x_d$ гэвэл $4 \geq x_a, x_c$ ба $x_a + x_b + x_c + x_d = N$ байна. $b$ үсэгтэй нүднүүдийн хар хөршийн тоонуудын нийлбэрийг $S$ гэе. Тэгвэл $S \geq 2 \times (28 - x_b) + x_b$. Хэрэв $a$ эсвэл $b$ үсэгтэй нүд будагдсан бол 2 удаа $S$-д тоологдоно, харин $d$ үсэгтэй нүд будагдсан бол 3 удаа, $c$ үсэгтэй нүд будагдсан бол 4 удаа $S$-д тоологдох тул $2x_a + 2x_b + 4x_c + 3x_d \geq S$. Эндээс

$$3N \geq 56 + x_a - x_c$$

тул $N \geq 52/3$ буюу $N \geq 18$ болно.

Түүнчлэн $A$ үсэгтэй аль ч нүдний хар хөрш $N$-д тооцогдохгүй. Хүснэгтийн төвийн $A$ үсэгтэй нүд 2 хар хөрштэй байх ба 4 булангийн $A$ үсэгтэй нүднүүд нэгэн зэрэг тэр 2 хар нүдтэй хөрш байх боломжгүй. Иймд шаардлагыг биелүүлсэн байхаар хамгийн цөөндөө $N + 3$ нүд будах хэрэгтэй.

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $n \geq 2$ натурал гэе. $\{1, 2, \ldots, n\}$ олонлогийн ядаж хоёр гишүүнтэй дэд олонлогуудын багаасаа хоёрт жагсах гишүүдийн математик дундаж 4-өөс бага гэж батал.

*Жишээ:* $X$ олонлогийн багаасаа хоёрт жагсах гишүүнийг $fX$ гэж тэмдэглэе.

$n = 3$ үед $\{1, 2, 3\}$ олонлог ядаж хоёр гишүүнтэй дөрвөн дэд олонлогтой ба харгалзан

$$f\{1,2\} = 2, \quad f\{1,3\} = 3, \quad f\{2,3\} = 3, \quad f\{1,2,3\} = 2$$

утга авах тул $f$-ийн математик дундаж $(2+3+3+2)/4 = 2.5 < 4$ байна.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Нийт $2^n$ дэд олонлог байгаа ба тэг гишүүнтэй 1, нэг гишүүнтэй $n$ дэд олонлог байх тул ядаж хоёр гишүүнтэй $2^n - (n+1)$ дэд олонлог байна.

$2 \leq k \leq n$ хувьд $fX = k$ байх $X$ дэд олонлогийн тоо $(k-1)2^{n-k}$ байна. Учир нь $k$-аас эрс бага яг нэг гишүүн байгаа ба $k$-аас эрс их хэдэн ч гишүүн байж болно.

Одоо $\sum\limits_{|X| \geq 2} fX = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)2^{n-k} = 2^{n+2} - (n^2 + 3n + 4)$ болохыг индукцээр баталъя.

$n = 2$ үед $2(2-1)2^{2-2} = 2 = 2^{2+2} - (2^2 + 3 \cdot 2 + 4)$ үнэн. Нийлбэрийг $S_n$ гэвэл $S_{n+1} = 2S_n + (n+1)n = 2(2^{n+2} - (n^2+3n+4)) + (n+1)n = 2^{n+3} - (n^2+5n+8) = 2^{n+3} - ((n+1)^2 + 3(n+1) + 4)$ үнэн.

Иймд $f$-ийн математик дундаж

$$\mathrm{E}_n f = \frac{2^{n+2} - (n^2 + 3n + 4)}{2^n - (n+1)} = 4 - \frac{n(n-1)}{2^n - (n+1)} < 4$$

байна.

**Бодлого F2.** $n! - n^d$ ялгавар анхны тооны натурал зэрэгт болох бүх натурал тоон $(n, d)$ хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* Хариу: $(n, d) = (3, 1), (4, 2)$.

$3! - 3^1 = 3^1$, $4! - 4^2 = 2^3$ шийдүүд болох ба $n \leq 4$ үед өөр шийдгүйг шалгах амархан. $n \geq 5$ үед шийдгүй гэж харуулъя.

$n! = n^d + p^m$ гэе. $1 < n \mid n! - n^d = p^m$ гэдгээс $n = p^k$, $1 \leq k \leq m$ хэлбэртэй байна. Иймд $n! = p^\alpha(p^\beta + 1)$ гэж бичиж болно. Энд $p - 1 \mid n! = p^\alpha(p^\beta + 1)$ гэдгээс $p - 1 \mid 2$ байх тул $p = 2$, 3 байх боломжтой.

$p = 2$ үед $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$ гэдгээс $3 \cdot 5 \nmid 2^\alpha(2^\beta + 1) = n!$ байна. Иймд $n \leq 4$ байна.

$p = 3$ үед $3^2 \equiv 1 \pmod 8$ гэдгээс $2 \cdot 4 \nmid 3^\alpha(3^\beta + 1) = n!$ байна. Иймд $n \leq 3$ байна.

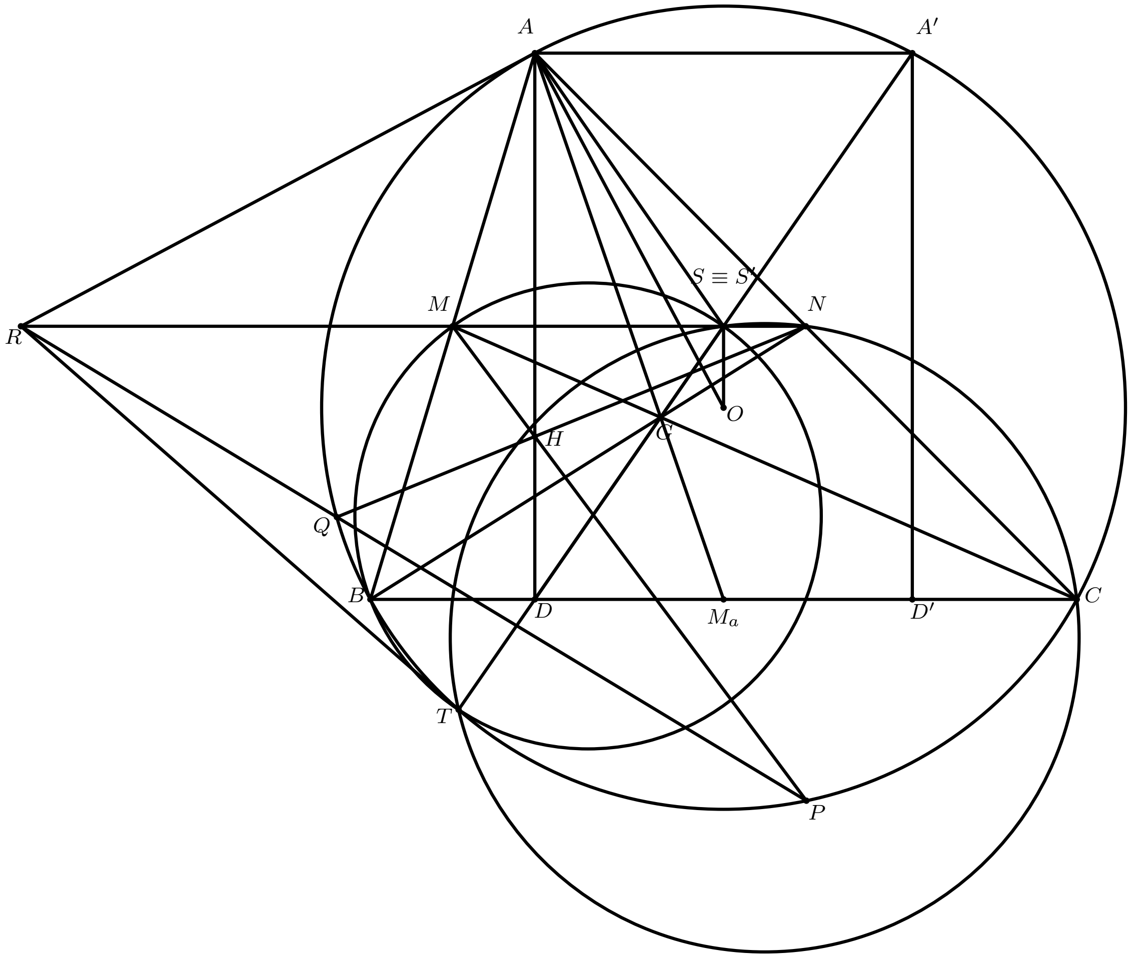
**Бодлого F3.** $AB < AC$ байх $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ ба $A$ оройгоос буулгасан өндрийн суурь $D$ байг. $AB$, $AC$ талын дундаж цэгүүд харгалзан $M$, $N$ ба ортотөв нь $H$, хүндийн төв нь $G$ байг. $MH$ болон $NH$ цацраг $\omega$ тойргийг харгалзан $P$, $Q$ цэгт огтолно. $MN$, $PQ$ шулуунууд $R$ цэгт огтлолцох ба $\omega$ тойрог дээр $A$ цэгээс ялгаатай $T$ цэгийг $RA = RT$ байхаар авав. $BMT$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $CNT$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой дахин $S$ цэгээр огтлолцох бол $DG$ шулуун $S$ цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.* $A, B, C$ оройн өндрүүдийг харгалзан $H_a$, $H_b$, $H_c$ гэвэл (Энд $H_a \equiv D$) $AH_aH_bB$, $BH_bH_cC$, $CH_cH_aA$ дөрвөн өнцөгтүүд нэг тойрог болох ба радикал төв нь $H$ гэдгээс

$$AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$$

тул $H$ дээр төвтэй $\omega$ тойргийг $H_aH_bH_c$ гурвалжныг багтаасан тойрог буюу $ABC$ гурвалжны есөн цэгийн тойрогт буулгасан $\mathcal{I}$ инверс олдоно. Эндээс $\mathcal{I}(M) = P$, $\mathcal{I}(N) = Q$ тул $MNPQ$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. $AMN$ гурвалжныг багтаасан тойрог, $MNPQ$ тойрог болон $\omega$ тойргуудын радикал төв $MN \cap PQ = R$ болно. Цаашлаад $A$ цэг дээр төвтэй $1:2$ харьцаатай гомотетоор $AMN$ гурвалжин $ABC$ гурвалжинд хувирах тул $\omega$ тойрог болон $AMN$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $A$ цэгт шүргэлцэх ба эндээс $RA$ шулуун $\omega$ тойргийн шүргэгч болно. Мөн $RT = RA$ тул $RT$ шулуун $\omega$ тойргийн шүргэгч болох ба $RT = RA = RD$ гэдгээс $R$ цэг $ADT$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болно.



$A$ цэгийг дайрсан $BC$ шулуунтай параллель шулуун $\omega$ тойргийг $A'$ цэгт огтолдог гэе. $A'BC$ гурвалжны $A'$ оройн өндрийг суурийг $D'$ гэвэл $ABCA'$ нь тойрогт багтсан трапец гэдгээс адил хажууд трапец болох тул $BC$ хэрчмийн дундаж $M_a$ нь $DD'$ хэрчмийн дундаж болно. Эндээс

$$AA' = DD' = 2DM_a$$

болох ба $AA' \parallel DD'$ тул $A'D$ хэрчим $AM_a$ хэрчмийг $2 : 1$ харьцаатай хуваах тул $D$, $G$, $A'$ нэг шулуун болно. $DG \cap MN = S'$ гэвэл $AA' \parallel BC \parallel MN$ тул $A'AD$ тэгш өнцөгт гурвалжны хувьд $S'$ нь $AD$ талын дундаж перпендикуляр $A'D$ гипотенузын огтлолцол тул $S'$ нь $A'AD$ гурвалжны багтсан тойргийн төв буюу $AS' = A'S'$ болно эндээс $S'$ нь $AA'$ хэрчмийн дундаж перпендикуляр дээр орших тул $S'O \perp AA'$ гэдгээс $MN \perp SO$ буюу $\angle RS'O = 90°$ болно. $RA$ шулуун $\omega$ тойргийн шүргэгч тул $\angle RAO = 90°$ болох ба эндээс $AROS'$ дөрвөн өнцөгт нэг тойрог болно. Эндээс $R$ цэг $ADT$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв гэдгийг ашиглах юм бол.

$$\angle ADS' = \angle DAS' = 180° - \angle AS'O = \angle ARO = \frac{\angle ART}{2} = 180° - \angle ADT$$

буюу $T$, $D$, $S'$ гурван цэг нэг шулуун буюу $T$, $D$, $G$, $S'$ дөрвөн цэг шулуун болно иймд бид $S \equiv S'$ гэж батлахад хангалттай ба

$$180° - \angle S'MB = \angle AMN = \angle ABC = \angle A'CB = \angle BTS'$$

тул $MBTS'$ дөрвөн өнцөгт нэг тойрог болох ба ижлээр $NCTS'$ дөрвөн өнцөгт нэг тойрог болж $S' \equiv S$ болох нь батлагдав.

**Бодлого F4.** Элдэв талт $ABC$ гурвалжны $B$ оройн өндрийн суурь $E$, $C$ оройн өндрийн суурь $F$, орто төв $H$ байг. $BE$ шулуун дээр $M$ цэгийг $MA = MH$, $CF$ шулуун дээр $N$ цэгийг $NA = NH$ байхаар авав. $M$ цэг дээр төвтэй $MA$ радиустай тойрог $CF$ шулуунтай $H$ цэгээс ялгаатай $P$ цэгээр, $N$ цэг дээр төвтэй $NA$ радиустай тойрог $BE$ шулуунтай $H$ цэгээс ялгаатай $Q$ цэгээр огтлолцдог бол $H$ цэгийг $APQ$ гурвалжинд багтсан тойргийн төв гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

*Бодолт.*

*I бодолт:* Бодлогын нөхцөлөөс $AHQ$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв $N$ цэг, $AHP$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв $M$ цэг болно.

$NA = NH$ болон $MA = MH$ гэдгээс $NM$ нь $AH$ хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулуун болох ба эндээс $NM \perp AH$ болно.

$H$ цэг $ABC$ гурвалжны ортотөв тул $AH \perp BC$ болох ба эндээс $BC \parallel MN$ болох тул

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HM}{HN} \quad (1)$$

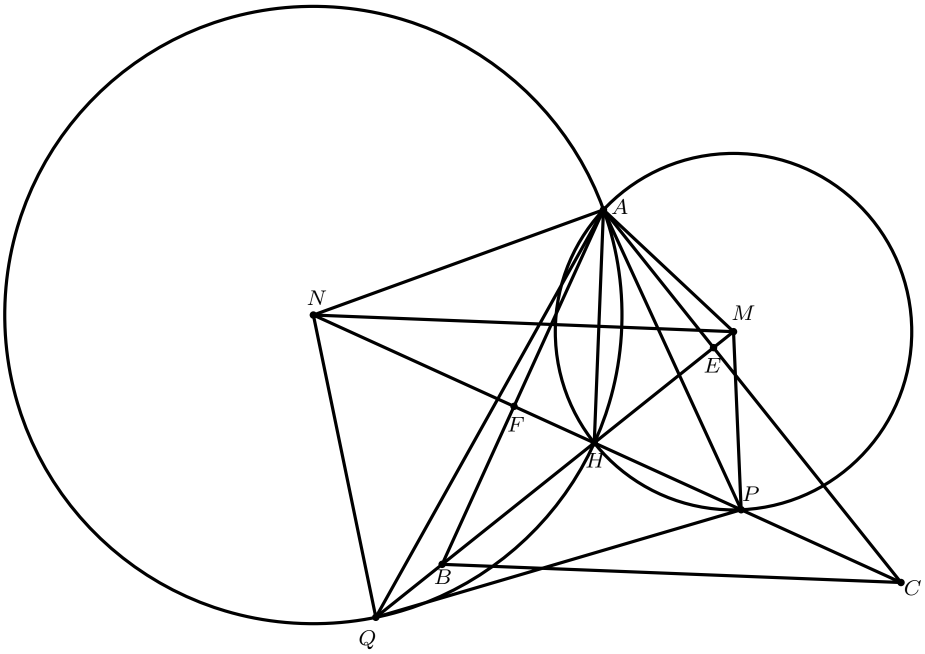
байна. $QNH$ болон $PMH$ адил хажууд гурвалжны хувьд $\angle NHQ = \angle MHP$ буюу суурийн өнцөг тэнцүү тул төсөөтэй болж

$$\frac{HM}{HN} = \frac{HP}{HQ} \quad (2)$$

болно. (1) болон (2)-оос $HB \cdot HQ = HP \cdot HC$ гэдгээс огтлолцсон хөвчийн теоремоор $QBPC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул

$$\angle AQH = \frac{\angle ANH}{2} = \angle MNH = \angle HCB = \angle HQP$$

буюу $QH$ шулуун $AQP$ гурвалжны $Q$ оройн биссектрис болно. Яг ижлээр $PH$ шулуун $AQP$ гурвалжны $P$ оройн биссектрис болно гэдгээс $H$ цэг $AQP$ гурвалжинд багтсан тойргийн төв болно.



*II бодолт:* $(AHQ)$ тойргийн төв $N$ гэдгээс $\angle AQM = \angle ANM = \angle MNH$ гэж мөрдөх тул $AMQN$ тойрогт багтана. Үүнтэй төстэйгөөр $(AHP)$ тойргийн төв $M$ гэдгээс $\angle AMN = \angle NMH = \angle APN$ тул $AMPN$ тойрогт багтана. Иймээс $AMPQN$ тойрогт багтана.

$AM = MP$ тул тэнцүү нумд тулсан өнцгүүд $\angle AQM = \angle MQP$ байна. Мөн адилаар $\angle APN = \angle NPQ$ болох тул $\triangle APQ$-д багтсан тойргийн төв $H$ байна.

**Бодлого F5.** $a_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед $a_{n+1} = \lfloor \sqrt{2a_n(a_n+1)} \rfloor$ байдаг дараалал болон $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ ба $n \geq 3$ үед $b_{n+1} = b_n + b_{n-2}$ байдаг дарааллыг авч үзье. Дурын $n \geq 1$ хувьд $b_n \geq a_n$ байна гэж батал.

Энд $x$ тооноос хэтэрдэггүй хамгийн их бүхэл тоог $\lfloor x \rfloor$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $1 \leq n \leq 8$ үед ижилхэн 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19 утга авах тул $a_n = b_n$ байна. Иймд $n \geq 6$ үед $a_{n+2} + a_n \geq a_{n+3}$ гэж батлахад хангалттай. Энд $a_n$ дараалал өсөх нь илт.

$r = \sqrt{2}$ гэе. Одоо $n \geq 1$ үед $a_{n+1} < \sqrt{2a_n(a_n+1) + 1/2} = ra_n + 1/r$ байна гэдгийг давтан хэрэглэвэл $a_{n+2} < r(ra_n + 1/r) + 1/r = 2a_n + (r+1)/r$ болно. Эндээс $n \geq 6$ үед

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_n - a_{n+3} &> a_{n+2} + a_n - (ra_{n+2} + 1/r) \\ &= a_n - (r-1)a_{n+2} - 1/r \\ &> a_n - (r-1)(2a_n + (r+1)/r) - 1/r \\ &= (3-2r)a_n - r \\ &\geq (3-2r)9 - r \\ &= 27 - 19r > 0 \end{aligned}$$

байна. Энд $1 < r < 3/2,\ a_6 = 9$ ба $27^2 - 2 \cdot 19^2 = 7 > 0$ болохыг ашиглав.

**Бодлого F6.** $n \geq 1$ гэе. $N$ ширхэг нүдэнд нь 1, бусад нүдэнд нь 0 бичигдсэн $9n^2$ нүдтэй $3n \times 3n$ хүснэгт байв. Нүд бүр дэх тоон дээр хөрш нүднүүд дэх бүх тоог нэмсэн нийлбэр хоёроос багагүй байв. $N$ тооны боломжит хамгийн бага утгыг ол.

Энд ерөнхий цэгтэй хоёр нүдийг (хэвтээ тэнхлэг, босоо тэнхлэг, диагоналийн дагуу) хөрш гэж үзнэ. Жишээлбэл зүүн дээд булангийн нүд гурван хөрштэй байна.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хариу: $2n^2 + n$.

**Байгуулалт:** $3n \times 3n$ хүснэгтийг $n$ ширхэг $3 \times 3n$ хүснэгтэд хуваая. $3 \times 3n$ хүснэгтийн $2n + 1$ нүдэнд 1, бусад нүдэнд 0 бичье (зургийг харна уу). Будагдсан 3 нүд тус бүрд харгалзах нийлбэр 3, бусад нүдэнд харгалзах нийлбэр 2 байна.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⋯ | ⋯ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | ⋯ | ⋯ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⋯ | ⋯ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Иймээс $N \leq 2n^2 + n$.

**Үнэлгээ:** Бодлогын нөхцөлийг хангахаар $2n^2 + n$ тооноос бага 1-ийг бичиж болдог гэж үзье. Тэгвэл $n$ ширхэг $3 \times 3n$ хүснэгтийн аль нэгд нь $2n$-ээс хэтрэхгүй 1 бичигдэнэ. Уг хүснэгтийн $i$-р $(1 \leq i \leq 3n)$ баганад $a_i$ ширхэг 1 бичигдсэн гэе.

Энэ хүснэгтийн аль ч $3 \times 3$ хүснэгтийн төв нүд нь 1 бичигдсэн дор хаяад хоёр хөрштэй тул $3 \times 3$ хүснэгт бүрд хоёроос цөөнгүй 1 бичигдэнэ. Иймд $\sum a_i = 2n$ $(*)$ байна.

**(1).** Дурын $1 \leq j \leq n-1$ хувьд $a_{3j} = a_{3j+1} = 0$ байна.

$b$ үсэгтэй нүд нь 1 бичигдсэн 2 хөрштэй тул $a_1 + a_2 = 2$ ба $a_{3n-1} + a_{3n} = 2$. $2 \leq j \leq n-2$ байх $j$ дугаар сонгож авъя. $3, \ldots, 3j-1$ багануудтай $j-1$ ширхэг $3 \times 3$ хүснэгт, $3j+2, \ldots, 3n-2$ багануудтай $n-j-1$ ширхэг $3 \times 3$ хүснэгт байх тул $3j$, $3j+1$-с бусад багануудад байх нийт 1-ийн тоо

$$\sum a_i - (a_{3j} + a_{3j+1}) = 4 + 2(j-1) + 2(n-j-1) = 2n.$$

Иймд $(*)$-с $a_{3j} = a_{3j+1} = 0$ мөрдөнө. Цаашилбал $a_2 + a_3 + a_4 \geq 2$ гэдгээс $a_1 = 0$ болно. Мөн ижлээр $a_{3n} = 0$.

Мөн $2n$-ээс хэтрэхгүй 1 бичигдсэн $3n \times 3$ хүснэгт олдох ба **(1)** биелнэ. Сонгож авсан $3n \times 3$ ба $3 \times 3n$ хүснэгтүүдийн огтлолцлын $3 \times 3$ хүснэгтийг авч үзье. **(1)** ёсоор энэ хүснэгтийн 1, 3-р багана, 1, 3-р мөрөнд 1 бичигдэхгүй. Энэ нь $3 \times 3$ хүснэгт бүрд хоёр ширхэг 1 бичигдэнэ гэдэгт зөрчинө.

## Т ангилал (Багш)

**Бодлого Т1.** 1, 2, ..., 10 тоонуудын $a_1$, $a_2$, ..., $a_{10}$ сэлгэмлийн хувьд

$$S = 1a_1 + 2a_2 + \cdots + 10a_{10}$$

нийлбэрийг авч үзье. $S$ нийлбэр тэгш байх сэлгэмлийн тоо нь $S$ нийлбэр сондгой байх сэлгэмлийн тоотой тэнцүү гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* $n = 10$, $m = 5$ гээд $a = (a_i)_{i=1}^n$ сэлгэмлийн хувьд $S(a) = \sum ia_i$ гэе.

*Тоолсон бодолт:* $q(a) = \#\{i \mid i \equiv a_i \equiv 1 \pmod 2\}$ гэвэл $S(a) \equiv q(a) \pmod 2$ байна.

Бэхлэгдсэн $0 \le q \le m$ хувьд $N(q) = \#\{a \mid q(a) = q\}$-г тоолбол

$$N(q) = \binom{m}{q}\binom{m}{m-q}m!m!$$

болно. Учир нь сонгосон $m$ ширхэг сондгой тоо 1, 3, ..., $2m - 1$ тоонуудын сэлгэмэл, үлдэх $m$ ширхэг тоо 2, 4, ..., $2m$ тоонуудын сэлгэмэл юм. Эндээс $N(q) = N(m - q)$ байх ба $m$ сондгой тул $q$, $m - q$ тоонуудын тэгш сондгой зөрнө. Иймд

$$N(\text{тэгш}) = \sum_{q \text{ тэгш}} N(q) = \sum_{q \text{ сондгой}} N(q) = N(\text{сондгой})$$

болно.

*Байгуулалтан бодолт:*

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) - S(a_2, \ldots, a_n, a_1) = -na_1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = m(n+1) - na_1 \equiv 1 \pmod 2$$

Иймд $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$ харгалзаа тэгш болон сондгой утга авах сэлгэмлүүдийн олонлог хооронд биектив буулгалт тодорхойлно.

**Бодлого Т2.** $1!+2!+\cdots+n!$ нийлбэр натурал тооны хоёр эсвэл түүнээс их натурал зэрэгт болдог байх бүх натурал $n$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Э. Гэрэлхүү)

*Бодолт.* Хариу: $n = 1, 3$.

$!n = \sum\limits_{i=1}^{n} i!$ гэж тэмдэглэе. $!1 = 1 = 1^2$, $!2 = 3$, $!3 = 9 = 3^2$, $!4 = 33$ тул $1 \le n \le 4$ үед $n = 1, 3$ гэсэн хоёр шийдтэй. $n \ge 5$ ба $!n = m^k$ гэе.

$k = 2$ үед $!n \equiv !4 \equiv 3 \pmod 5$ ба $m^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ тул шийдгүй.

$k \ge 3$ гэе. $!n \equiv !4 \equiv 0 \pmod 3$ гэдгээс $3 \mid m$ тул $!n \equiv 0 \pmod{27}$ байна.

$$!4 = 33, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \quad 8! = 40320 \equiv 9 \pmod{27}$$

гэдгээс зөвхөн $n = 7$ үед $!n \equiv 0 \pmod{27}$ болохыг шалгах амархан. Энд $!7 = 3^4 \cdot 73$ тул шийд биш.

**Бодлого Т3.** Дурын $n$ натурал тооны хувьд

$$3^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{n-\frac{1}{2}} < \sum_{k=1}^{n} 2^{k-\frac{1}{2}}\sqrt{k}\binom{n}{k} < 3^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{n}$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $n$ тоог бэхэлье. $0 \leq k \leq n$ хувьд $p_k = 2^k\binom{n}{k}/3^n > 0$ гэвэл $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$ байна. $\sqrt{x}$ функц гүдгэр тул

$$\sum_{k=0}^{n} p_k\sqrt{k} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k k}$$

байна. Энд $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}k = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k\binom{n-1}{k-1}n = 2n3^{n-1}$ гэдгээс $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k k = 2n/3$ болох ба дээрхэд орлуулбал батлах зүйл мөрдөнө. Энд $\sqrt{x}$ эрс гүдгэр тул тэнцэл биелэхгүй.

Одоо $1 \leq k \leq n$ хувьд $q_k = 3p_k k/(2n) > 0$ гэвэл $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$ байна. Мөн дээрхтэй ижлээр $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k k = (2n+1)/3$ байна. Энд $1/\sqrt{x}$ хотгор гэдгээс

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} q_k k}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)/3}}$$

болох ба эндээс

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\sqrt{k} \geq \sqrt{\frac{4n^2}{3(2n+1)}} > \sqrt{\frac{2n-1}{3}}$$

болж батлах зүйл мөрдөнө.

Жич: $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k\binom{n}{k}$ адилтгалаас уламжлал авах замаар $\sum p_k k$ ба $\sum q_k k$ нийлбэрүүдийг олж болно.

**Бодлого Т4.** $AB < AC$ байх $ABC$ гурвалжны дотор орших $P$ цэгээс $ABC$ гурвалжны $A$ оройн дотоод биссектрис руу буулгасан перпендикуляр шулуун $AB$ шулууныг $D$ цэгээр, $AC$ шулууныг $E$ цэгээр огтолдог байв. $BDP$ гурвалжныг багтаасан тойрог $CEP$ гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин $Q$ цэгт огтолдог бол $PQ$ шулуун $P$ цэгийн сонголтоос үл хамааран ямагт нэг цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Х. Нурсолтан)

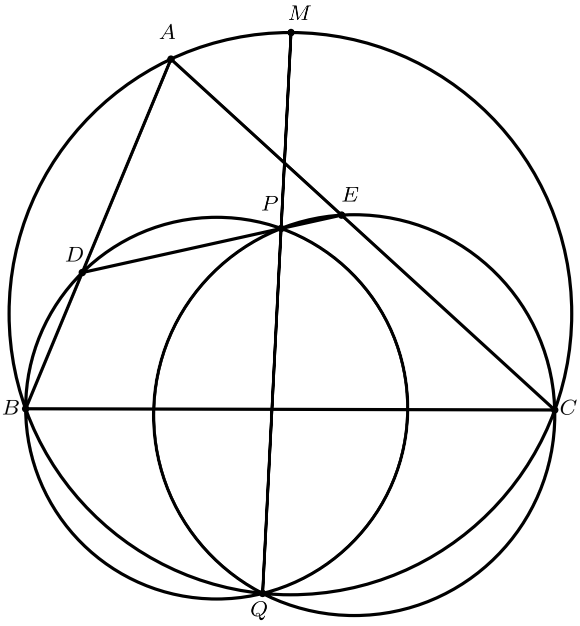
*Бодолт.* $BDPQ$ болон $CEPQ$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс

$$\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle ADE + \angle AED = 180^\circ - \angle BAC$$

буюу $Q$ цэг $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. $QP$ шулуун $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой дахин $M$ цэгт огтолдог гэе. $ADE$ гурвалжны өндөр биссектрис хоёр давхцах тул адил хажууд гурвалжин буюу $\angle ADE = \angle AED$ болно. Эндээс

$$\angle MQB = \angle PQB = \angle ADE = \angle AED = \angle CQP = \angle MQC$$

буюу $M$ цэг $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн $A$ оройг агуулсан нумын дундаж цэг болно.



**Бодлого T5.** Бодит тоонуудаас тогтох $2 \times 2$ хэмжээтэй матрицын $(A, B, C)$ гурвалыг

$$\begin{cases} A^2 = AB + I \\ B^2 = BC + I \\ C^2 = CA + I \end{cases}$$

систем тэгшитгэлийг хангадаг бол *сайн* гэе. Энд $I$ нэгж матриц.

(1) Сайн гурвал төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

(2) Рационал тоонуудаас тогтох сайн гурвал олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.*

(1) $3x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ куб олон гишүүнт бодит язгууртай тул нэгийг сонгон $x$ гэвэл $1 \neq x > 0$ байх нь илт. Иймд $a = \sqrt{x} \neq 0, \ b = a - 1/a \neq 0, \ c = b - 1/b$ тоонууд зөв тодорхойлогдох ба $a^2 = ab + 1, \ b^2 = bc + 1$ байна. Мөн

$$b = a - \frac{1}{a} = \frac{x-1}{a} \quad \text{ба} \quad c = b - \frac{1}{b} = \frac{x-1}{a} - \frac{a}{x-1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{a(x-1)}$$

гэдгээс

$$1 + c(a - c) = 1 + \frac{x^2 - 3x + 1}{a(x-1)} \cdot \frac{2x - 1}{a(x-1)} = \frac{3x^3 - 9x^2 + 6x - 1}{x(x-1)^2} = 0$$

байна. Иймд $X^2 = I$ байх дурын бодит матрицын хувьд $A = aX$, $B = bX$, $C = cX$ сайн гурвал болно.

(2) Эсрэгээс нь олддог гэе. $A(A - B) = I$ гэдгээс $A$ урвуутай бөгөөд $A^{-1} = A - B$ байна. Тухайлбал $(A - B)A = I$ байх тул $AB = A^2 - I = BA$ байна. Мөн ижлээр $B^{-1} = B - C$, $BC = CB$ ба $C^{-1} = C - A, \ CA = AC$ байна.

Эндээс $A^{-1} + B^{-1} + C^{-1} = A - B + B - C + C - A = 0$ болно. $A$, $B$, $C$ бүгд хоорондоо сэлгэх тул $AB + BC + CA = 0, \ A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA + 3I = 3I$ ба $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA) = 3I$ байна. Эндээс $A + B + C$ рационал матрицын тодорхойлогч $\pm\sqrt{3}$ буюу иррационал болж зөрчил гарна. Энд матрицын тодорхойлогч үржвэр хадгалдаг болохыг ашиглав.

**Бодлого T6.** $n \geq 2$ гэе. $\overbrace{11\ldots1}^{n}$ тоонд хуваагдах $62n$-ээс хэтрэхгүй оронтой бүх тоог залгуулан бичихэд үүсэх тоонд 1 ба 2 цифрүүд ижил тоотой орохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* $f_n = (10^n - 1)/9$, $k = 62n$ ба $a > 0$ цифрээр төгссөн $10^k$-с бага $f_n$-д хуваагдах тоонуудын тоог $T_a$ гэж тус тус тэмдэглэе. Урд нь тэг цифр нэмэх замаар $10^k$-с бага ямар ч тоог $k$ цифрээр бичигдсэн гэж үзье. Хэрэв $f_n \mid A = \overline{a_k \ldots a_2 a_1}$ бол

$$10A - \overline{a_{k-1} \ldots a_1 a_k} = (10^k - 1)a_k \text{ ба } f_n \mid 10^k - 1$$

гэдгээс дурын $k > i \geq 1$ хувьд $f_n \mid \overline{a_i \ldots a_1 a_k \ldots a_{i+1}}$ мөрдөнө. Иймд $10^k$-с бага $f_n$-д хуваагдах тоонууд нийт $k \times T_a$ ширхэг $a$ цифр агуулна.

Ямар ч $a > 0$ цифрийн хувьд $f_n \mid \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a}$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлццэтэй нөхцөл нь $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2} \equiv a f_{n-1} \pmod{f_n}$, иймээс

$$T_a = |\{B = \overline{a_k \ldots a_2} \,|\, B \equiv a f_{n-1} \pmod{f_n} \text{ ба } B < 10^{k-1}\}|$$

Сүүлийн олонлог $[10^{k-1}/f_n] + 1$ элементтэй, учир нь $[10^{k-1}/f_n] f_n + a f_{n-1} < 10^{k-1}$. Иймд $k \times T_1 = k \times T_2$ болж бодлого бодогдов.

# Монголын Математикийн 62-р Олимпиадын III Даваа

## Улсын Олимпиад

Говь хангай хосолсон Баянхонгор нутагт Монголын 21 аймаг 9 дүүргийн шилдэг математикчид оролцсон Улсын Математикийн 62 дугаар Олимпиад 2026 оны 3 сарын 28-наас 4 сарын 2-ны өдрүүдэд амжилттай сайхан зохион байгуулагдлаа.

Олимпиад улсын 5 удаагийн аварга, хошой уран бодолтын шагналт, шатрын спортын дэд мастер, МУ-ын зөвлөх багш Б.Баяржаргалын нэрэмжит болон явагдлаа.

Удирдлага, санхүү, эрх зүйн орчноор хангасан Боловсролын Яам, Боловсролын Ерөнхий Газар, оролцогчдыг байр, хоол, бэлэг, унаа, орчин, үзвэр, үйлчилгээ, хүлээн авалт, шагнал, нээлт хаалт зэрэг бүх зохион байгуулалтаар хангасан Баянхонгор аймгийн ЗДТГ, Аймгийн ИТХ, Аймгийн Боловсролын газар, ерөнхий боловсролын сургууль, цэцэрлэгүүдэд гүн талархал илэрхийлье. Энэ бүхнийг сэтгэл зүтгэл гарган мэргэжлийн өндөр түвшинд удирдан зохион байгуулсан Баянхонгор аймгийн Засаг Дарга Эрдэнээгийн Энхбатад нийт оролцогчид, математик сонирхогчдынхоо өмнөөс онцгойлон талархал дэвшүүлье. Мөн аймгийн зохион байгуулалтын баг болон хорооны ажлын хэсгийн хооронд гүүр болж ажилласан аймгийн Боловсролын газрын математик, мэдээллийн технологи хариуцсан ахлах арга зүйч Л.Мөнхжаргалд баярлаж байгаагаа хэлье.

Олимпиадын бодлого сонголт, засалт, оноо хамгаалалт зэрэг эрдмийн үйл ажиллагааг шударга бөгөөд нээлттэй зарчмаар зохион байгуулсан мэргэжлийн хорооны гишүүддээ баярлалаа.

Олимпиадын 9-10 ангийн сурагчдын E ангилалд 82, 11-12 ангийн сурагчдын F ангилалд 82, багш нарын T ангилалд 64 оролцогч мэргэн ухаан, авьяас чадвараа уралдуулан өрсөлдлөө.

| | |
|---:|---|
| 3 сарын 28 өдөр | бүртгэл |
| 3 сарын 29 өдөр | нээлтийн ажиллагаа, зураг авалт |
| 3 сарын 30-31 өдөр | бодолт болон засалт |
| 4 сарын 1 өдөр | хамгаалалт, хүндэтгэлийн зоог |
| 4 сарын 2 өдөр | хаалтын ажиллагаа |

Олимпиадын 36 медалийн 9-ийг орон нутгаас, мөн ижил 9-ийг эмэгтэй сурагчид авсан онцгой жил боллоо.

Мөн бидний үйл ажиллагаанд санхүүгийн дэмжлэг үзүүлсэн бүх байгууллага, хамт олон, хамтран зүтгэгчид, сангууд болон хувь хүмүүстээ талархал илэрхийлье. Дараах байгууллагуудад тусгайлан талархаж байгаагаа уламжилъя.

Эрдэнэ Монгол-Баянхөндий төсөл
АНД Глобал
Капитрон банк
Космо

## Зохион байгуулалт

Олимпиадыг зохион байгуулахад дараах ажлын хэсгүүд ажиллав.

### Аймгийн Засаг даргын захирамжаар байгуулсан ажлын хэсэг

| | |
|---|---|
| Д.Ууганцэцэг | Аймгийн Засаг даргын зөвлөх, Ажлын хэсгийн ахлах |
| Д.Сарангарав | Аймгийн Засаг даргын тамгын газрын Хууль эрх зүйн хэлтсийн дарга |
| С.Байгальмаа | Аймгийн Засаг даргын тамгын газрын Санхүү төрийн сангийн хэлтсийн дарга |
| В.Наранчимэг | Аймгийн Засаг даргын тамгын газрын Нийгмийн бодлогын хэлтсийн дарга |
| Н.Мэндбаяр | Хүүхэд, гэр бүлийн хөгжил, хамгааллын газрын дарга |
| Б.Пүрэвдагва | Соёл урлаг, аялал жуулчлал, залуучуудын газрын дарга |
| Г.Лхагва-Очир | Эрүүл мэндийн газрын даргын албан үүргийг түр орлон гүйцэтгэгч |
| Б.Долгормаа | Нийгмийн бодлогын хэлтсийн боловсролын асуудал хариуцсан мэргэжилтэн |
| Л.Мөнхжаргал | Боловсролын газрын математик, мэдээллийн технологи хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Б.Баяржаргал | Төв Олонлог сургуулийн математикийн зөвлөх багш |
| Ц.Дэлгэрдалай | Ерөнхий боловсролын Төгс Алгоритм сургуулийн зөвлөлийн дарга |
| М.Мөнхбат | Математикийн ахмад багш |
| Л.Аюурзана | Боловсролын газрын дарга, Ажлын хэсгийн нарийн бичгийн дарга |

### Боловсролын газрын даргын тушаалаар байгуулсан дэд ажлын хэсэг

| | |
|---|---|
| С.Гандалай | Боловсролын газрын сургалт, арга зүйн хэлтсийн дарга, Ажлын хэсгийн ахлах |
| М.Угтахбаяр | Биеийн тамир, хөгжмийн боловсрол хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Л.Оюунбилэг | Статистикийн мэдээлэл, хяналт шинжилгээ-үнэлгээ мэдээллийн сүлжээ хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Г.Одонтунгалаг | Байгалийн ухааны боловсрол хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Б.Нямдолгор | Монгол хэл,бичиг, уран зохиолын боловсрол хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Д.Цэцэнхүү | Хүүхдийн хөгжил, хамгаалал, тэгш хамран сургалт хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Д.Дүүриймаа | Цахим сургалт, мэдээллийн сүлжээ хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Н.Ариунболор | Сургуулийн өмнөх боловсрол хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Д.Намхайноров | Төсвийн төлөвлөлт, гүйцэтгэл хариуцсан ахлах арга зүйч |
| Ц.Буянтогтох | Ерөнхий боловсролын Номундалай сургуулийн захирал |
| Л.Сарангэрэл | Ерөнхий боловсролын Номгон сургуулийн захирал |
| Ц.Долгорлхам | Цэцэрлэг, сургуулийн цогцолборын захирал |
| Х.Мөнхсоёл | Ерөнхий боловсролын Эрдэнэмандал сургуулийн захирал |
| Ц.Загдсүм | Ерөнхий боловсролын Эрдэм сургуулийн захирал |
| Д.Цэдэнсодном | Ерөнхий боловсролын Соого Сейкео сургуулийн захирал |
| П.Адъяа | Ерөнхий боловсролын Гэгээн Сумади сургуулийн захирал |
| Ц.Мөнх-Эрдэнэ | Ерөнхий боловсролын 5 дугаар сургуулийн захирал |
| Г.Отгончимэг | Ерөнхий боловсролын Төгс Алгоритм сургуулийн гүйцэтгэх захирал |
| Д.Бүжинлхам | Ерөнхий боловсролын Номундалай сургуулийн сургалтын менежер |
| О.Дашдулам | Ерөнхий боловсролын Номгон сургуулийн сургалтын менежер |
| Д.Өлзийбаатар | Ерөнхий боловсролын Номундалай сургуулийн математикийн багш |
| О.Наранбаатар | Ерөнхий боловсролын Эрдэм сургуулийн математикийн багш |
| С.Саранчимэг | Ерөнхий боловсролын Номгон сургуулийн математикийн багш |
| Л.Уганчимэг | Ерөнхий боловсролын Соого Сейкео сургуулийн математикийн багш |
| М.Гантогтох | Ерөнхий боловсролын Гэгээн Сумади сургуулийн математикийн багш |
| С.Цагаан | Ерөнхий боловсролын Төгс Алгоритм сургуулийн захирал, математикийн багш |
| Л.Мөнхжаргал | Математик, мэдээллийн технологи хариуцсан ахлах арга зүйч |

## Олимпиадын мэргэжлийн хороо

Олимпиадын мэргэжлийн үйл ажиллагааг Ү. Отгонбаяр ахлагчтай МУИС болон МУБИС-ийн багш, оюутнуудын баг гүйцэтгэж бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах, дүгнэх аргачлалыг гаргах, бодолт хамгаалах ажлуудыг тус тус гүйцэтгэлээ. Бодлогын багийг Г. Баярмагнай, засалтын багийг Т. Хулан ахлав. Мэргэжлийн хороонд ажиллахаар алс холоос зорин ирсэн Г. Эрдэнэбаяр, Д. Энэрэлт нарт баярласнаа хэлье. Мэргэжлийн хорооны нарийн бичгийн даргаар С. Цогзолмаа ажиллав.

| **Багш** | **Оюутан** |
|---|---|
| Т.Базар | А.Алтансүх |
| Б.Батбаясгалан | Ж.Баярсайхан |
| Г.Баярмагнай | Т.Билгүүн |
| Б.Баяржаргал | Б.Билэгдэмбэрэл |
| Г.Баяржавхлан | Э.Гэрэлхүү |
| Л.Буянтогтох | Н.Дөлгөөн |
| Т.Гансүх | А.Мишээл |
| Д.Даянцолмон | Х.Нурсолтан |
| Ш.Доржсэмбэ | З.Пүрэвбат |
| Ц.Нямдаваа | Б.Тэнүүнсайхан |
| Э.Оргил-Эрдэнэ | Б.Улсболд |
| Ү.Отгонбаяр | У.Хүслэн |
| Т.Хулан | Т.Цэрэнлхам |
| С.Цогзолмаа | Э.Энхжин |
| Б.Эрдэнэбаяр | Д.Энэрэлт |

Ангиллын даамлууд болон сэдвийн ахлагч нар засалтын үйл ажиллагаанд хяналт тавьж, дүгнэх аргачлал боловсруулах болон хэсэгчилсэн оноо тавихад зөвшилцөж ажиллаа.

| **Даамал** | | **Ахлагч** | | **Бодлогын баг** |
|---|---|---|---|---|
| E | Хулан | A | Отгонбаяр | Баярмагнай |
| F | Батбаясгалан | G | Хулан | Билэгдэмбэрэл |
| T | Оргил-Эрдэнэ | C | Батбаясгалан | Нурсолтан |
| | | N | Оргил-Эрдэнэ | Отгонбаяр |

## Бодлого болон засалт

Олимпиадад алгебрын 5, комбинаторикын 4, геометрийн 4, тооны онолын 5, нийт 18 бодлого тавигдлаа.

Дундаж оноо ба нэг бодлого бүтэн бодож тусгай шагнал авсан хувь.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Нийт | Тусгай шагнал |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | 3.83 | 1.39 | 0.21 | 1.95 | 5.93 | 0.00 | 13.3 | 79% |
| F | 3.17 | 3.32 | 0.72 | 1.64 | 1.54 | 0.29 | 10.7 | 59% |
| T | 2.63 | 2.19 | 0.46 | 2.25 | 0.97 | 0.10 | 8.6 | 31% |

Бодлого бүрийг ашиг сонирхлын зөрчилгүй хоёроос доошгүй хүнтэй баг заслаа.

Энэ жил оролцогчдын урьдчилсан дүнг жагсаалт хэлбэрээр гаргалгүй, оролцогчид зөвхөн өөрийн оноон дээр үндэслэн хамгаалалт хийснээрээ онцлог байлаа. Бид цаашид ч энэ зарчмаар ажиллах төлөвлөгөөтэй байна.

| | | Зохиогч | Зассан | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E1 | C | Билгүүн | Баярсайхан | Билгүүн | Гансүх | |
| E2 | G | Батзориг | Базар | Энхжин | Дөлгөөн | |
| E3 | A | Отгонбаяр | Алтансүх | Доржсэмбэ | Нямдаваа | |
| E4 | A | Отгонбаяр | Алтансүх | Цэрэнлхам | Пүрэвбат | |
| E5 | C | Эрдэнэбаяр | Мишээл | Буянтогтох | Билгүүн | |
| E6 | N | Эрдэнэбаяр | Эрдэнэбаяр | Тэнүүнсайхан | | |
| F1 | N | Отгонбаяр | Пүрэвбат | Эрдэнэбаяр | Алтансүх | Оргил-Эрдэнэ |
| F2 | G | Бэлгүтэй | Улсболд | Гэрэлхүү | | |
| F3 | C | Билэгдэмбэрэл | Мишээл | Баяржавхлан | | |
| F4 | A | Эрдэнэбаяр | Нямдаваа | Гансүх | Баярсайхан | |
| F5 | G | Бэлгүтэй | Улсболд | Дөлгөөн | Базар | Энхжин |
| F6 | N | Ханзул | Баяржавхлан | Энэрэлт | | |
| T1 | N | Отгонбаяр | Хүслэн | Даянцолмон | Улсболд | Гэрэлхүү |
| T2 | C | Билэгдэмбэрэл | Буянтогтох | Энэрэлт | Тэнүүнсайхан | Алтансүх |
| T3 | A | Бэлгүтэй | Баяржаргал | Цэрэнлхам | | |
| T4 | A | Отгонбаяр | Гэрэлхүү | Хүслэн | Даянцолмон | |
| T5 | G | Бэлгүтэй | Базар | Энхжин | Улсболд | Дөлгөөн |
| T6 | N | Отгонбаяр | Оргил-Эрдэнэ | Доржсэмбэ | Баяржаргал | |

### Бодлого хамгаалалт

Бодлого хамгаалалтыг цахим ба танхимын гэсэн хоёр үе шаттайгаар зохион байгуулав. 1 дүгээр шатанд оролцогчдын бодлого хамгаалах хүсэлтийг цахимаар хүлээн авч тухайн бодлого зассан комиссын гишүүд, сэдвийг хариуцсан ахлагч, бодлого зохиогч нар хамтран хариу тайлбарыг цахимаар өгсөн ба 2 дугаар шатанд оролцогчдыг төлөөлж багш нар танхимаар ирж бодлого хамгаалав.

## Олимпиадын дүн

### E ангилал

| Овог | Нэр | Харьяалал | Сургууль | Оноо | Медаль |
|---|---|---|---|---|---|
| Баттулга | Дэлгэрмөрөн | Хөвсгөл | Дэлгэрмөрөн | 29 | Алт |
| Нямдорж | Залуудай | Баянзүрх | 14 дүгээр сургууль | 28 | Мөнгө |
| Азжаргал | Гоомарал | Хан-Уул | Орчлон сургууль | 28 | Мөнгө |
| Очгэрэл | Жавхлантөгс | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 28 | Мөнгө |
| Ууганбаяр | Азбаяр | Сүхбаатар | 1 дүгээр сургууль | 27 | Мөнгө |
| Даваа | Долгор | Хөвсгөл | Дэлгэрмөрөн | 25 | Хүрэл |
| Баатар | Уранбат | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 25 | Хүрэл |
| Батбаяр | Эгшиглэн | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 24 | Хүрэл |
| Батгэрэл | Жаргал | Сүхбаатар | Сант сургууль | 24 | Хүрэл |
| Өнөржаргал | Номин-Эрдэнэ | Баянхонгор | Төгс Алгоритм | 24 | Хүрэл |
| Бат-Эрдэнэ | Билгүүн | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 24 | Хүрэл |
| Мөнхбаяр | Номгон | Сүхбаатар | Сант сургууль | 23 | Хүрэл |
| Анхбаяр | Ану | Баянзүрх | Шинэ Монгол сургууль | 22 | Хүрэл |
| Хангай | Тэмүгэ | Дархан-Уул | Монгол Оюу | 22 | Хүрэл |

### F ангилал

| Овог | Нэр | Харьяалал | Сургууль | Оноо | Медаль |
|---|---|---|---|---|---|
| Сонор | Манлай | Сүхбаатар | Сант сургууль | 40 | Алт |
| Алтангэрэл | Ану | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 35 | Мөнгө |
| Болдбаатар | Төвшиндалай | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 32 | Мөнгө |
| Чингүнжав | Төрболд | Сүхбаатар | 1 дүгээр сургууль | 28 | Мөнгө |
| Ерулан | Нартулга | Төв аймаг | Цонжин кибер боардинг | 27 | Мөнгө |
| Мөнхбаяр | Амин-Эрдэнэ | Сүхбаатар | Шинэ үе сургууль | 27 | Мөнгө |
| Отгонбаяр | Түвшинбаатар | Баянгол | Эрхэт эрдэм | 26 | Хүрэл |
| Батжаргал | Төрбат | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 26 | Хүрэл |
| Наранбаатар | Болор | Баянгол | Эрдмийн хишиг | 26 | Хүрэл |
| Даваадорж | Хүслэн | Сүхбаатар | Сант сургууль | 25 | Хүрэл |
| Мөнхжин | Тэмүгэ | Сүхбаатар | 1 дүгээр сургууль | 25 | Хүрэл |
| Төрмөнх | Жавхланзаяа | Баянхонгор | Төгс Алгоритм | 25 | Хүрэл |
| Баярсайхан | Батзориг | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 24 | Хүрэл |
| Тамир | Билгүүнгэрэлт | Баянгол | Эрхэт эрдэм | 23 | Хүрэл |
| Бэхбаяр | Чингүүн | Хан-Уул | Олонлог төв сургууль | 23 | Хүрэл |
| Чиндэгсүрэн | Чингүн | Сүхбаатар | Сант сургууль | 23 | Хүрэл |

### T ангилал

| Овог | Нэр | Харьяалал | Сургууль | Оноо | Медаль |
|---|---|---|---|---|---|
| Эрдэнэбат | Эрдэнэбилэг | Баянгол | Эрхэт эрдэм | 34 | Алт |
| Раднаабазар | Доржзовд | Орхон | Эрдмийн сан сургууль | 30 | Мөнгө |
| Пүрэвбат | Амгаланбаатар | Хөвсгөл | Эрдмийн далай | 29 | Мөнгө |
| Дамбадорж | Хосбаяр | Сүхбаатар | 11 дүгээр сургууль | 28 | Хүрэл |
| Баяраа | Мөнхтулга | Сүхбаатар | 1 дүгээр сургууль | 22 | Хүрэл |
| Чүлтэмсүрэн | Баянбат | Хөвсгөл | Дэлгэрмөрөн | 22 | Хүрэл |

## Санхүү

Боловсролын Ерөнхий Газраас улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулахад зориулж 44,133,200 төгрөгийн санхүүжилт олгосон ба үүнээс 14,400,000 төгрөгийг оролцогчдын хоолны зардалд, 15,383,200 төгрөгийг оролцогчдын унааны зардалд, 9,300,000 төгрөгийг ажлын хөлсөнд, 5,050,000 төгрөгийг бусад зардалд зарцуулав.

Олимпиадыг зохион байгуулахтай холбоотой 300 орчим сая төгрөгийн бусад зардлыг Баянхонгор аймгийн ЗДТГ, ИТХ, Боловсролын Газар, Хонгорын Математик ТББ болон бусад ивээн тэтгэгч компани, байгууллага, сан, хувь хүмүүсийн хандиваар санхүүжүүлэв. Бүгдэд нь чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

## Бодлогууд

### E (9-10)

**Бодлого E1.** Тойрог дээр 64 ширхэг ногоон цэг өгөгдөв. Нэг цэгийг сонгон улаанаар будаад дараах үйлдлийг нэг ногоон цэг үлдэх хүртэл хийнэ.

> *Байгаа цэгээсээ цагийн зүүний дагуу нэг ногоон цэг алгасаад хоёр дахь ногоон цэг рүү шилжинэ. Очсон цэгээ улаанаар будаад яг өмнө будсан цэгтэйгээ хэрчмээр холбоно.*

Ингэхэд аль ч гурван хэрчим нэг цэгт огтлолцдоггүй байв. Оройн цэгүүдээс ялгаатай нийт хэдэн огтлолцлын цэг үүсэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Билгүүн)

**Бодлого E2.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг $O$, түүний орто төвийг $H$ гэе. $AC$ тал дээр $M$ цэгийг, $AB$ тал дээр $N$ цэгийг $AMHN$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар тэмдэглэв. Энэ параллелограммын диагоналиудын огтлолцлын цэгийг $P$ гэвэл $OP$ ба $MN$ шулуунууд хоорондоо перпендикуляр гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого E3.** Сөрөг биш $a$, $b$, $c$ тоонуудын аль ч хоёрын нийлбэр 1-ээс хэтэрдэггүй бол

$$\frac{2}{9} \leq (1-a-b)(1-b-c)(1-c-a) + (1-a-b)c^2 + (1-b-c)a^2 + (1-c-a)b^2 + 2abc \leq 1$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого E4.** Бодит тоон $(x, y, z)$ гурвалыг

$$x^3 + y + z = y^3 + z + x = z^3 + x + y = 0$$

нөхцөлийг хангадаг бол *сайн* гэе. Бүх сайн гурвалыг авч үзэхэд $x + y + z$ нийлбэр хэдэн ялгаатай утга авах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого E5.** Зусланд 62 хүүхэд байсан ба хүүхдүүд бүлгүүдэд хуваагддаг байв. Хүүхэд бүр яг нэг бүлэгт харьяалагдах ба бүлэг бүр сондгой тооны хүүхэдтэй. Хүүхдүүдийг нэг бүлгийн ямар ч хоёр хүүхдийн хооронд тэр бүлгийн биш ядаж хоёр хүүхэд зогсдог байхаар тойрог болгон зогсоож болдог бол зусланд хамгийн цөөндөө хэдэн бүлэг байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

**Бодлого E6.** Өгөгдсөн бүхэл тоон $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... төгсгөлгүй дарааллын бүх гишүүний хувьд $a_k$ нь $3^k k!$ тоонд хуваагддаг байв. Бүхэл тоон $b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... төгсгөлгүй дарааллыг

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_0 + a_1, \quad b_2 = a_0 + 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3$$

гэх мэтчилэн $n \geq 0$ хувьд $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ гэж тодорхойлъё. Энд $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ биномын коэффициент.

$b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... дарааллын ядаж $m \geq 1$ ширхэг гишүүн тэгтэй тэнцүү байдаг бол энэ дарааллын бүх гишүүн $3^m$ тоонд хуваагдана гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $a_1$, $a_2$ натурал тоонуудаар эхлээд $n \geq 2$ үед

$$a_{n+1} = \frac{a_2}{a_1} a_n - a_{n-1}$$

гэж тодорхойлогдсон $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... төгсгөлгүй дарааллын бүх гишүүд натурал тоо байв. $a_2/a_1$ харьцаа бүхэл гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F2.** Элдэв талт, хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжин өгөгдөв. $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$, гурвалжинд багтсан тойргийн төв $I$ байг. $AB$ тал дээр $F$ цэгийг, $AC$ тал дээр $E$ цэгийг $I$ цэг $EF$ хэрчмийн дундаж цэг байхаар авав. $BI$ шулуун болон $\omega$ тойргууд дахин $M_B \neq B$ цэгт, $CI$ шулуун болон $\omega$ тойргууд дахин $M_C \neq C$ цэгт огтлолцдог. Хэрэв $BFM_B$ гурвалжныг багтаасан тойрог $BC$ шулуунтай дахин $X \neq B$ цэгт, $CEM_C$ гурвалжныг багтаасан тойрог $BC$ шулуунтай дахин $Y \neq C$ цэгт огтлолцдог бол $BX = CY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

**Бодлого F3.** Нэгэн улс 62 арлаас бүрддэг. Зарим арлууд гүүрээр холбогдох ба гүүрээр холбогдсон арлуудыг хөрш гэнэ. Дараах нөхцөлүүд хангагддаг байг:

(i) арал бүр ядаж гурван хөрштэй,

(ii) хөрш хоёр арал бүр ядаж нэг ерөнхий хөрштэй,

(iii) аль ч хоёр нь хөрш байдаг дөрвөн арал олдохгүй.

Нийт гүүрний тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

**Бодлого F4.** $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ бодит тоонууд өгөгдөв. $x_1 = 0$, $y_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 \\ y_{n+1} = b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 \end{cases}$$

гэж тодорхойлогдсон $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ дарааллуудын бүх гишүүний хувьд $y_n = x_n^3 + 1$ тэнцэтгэл биелдэг байв. $\{x_n\}$ дараалал зөвхөн төгсгөлөг тооны ялгаатай утга авах боломжтой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

**Бодлого F5.** $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ өгөгдөв. $B$ болон $C$ цэгийг дайрсан тойрог $AB$ хэрчмийг $F$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $E$ цэгт огтолдог байг. $EF$ хэрчим дээрх $D$ цэгийн хувьд $BD$ шулуун $\omega$ тойргийг $B$ цэгээс ялгаатай $K$ цэгт, $CD$ шулуун $\omega$ тойргийг $C$ цэгээс ялгаатай $L$ цэгт огтолдог гэе. Хэрэв $BFK$ гурвалжныг багтаасан тойрог болон $CEL$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $X$, $Y$ ялгаатай хоёр цэгээр огтлолцдог бол $\omega$ тойрог $XY$ хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

**Бодлого F6.** Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. $f(1) = 1$ байдаг бөгөөд дурын $n$, $m$ натурал тоонуудын хувьд

$$f(f(n)f(n+m)) = f(f(n)f(m)) + f(f(n))^2$$

байдаг $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ функцийг *хонгор* функц гэж нэрлэе.

$f$ хонгор функцийн хувьд $f(p) < p$ байдаг $p$ анхны тоог *онцгой* гэе. Эхний 2026 анхны тоон дотор хонгор функц хамгийн ихдээ хэдэн онцгой анхны тоотой байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

## T ангилал (Багш)

**Бодлого T1.** Хос хосоороо ялгаатай $a$, $b$, $c$, $d$ натурал тоонууд бүгд 2026-аас хэтэрдэггүй бол

$$m = \min\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)\}$$

тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? Энд $x$, $y$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $(x,y)$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого T2.** Олимпиадад оролцохоор ирсэн есөн багш үдийн цайны үеэр нэг ширээнд суужээ. Тэгэхэд багш бүр гурав эсвэл дөрвөн багштай танил байв. Мөн ямар ч хоёр танил багшийн хувьд хоёулантай нь танил багш ядаж нэг байв. Гэхдээ бүгд хос хосоороо танил дөрвөн багш байхгүй байв.

Хамгийн багадаа хэдэн танил хос байж болох вэ? Энд танилын харилцаа тэгш хэмтэй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

**Бодлого T3.** $(a_n)_{n\geq 1}$ натурал тоон дарааллын бүх гишүүдийн хувьд $a_n \leq 2026^n$ байв. Дурын $k$, $m$ натурал тоонуудын хувьд

$$\frac{a_{k+m}}{a_k + a_m}$$

харьцаа бүхэл байдаг бол $a_n = na_1$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

**Бодлого T4.** Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. $f$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ буулгалтуудын хувьд дурын $n \in \mathbb{N}$ тоог авахад

$$f(f(n)) = 2f(n), \qquad g(g(n)) = 2g(n), \qquad f(n) + g(n) = 4n + 1$$

байдаг байв. Дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $|f(n) - g(n)| = 1$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого T5.** $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ өгөгдөв. $B$ болон $C$ цэгийг дайрсан тойрог $AB$ хэрчмийг $F$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $E$ цэгт огтолдог байг. $EF$ хэрчим дээрх $D$ цэгийн хувьд $BD$ шулуун $\omega$ тойргийг $B$ цэгээс ялгаатай $K$ цэгт, $CD$ шулуун $\omega$ тойргийг $C$ цэгээс ялгаатай $L$ цэгт огтолдог гэе. Хэрэв $BFK$ гурвалжныг багтаасан тойрог болон $CEL$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $X$, $Y$ ялгаатай хоёр цэгээр огтлолцдог бол $\omega$ тойрог $XY$ хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

**Бодлого T6.** Бүтэн квадрат тооноос нэгээс ихгүй зөрдөг натурал тоог *бараг квадрат тоо* гээд бараг квадрат тоонуудыг 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15, ... гэх мэтчилэн өсөх эрэмбээр дараалуулан бичье. Дараалсан хэдэн бараг квадрат тооны нийлбэрт тавигддаггүй тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

# Бодолтууд

## Е ангилал (9–10 анги)

**Бодлого Е1.** Тойрог дээр 64 ширхэг ногоон цэг өгөгдөв. Нэг цэгийг сонгон улаанаар будаад дараах үйлдлийг нэг ногоон цэг үлдэх хүртэл хийнэ.

> *Байгаа цэгээсээ цагийн зүүний дагуу нэг ногоон цэг алгасаад хоёр дахь ногоон цэг рүү шилжинэ. Очсон цэгээ улаанаар будаад яг өмнө будсан цэгтэйгээ хэрчмээр холбоно.*

Ингэхэд аль ч гурван хэрчим нэг цэгт огтлолцдоггүй байв. Оройн цэгүүдээс ялгаатай нийт хэдэн огтлолцлын цэг үүсэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Билгүүн)

*Бодолт.* Хариу: 108.

Эхэлсэн цэгээ 1 гээд цагийн зүүний дагуу цэгүүдээ дугаарлая. Цэгүүдээ очсон дараалаар нь жагсаан бичээд тэднийгээ дараах маягаар өсдөг хэсгүүдэд хуваая.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | 61 | 63 | (32 too) |
| 2 | 2 | 6 | 10 | 14 | ... | ... | ... | ... | 58 | 62 | | | | (16 too) |
| 3 | 4 | 12 | 20 | 28 | ... | 52 | 60 | | | | | | | (8 too) |
| 4 | 8 | 24 | 40 | 56 | | | | | | | | | | (4 too) |
| 5 | 16 | 48 | | | | | | | | | | | | (2 too) |
| 6 | 32 | | | | | | | | | | | | | (1 too) |

Хэсэг доторх хэрчмүүдийг дотоод, хэсэг хоорондын хэрчмүүдийг гадаад гэе. Нэг хэсгийн дотоод хэрчмүүд огтлолцохгүй. 2-р хэсгээс эхлэн дотоод хэрчим бүртэй түүний урд хэсэг бүрийн яг 2 хэрчим огтлолцоно. Жишээлбэл $(12, 20)$ хэрчимтэй 1-р хэсгээс $(11, 13)$, $(19, 21)$ хэрчмүүд, 2-р хэсгээс $(10, 14)$, $(18, 22)$ хэрчмүүд огтлолцоно.

Иймд дотоод хэрмүүдийн огтлолцол $15 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 8 = 84$ байна.

Гадаад хэрчмүүд хоорондоо огтлолцохгүй. Одоо гадаад дотоод хэрчмүүдийн огтлолцлыг тоолъё.

$k \leq 4$ дугаар гадаад хэрчим $2 + 2 + \cdots + 2 + 1 = 2k - 1$ огтлолцолтой. Жишээлбэл 2-р гадаад хэрчим $(4, 62)$ ба энэ хэрчим 1-р хэсгээс $(3, 5)$, $(61, 63)$ хэрчмүүд, 2-р хэсгээс $(2, 6)$ хэрчимтэй огтлолцоно. Сүүлийн $k = 5$ дугаар гадаад хэрчим $(32, 48)$ нь харин 9 биш $2+2+2+2 = 8$ дотоод хэрчимтэй огтлолцоно.

Иймд гадаад дотоод хэрчмүүдийн огтлолцол $1 + 3 + 5 + 7 + 8 = 24$ байна. Тэгэхээр нийт 108 огтлолцол үүснэ.

**Бодлого Е2.** Хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг $O$, түүний орто төвийг $H$ гэе. $AC$ тал дээр $M$ цэгийг, $AB$ тал дээр $N$ цэгийг $AMHN$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар тэмдэглэв. Энэ параллелограммын диагоналиудын огтлолцлын цэгийг $P$ гэвэл $OP$ ба $MN$ шулуунууд хоорондоо перпендикуляр гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

*Бодолт.* $ABC$ гурвалжны $B$ ба $C$ оройнуудын өндрүүдийн суурыг харгалзан $B_1$ ба $C_1$ гэе. $AMHN$ параллеограмм тул $\triangle ABB_1 \sim \triangle NBH$ ба $\triangle ACC_1 \sim \triangle MCH$ байна. Нөгөө талаас, $\triangle ABB_1 \sim \triangle ACC_1$ тул $\triangle NBH \sim \triangle MCH$ байна. Иймд

$$\frac{NB}{MC} = \frac{NH}{MH}$$

байна. $AMHN$ параллеограмм тул $MH = AN$ ба $NH = AM$ байх ба дээрхэд орлуулбал

$$\frac{NB}{MC} = \frac{AM}{AN} \quad \text{буюу} \quad AM \cdot MC = AN \cdot NB$$

болно. $(ABC)$ тойргийн радиусыг $R$ гэвэл

$$R^2 - OM^2 = AM \cdot MC \quad \text{ба} \quad R^2 - ON^2 = AN \cdot NB$$

байх тул ($M, N$ цэгийн зэргүүд) $OM = ON$ буюу $OMN$ адил хажуут гурвалжин болно. Иймд $OP \perp MN$ байна.

**Бодлого E3.** Сөрөг биш $a$, $b$, $c$ тоонуудын аль ч хоёрын нийлбэр 1-ээс хэтэрдэггүй бол

$$\frac{2}{9} \leq (1-a-b)(1-b-c)(1-c-a) + (1-a-b)c^2 + (1-b-c)a^2 + (1-c-a)b^2 + 2abc \leq 1$$

байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.*

Дээд зааг: $x + b + c = y + c + a = z + a + b = 1$ гэвэл $x$, $y$, $z \geq 0$ байна. Эндээс

$$1 = (x+b+c)(y+c+a)(z+a+b) \geq xyz + zc^2 + yb^2 + xa^2 + 2abc$$

байна. $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ эсвэл $(0, 0, 1)$-ийн сэлгэмэл үед тэнцэтгэл биелнэ.

Доод зааг: $S = a + b + c$, $Q = ab + bc + ca$, $P = abc$ гэвэл голын илэрхийлэл

$$F = 1 - 2S + 2S^2 - 2SQ - Q + 6P$$

гэж бичигдэнэ. $(1-a-b) + (1-b-c) + (1-c-a) \geq 0$ гэдгээс $S \leq 3/2$ байна. Эндээс $(S-1)^2(7-4S) \geq 0$ буюу $7 - 18S + 15S^2 - 4S^3 \geq 0$ болно. Үүнийг

$$7 - 18S + 18S^2 \geq 6S^3 + S^2(3 - 2S)$$

гэж бичье. Шурын тэнцэтгэл бишүүдээр $S^3 \geq 4SQ - 9P$ ба $S^2 \geq 3Q$ байх тул $6S^3 + S^2(3 - 2S) \geq 6(4SQ - 9P) + 3Q(3 - 2S) = 18SQ + 9Q - 54P$ байна. Эндээс

$$9F - 2 = 7 - 18S + 18S^2 - 18SQ - 9Q + 54P \geq 0$$

болж доод зааг батлагдана. $(a, b, c) = (1/3, 1/3, 1/3)$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Бодлого E4.** Бодит тоон $(x, y, z)$ гурвалыг

$$x^3 + y + z = y^3 + z + x = z^3 + x + y = 0$$

нөхцөлийг хангадаг бол *сайн* гэе. Бүх сайн гурвалыг авч үзэхэд $x + y + z$ нийлбэр хэдэн ялгаатай утга авах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хариу: 3 *утга авна.*

$S = x + y + z = x(1 - x^2)$ гэж тэмдэглэе.

*Ядаж хоёр нь тэнцдэг үед:* $x = y$ гэвэл $x^3 + x + z = z^3 + 2x = 0$ гэдгээс

$$x(2 - x^2(x^2 + 1)^3) = 0$$

болно.

$x = 0$ үед $y = z = 0$ болох ба $(0, 0, 0)$ сайн тул $S_0 = 0$ утга авна.

$x > 0$ үед $P(x) = x^2(x^2 + 1)^3$ эрс өсөх ба $P(0) = 0$ ба $P(1) = 8$ тул $P(\lambda) = 2$ байх $\lambda > 0$ цор ганц олдох ба $\lambda < 1$ байна. Энэ үед $x = y = \lambda,\ \ z = -(\lambda^3 + \lambda)$ сайн ба $S_1 = \lambda(1 - \lambda^2) > 0$ утга авна.

$x < 0$ үед $(-x, -y, -z)$ гурвалыг авч үзэхэд өмнөх тохиолдолд шилжих тул $S_2 = -S_1$ утга авна.

Өөр боломжгүй.

*Хос хосоороо ялгаатай үед:* $(x^3 + y + z) - (y^3 + z + x) = (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0$ гэдгээс $x^2 + xy + y^2 = 1$ байна. Мөн ижлээр $y^2 + yz + z^2 = 1$ байна. Эндээс $(x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x - z)(x + y + z) = 0$ байх тул $S = S_0 = 0$ байхаас өөрцгүй. Энэ үед зөвхөн $\{x, y, z\} = \{-1, 0, 1\}$ сайн байхыг харах амархан.

**Бодлого E5.** Зусланд 62 хүүхэд байсан ба хүүхдүүд бүлгүүдэд хуваагддаг байв. Хүүхэд бүр яг нэг бүлэгт харьяалагдах ба бүлэг бүр сондгой тооны хүүхэдтэй. Хүүхдүүдийг нэг бүлгийн ямар ч хоёр хүүхдийн хооронд тэр бүлгийн биш ядаж хоёр хүүхэд зогсдог байхаар тойрог болгон зогсоож болдог бол зусланд хамгийн цөөндөө хэдэн бүлэг байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* Хариу: 4.

Аль ч дараалсан гурван хүүхэд гурван өөр бүлэгт харьяалагдана гэдгээс ядаж гурван бүлэг байгаа. Нийт тэгш тоотой хүүхэд байгаа ба бүлэг бүр сондгой тооны хүүхэдтэй тул бүлгийн тоо тэгш байна. Иймд ядаж 4 бүлэг байгаа.

Одоо нөхцөл хангах 4 бүлэгт хувааж болохыг харуулъя.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | | | | | | |
| B | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 |
| C | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 | 58 | 61 |
| D | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 |

Дээрх байгуулалтад 1 - 44 тоонуудыг 4 бүлэгт, 45 - 62 тоонуудыг 3 бүлэгт хоорондоо ижил зайтай байхаар хуваав. Энд $62 = 4 \cdot 11 + 3 \cdot 6$ болохыг ашиглав. Өөр олон байгуулалт байгаа.

Жич: $n$ хүүхэд байхад хамгийн цөөндөө хэдэн бүлэг байхыг сонирхож үзнэ үү.

**Бодлого E6.** Өгөгдсөн бүхэл тоон $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... төгсгөлгүй дарааллын бүх гишүүний хувьд $a_k$ нь $3^k k!$ тоонд хуваагддаг байв. Бүхэл тоон $b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... төгсгөлгүй дарааллыг

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_0 + a_1, \quad b_2 = a_0 + 2a_1 + a_2, \quad b_3 = a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3$$

гэх мэтчилэн $n \geq 0$ хувьд $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ гэж тодорхойлъё. Энд $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ биномын коэффициент.

$b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... дарааллын ядаж $m \geq 1$ ширхэг гишүүн тэгтэй тэнцүү байдаг бол энэ дарааллын бүх гишүүн $3^m$ тоонд хуваагдана гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* $k$ зэргийн $\binom{x}{k} = x(x-1)\dots(x-k+1)/k!$ олон гишүүнт 0, 1, ..., $k-1$ цэгүүд дээр 0 утга авдаг.

Одоо хангалттай том $N$ тооны хувьд $f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{x}{k} a_k$ гэвэл $0 \leq n \leq N$ хувьд

$$f_N(n) = \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = b_n$$

байна. Иймд энэ олон гишүүнтийг ядаж $m$ ширхэг бүхэл язгууртай гэж үзэж болно.

Цаашилбал $f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ гэвэл $s_{n,k}$ бүхэл тоонуудын хувьд $c_n = \sum_{k=n}^{N} s_{n,k} a_k / k!$ гэж бичигдэх ба өгсөн нөхцөлөөс $p^k \mid a_k/k!$ тул $p^n \mid c_n$ байна.

Иймд дараах өгүүлбэрийг харуулахад хангалттай. Энд бүхэл $a$ тоог хуваадаг $p$-ийн хамгийн их зэргийг $v_p(a)$ гэж тэмдэглэе.

> $f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ *бүхэл коэффициенттой олон гишүүнт ядаж* $m \geq 0$ *ширхэг бүхэл язгууртай бол дурын бүхэл* $n$ *тооны хувьд* $v_p(f(n)) \geq \min\limits_{k \geq m} v_p(c_k)$ *байна.*

$m = 0$ үед $f(n) = \sum_{k=0}^{N} c_k n^k$ гэдгээс илт.

Одоо $m \geq 1$ гэе. $\lambda$ бүхэл ба $f(x) = (x - \lambda) g(x)$ гээд $g(x)$ ядаж $m-1$ ширхэг бүхэл язгууртай бөгөөд $g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k x^k$ хувьд $v_p(g(n)) \geq \min\limits_{k \geq m} v_p(d_{k-1})$ биелдэг гэе.

$d_N = 0$ гэе. $k \geq 1$ үед $c_k = d_{k-1} - \lambda d_k$ гэдгээс

$$d_{k-1} = c_k + \lambda d_k = \cdots = c_k + \lambda c_{k+1} + \cdots + \lambda^{N-k} c_N$$

байна. Тухайлбал $v_p(d_{k-1}) \geq \min_{l \geq k} v_p(c_l)$ байна. Иймд

$$v_p(f(n)) \geq v_p(g(n)) \geq \min_{k \geq m} v_p(d_{k-1}) \geq \min_{k \geq m} v_p(c_k)$$

болж батлах зүйл мөрдөв.

## F ангилал (11–12 анги)

**Бодлого F1.** $a_1$, $a_2$ натурал тоонуудаар эхлээд $n \geq 2$ үед

$$a_{n+1} = \frac{a_2}{a_1} a_n - a_{n-1}$$

гэж тодорхойлогдсон $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... төгсгөлгүй дарааллын бүх гишүүд натурал тоо байв. $a_2/a_1$ харьцаа бүхэл гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $c = a_2/a_1 > 0$ гэе. $a_0 = 0$ гэвэл $n \geq 1$ хувьд $a_{n+1} = ca_n - a_{n-1}$ биелнэ.

$c = r/s$ ба $(r, s) = 1$ гэе.

*Индукц ашигласан бодолт:* Дурын $k \geq 0$ хувьд $s^k \mid a_0, a_1, a_2, \ldots$ гэж харуулбал $s = 1$ болж бодлого бодогдоно.

$k = 0$ үед илт. $k \geq 1$ үед үнэн гэе.

$n = 0$ үед илт. $n \geq 1$ үед $s(a_{n-1} + a_{n+1}) = ra_n$ ба $s^k \mid a_{n-1}, a_{n+1}$ гэдгээс $s^{k+1} \mid a_n$ байна. Иймд $k + 1$ үед үнэн. Индукцээр бүх $k \geq 1$ хувьд үнэн.

*ХИЕХ ашигласан бодолт:* Дарааллын бүх гишүүнийг хуваадаг хамгийн их натурал тоог $D$ гэе. $b_n = a_n/D$ дараалал

$$b_{n+1} = \frac{b_2}{b_1} b_n - b_{n-1}$$

нөхцөлийг хангах ба натурал тоонуудаас тогтоно. Энэ дарааллын хувьд бодлого бодоход хангалттай тул $D = 1$ гэж үзэж болно.

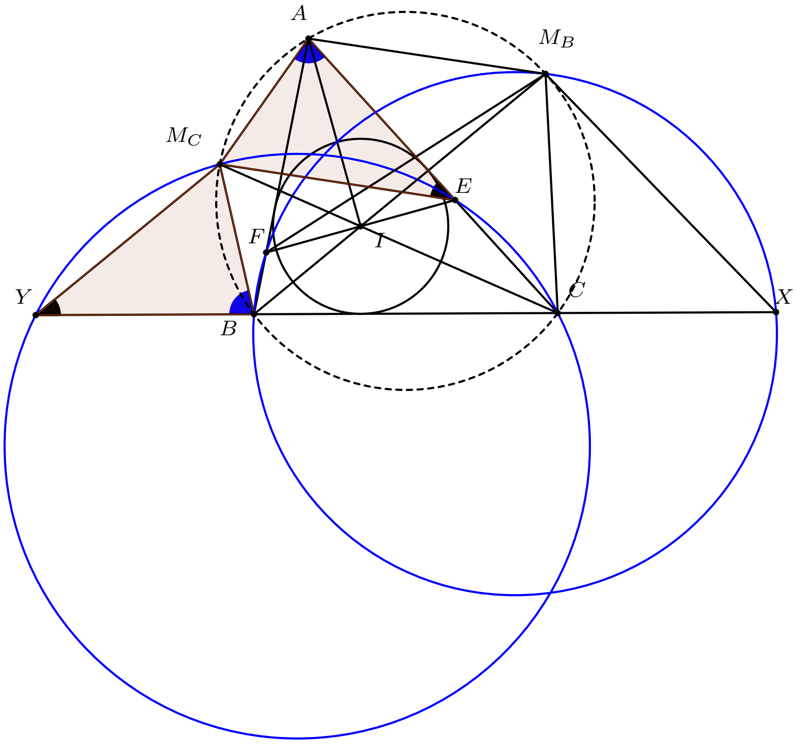
$n \geq 2$ үед $ca_n = \dfrac{ra_n}{s}$ бүхэл гэдгээс $s \mid a_n$ байна. Тодорхойлолтоос $s \mid a_1$ тул $s \mid D = 1$ буюу $s = 1$ болж бодлого бодогдов.

**Бодлого F2.** Элдэв талт, хурц өнцөгт $ABC$ гурвалжин өгөгдөв. $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$, гурвалжинд багтсан тойргийн төв $I$ байг. $AB$ тал дээр $F$ цэгийг, $AC$ тал дээр $E$ цэгийг $I$ цэг $EF$ хэрчмийн дундаж цэг байхаар авав. $BI$ шулуун болон $\omega$ тойргууд дахин $M_B \neq B$ цэгт, $CI$ шулуун болон $\omega$ тойргууд дахин $M_C \neq C$ цэгт огтлолцдог. Хэрэв $BFM_B$ гурвалжныг багтаасан тойрог $BC$ шулуунтай дахин $X \neq B$ цэгт, $CEM_C$ гурвалжныг багтаасан тойрог $BC$ шулуунтай дахин $Y \neq C$ цэгт огтлолцдог бол $BX = CY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

*Бодолт.* (Б. Улсболдын бодолт) $\angle M_CEA = \angle M_CYB$, $\angle M_CAE = \angle M_CBY$, $M_CB = M_CA$ тул ӨТӨ шинжээр $\triangle M_CEA = \triangle M_CYB$ болно. Нөгөө талаас, $\angle M_BXC = \angle M_BFA$, $\angle M_BCX = \angle M_BAF$, $M_BC = M_BA$ тул ӨТӨ шинжээр $\triangle M_BAF = \triangle M_BCX$ болно. Эндээс $YB = AE$,

$CX = AF$ болно. $AFE$ гурвалжны хувьд $FI = IE$, $\angle FAI = \angle IAE$ тул $AFE$ адил хажуут гурвалжин гэдгийг тооцвол $YB = CX$ болж батлагдана.



**Бодлого F3.** Нэгэн улс 62 арлаас бүрддэг. Зарим арлууд гүүрээр холбогдох ба гүүрээр холбогдсон арлуудыг хөрш гэнэ. Дараах нөхцөлүүд хангагддаг байг:

(i) арал бүр ядаж гурван хөрштэй,

(ii) хөрш хоёр арал бүр ядаж нэг ерөнхий хөрштэй,

(iii) аль ч хоёр нь хөрш байдаг дөрвөн арал олдохгүй.

Нийт гүүрний тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

*Бодолт.* Хариу: 100.

Арлуудыг орой, гүүрнүүдийг ирмэг гэж сэтгээд эхлээд 62 орой 100 ирмэгтэй нөхцөл хангах энгийн граф байгуулъя.

$k-1$ оройтой цикл ба түүний орой бүртэй хөрш байдаг нэг гол оройноос бүрдэх графыг $k$-дугуй граф $W_k$ гэдэг ба энэ граф $k$ орой $2(k-1)$ ирмэгтэй ба бодлогын нөхцөл хангана. Одоо 11 ширхэг $W_5$ ба 1 ширхэг $W_7$ авахад $11 \cdot 5 + 7 = 62$ оройтой $11 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 100$ ирмэгтэй жишээ үүснэ.

Одоо бодлогын нөхцөл хангах дурын $n$ оройтой графын ирмэгийн тоо $e \geq \lceil 8n/5 \rceil$ гэж харуулъя. $n = 62$ үед $\lceil 8 \cdot 62/5 \rceil = 100$ тул бодлого бодогдоно.

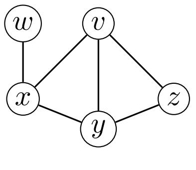
Графаа $G = (V, E)$ гээд $|V| = n$, $|E| = e$ гэе. Оройн зэргийг $d$ гэж тэмдэглээд $V_3 = \{v \,|\, d(v) = 3\}$, $V_4 = \{v \,|\, d(v) \geq 4\}$, $n_3 = |V_3|$, $n_4 = |V_4| = n - n_3$ гэе. Нэг орой нь $V_i$, нөгөө орой нь $V_j$-ийнх байдаг ирмэгийн тоог $e_{ij}$ гэе, тэгэхээр $e = e_{33} + e_{34} + e_{44}$.

Эхлээд *гурван зэрэгтэй оройн хөршүүд (гурав урттай) зам үүсгэнэ* гэж баталъя.

$v \in V_3$ оройн хөршүүдийг $N(v) = \{x, y, z\}$ гэе. Нөхцөлөөс $\{v, x, y, z\}$ оройнууд бүтэн граф үүсгэж болохгүй тул $\{x, y, z\}$ оройнууд гурвалжин үүсгэж болохгүй. Нөгөө талаас, $vx$ ирмэг ямар нэг гурвалжны тал болох ёстой ба $d(v) = 3$ тул гуравдагч орой $y$, $z$ хоёрын нэг байх ёстой. Иймд $x$ орой нөгөө хоёрынхоо ядаж нэгтэй хөрш байна, $y$, $z$ оройнуудын хувьд мөн адил тул $\{x, y, z\}$ зам байна.

Эндээс *гурван зэрэгтэй оройн хөршүүдийн ядаж нэг дөрвөөс багагүй зэрэгтэй* гэж мөрдөнө.

Үнэхээр, $v \in V_3$ ба $N(v) = \{x, y, z\}$ гэе. Дээрхээс $x - y - z$ зам гэж үзэж болно. $d(x) \geq 4$ бол батлах зүйл үгүй. Одоо $d(x) = 3$ гээд $N(x) = \{w, v, y\}$ гэе. Дээрхээс $\{w, v, y\}$ зам байна. Энд $d(v) = 3$ гэдгээс $vw$ хөрш биш тул $wy$ хөрш байна. Иймд $d(y) \geq 4$ байна.



$v \in V_3$ орой бүр $V_4$ дотор ядаж нэг хөрштэй тул $e_{34} \geq n_3$ байх ба эндээс $3n_3 = 2e_{33} + e_{34}$ болохыг ашиглавал $n_3 \geq e_{33}$ байна.

Одоо $S = \sum_{u \in V_4} d(u) = e_{34} + 2e_{44}$ нийлбэрийг үнэлье. Дээрхээс $S \geq e_{34} \geq n_3$ байна. Нөгөө талаас $S \geq 4n_4 = 4(n - n_3)$ байх нь илт. Эндээс $5S \geq 16(n - n_3) + n_3 = 16n - 15n_3$ тул $10e = 5(3n_3 + S) \geq 16n$ буюу $e \geq \lceil 8n/5 \rceil$ байна.

**Бодлого F4.** $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ бодит тоонууд өгөгдөв. $x_1 = 0,\ y_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 \\ y_{n+1} = b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 \end{cases}$$

гэж тодорхойлогдсон $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ дарааллуудын бүх гишүүний хувьд $y_n = x_n^3 + 1$ тэнцэтгэл биелдэг байв. $\{x_n\}$ дараалал зөвхөн төгсгөлөг тооны ялгаатай утга авах боломжтой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

*Бодолт.* $y_{n+1} - x_{n+1}^3 - 1 = 0$ илэрхийлэлд $y_n = x_n^3 + 1$ гэж орлуулбал $x_n$ бүр

$$f(x) = \big(b_1 x + b_2(x^3 + 1) + b_3\big) - \big(a_1 x + a_2(x^3 + 1) + a_3\big)^3 - 1$$

олон гишүүнтийн язгуур болох нь харагдана. Иймд $f \neq 0$ үед $\{x_n\}$ дараалал есөөс хэтрэхгүй ялгаатай утга авах боломжтой.

Одоо $f = \sum c_k x^k = 0$ гэе. $c_9 = 0$ гэдгээс $a_2 = 0$ болох ба $c_2 = 0$ гэдгээс $3a_1^2 a_3 = 0$ болно.

$a_1 = a_2 = 0$ үед $x_{n+1} = a_3$ тул $\{x_n\}$ хоёроос хэтрэхгүй утга авна.

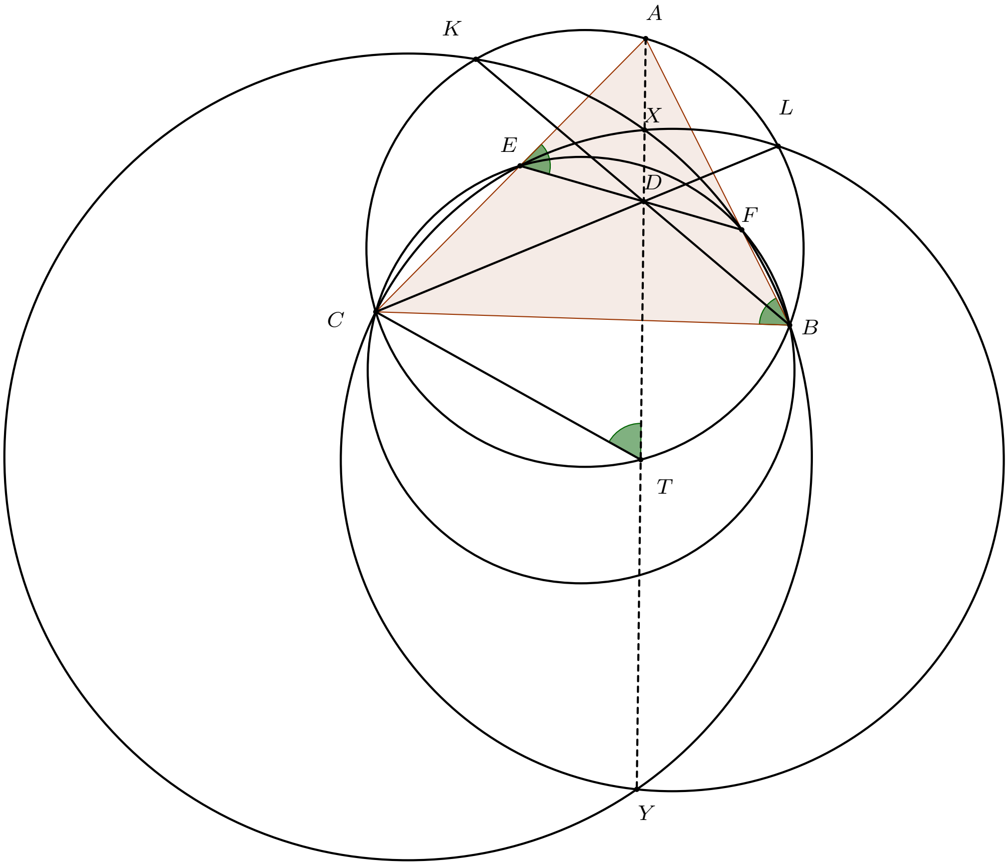
$a_2 = a_3 = 0$ үед $x_{n+1} = a_1 x_n = \cdots = a_1^n x_1 = 0$ тул $\{x_n\}$ нэг утга авна.

Аль ч тохиолдолд $\{x_n\}$ төгсгөлөг тооны ялгаатай утга авна.

**Бодлого F5.** $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ өгөгдөв. $B$ болон $C$ цэгийг дайрсан тойрог $AB$ хэрчмийг $F$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $E$ цэгт огтолдог байг. $EF$ хэрчим дээрх $D$ цэгийн хувьд $BD$ шулуун $\omega$ тойргийг $B$ цэгээс ялгаатай $K$ цэгт, $CD$ шулуун $\omega$ тойргийг $C$ цэгээс ялгаатай $L$ цэгт огтолдог гэе. Хэрэв $BFK$ гурвалжныг багтаасан тойрог болон $CEL$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $X$, $Y$ ялгаатай хоёр цэгээр огтлолцдог бол $\omega$ тойрог $XY$ хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

*Бодолт.* (Б. Зоригтбаатарын бодолт)



$XYZ$ гурвалжныг багтаасан тойргийг $\omega(XYZ)$ гэж тэмдэглэе. $AD$ шулуун $\omega$ тойргийг огтлох хоёр дах цэгийг $T$ гэе. $CEFB$ дөрвөн өнцөгтийн багтаасан тойргийг $\omega_1$ гэе. $A$ цэг ба $\omega_1$ тойргийн хувьд огтлогч шүргэгчийн теорем бичвэл $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ тул $\omega(CEL)$, $\omega(KFB)$ тойргуудын хувь дах $A$ цэгийн зэрэг тэнцүү болж, $A$ цэг эдгээр тойргуудын радикал тэнхлэг дээр оршино. Иймд $A \in (XY)$ болно. $\omega$ тойрог ба $D$ цэгийн хувьд огтлолцсон хөвчүүдийн тухай теоремоор $CD \cdot DL = BD \cdot DK$ тул $\omega(CEL)$, $\omega(KFB)$ тойргуудын хувь дах $D$ цэгийн зэрэг тэнцүү тул $D$ цэг эдгээр тойргийн радикал тэнхлэг дээр оршино. Иймд $D \in (XY)$ болно. Эндээс

$$XD \cdot DY = KD \cdot DB = AD \cdot DT \Rightarrow \frac{XD}{AD} = \frac{DT}{DY} = \frac{XD + DT}{AD + DY} = \frac{XT}{AY} \tag{1}$$

болно. $\angle DTC = \angle ATC = \angle ABC = \angle FBC = \angle DEA$ тул $CEDT$ багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Иймд

$$AX \cdot AY = AC \cdot AE = AD \cdot AT \Rightarrow \frac{AX}{AD} = \frac{AT}{AY} \tag{2}$$

болно. (1) ба (2)-оос

$$1 = \frac{AX}{AD} + \frac{XD}{AD} = \frac{AT}{AY} + \frac{XT}{AY} = \frac{AT + XT}{AY}$$

буюу $AX + XT = AY \iff XT = AY - AX = TY$ болж $T$ цэг $XY$ хэрчмийн дундаж цэг болох нь батлагдав.

**Бодлого F6.** Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. $f(1) = 1$ байдаг бөгөөд дурын $n$, $m$ натурал тоонуудын хувьд

$$f(f(n)f(n+m)) = f(f(n)f(m)) + f(f(n))^2$$

байдаг $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ функцийг *хонгор* функц гэж нэрлэе.

$f$ хонгор функцийн хувьд $f(p) < p$ байдаг $p$ анхны тоог *онцгой* гэе. Эхний 2026 анхны тоон дотор хонгор функц хамгийн ихдээ хэдэн онцгой анхны тоотой байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: М. Ханзул)

*Бодолт.* Хариу: 1013.

Эхний 2026 анхны тоон дотор яг 1013 онцгой анхны тоотой $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ хонгор функц оршин байдгийг эхлээд харуулъя. $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$ бүх анхны тооны дараалал байг. Бүх $k \geq 1$ хувьд $g(p_{2k}) = p_{2k-1}$ ба $g(p_{2k-1}) = p_{2k}$ гэж тодорхойлоод, дурын $n$, $m \geq 1$ тооны хувьд $g(nm) = g(n)g(m)$ (мультипликатив) байхаар сонгоё. Мэдээж $g(1) = 1$. Дурын $p$ анхны тооны хувьд $g(g(p)) = p$ бөгөөд $g$ нь мультипликатив тул $g \circ g$ нь мөн мультипликатив байна. Иймд $g(g(n)) = n$ болно. Эндээс

$$\begin{aligned} g(g(n)g(n+m)) &= g(g(n))g(g(n+m)) = n(n+m) \\ g(g(n)g(m)) + g(g(n))^2 &= g(g(n))g(g(m)) + n^2 = nm + n^2 \end{aligned}$$

болох тул $g$ хонгор функц байна. Байгуулалтаас $p_2$, $p_4$, ..., $p_{2026}$ онцгой ба $p_1$, $p_3$, ..., $p_{2025}$ онцгой биш.

Одоо дурын хонгор функц эхний 2026 анхны тоон дотор хамгийн ихдээ 1013 онцгой анхны тоотой байхыг баталъя. Дурын хонгор $f$ функцийг авч үзье.

Юуны өмнө $n \to 1$ гэж орлуулбал $f(f(m+1)) = f(f(m)) + 1$ болох ба $f(f(1)) = 1$ тул бүх $m \geq 1$ хувьд $f(f(m)) = m$ болно. Иймд $f$ нь инволюци (өөртөө урвуу) тул биектив функц юм. Одоо $F(n,m) = f(f(n)f(m)) - nm$ гэж тодорхойлъё. Энд $F(n,m) = 0$ бол $f(f(n)f(m)) = nm$ гэдгээс $f(nm) = f(n)f(m)$ болох тул $F(f(n), f(m)) = 0$ байна. Мөн өгөгдсөн нөхцөлийг дараах байдлаар бичиж болно:

$$f(f(n)f(n+m)) - n(n+m) = f(f(n)f(m)) - nm$$

буюу $F(n, n+m) = F(n,m)$. Мөн $F(n,m) = F(m,n)$ байх нь илэрхий бөгөөд Евклидийн алгоритм ёсоор $d = \gcd(n,m)$ үед:

$$f(f(n)f(m)) - nm = F(n,m) = F(d,d) = f(f(d)^2) - d^2$$

болно. Тухайлбал $n$, $m$ харилцан анхны бол $F(n,m) = F(1,1) = f(f(1)^2) - 1 = 0$ гэдгээс $f(nm) = f(n)f(m)$ байна.

Одоо дурын $p$ анхны тооны хувьд $p \nmid f(p)$ бол $f(p)$ мөн анхны тоо байна гэж харуулъя.

$q$, $r$ харилцан анхны тоонуудын хувьд $f(p) = qr$ гэж бичигддэг бол $p = f(f(p)) = f(qr) = f(q)f(r)$ болох ба эндээс $f(q) = 1$ эсвэл $f(r) = 1$ болно. $f$ инъектив ба $f(1) = 1$ тул $q = 1$ эсвэл $r = 1$ байна. Иймд $q$ анхны тооны хувьд $f(p) = q^l$ гэж бичигдэнэ. Инволюцаас $f(q^l) = p$ байна.

Эхлээд $p \nmid f(q)$ гэж үзье. Энэ үед $p$, $f(q)$ харилцан анхны тул $F(p, f(q)) = 0$ байна. Эндээс $F(q, q^s) = F(q,q) = F(q^l, q) = F(f(p), q) = 0$ болох тул $f(q)f(q^s) = f(q^{s+1})$ байна. Индукцээр $f(q^l) = f(q)^l$ болох ба $p = f(q^l) = f(q)^l$ гэдгээс $l = 1$ ба $f(q) = p$ болж $p \nmid f(q)$ гэдэгт зөрчинө.

Иймд $p \mid f(q)$ гэж үзье. Тэгвэл дээрхтэй ижлээр $f(q) = p^s$ гэж бичигдэнэ. Нөхцөл ёсоор:

$$f(f(q)f(qp)) - q^2p = F(q, qp) = F(q, q) = f(f(q)^2) - q^2$$

байна. $p \nmid f(p)$ гэдгээс $p \neq q$ ба $f(p) = q^l$, $f(q) = p^s$ харилцан анхны тул

$$f(f(q)f(qp)) = f(f(q)^2 f(p)) = f(f(q)^2)f(f(p)) = f(f(q)^2)p$$

байна. Дээрхтэй харьцуулбал $(p-1)(f(f(q)^2) - q^2) = 0$ болох ба $p \neq 1$ тул $f(f(q)^2) = q^2$ болно. Эндээс $F(q, q^t) = F(q, q) = 0$ болох тул $f(q)f(q^t) = f(q^{t+1})$ байна. Эндээс $p = f(f(p)) = f(q^l) = f(q)^l$ болох ба $p$ нь анхны тоо тул $l = 1$ ба $f(q) = p$ байна.

Одоо үндсэн бодлогодоо эргэн оръё. Дурын $p \leq p_{2026}$ онцгой анхны тооны хувьд $p \nmid f(p)$ тул дээрхээс $q = f(p) < p$ анхны тоо байна. Энд $f(q) = p > q$ тул $q$ онцгой биш ба $q < p \leq p_{2026}$ байна. Иймд эхний 2026 анхны тоон доторх онцгой анхны тоо $p$ бүрд эхний 2026 анхны тоонд багтах онцгой биш $q$ анхны тоо харгалзаж байна. Энэ нь эхний 2026 анхны тоон дотор хамгийн ихдээ 1013 онцгой анхны тоо байж болохыг харуулж байна.

## Т ангилал (Багш)

**Бодлого Т1.** Хос хосоороо ялгаатай $a$, $b$, $c$, $d$ натурал тоонууд бүгд 2026-аас хэтэрдэггүй бол

$$m = \min\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$

тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? Энд $x$, $y$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $(x, y)$ гэж тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хариу: 506.

$(a, b, c, d) = (506, 1012, 1518, 2024)$ үед $m = 506$ байна.

Одоо $m \leq 506$ гэж харуулъя. Эсрэгээс нь $m \geq 507$ байх $a$, $b$, $c$, $d$ олддог гэе. $n = 2026$ гэвэл $4m > n$ байна.

$(a, b) = m$ гэж үзэж болно. $m \mid a, b < 4m$ гэдгээс $a$, $b \in \{m, 2m, 3m\}$ байна. $a \neq b$ тул ядаж нэг нь $\{m, 2m\}$-д орно. $b \in \{m, 2m\}$ гэе. $k = (b, c)$ гэвэл $m \leq k \mid b \mid 2m$ гэдгээс $k = m$, $2m$ байх ба $k \mid c < 4m$ гэдгээс $c \in \{m, 2m, 3m\}$ байна. Иймд $\{a, b, c\} = \{m, 2m, 3m\}$ байна. $a \neq c$ тул ядаж нэг нь $\{m, 2m\}$-д орно. Аль ч тохиолдолд дээрхтэй ижлээр $d \in \{m, 2m, 3m\}$ болж бүгд ялгаатай гэдэгт зөрчинө.

**Бодлого Т2.** Олимпиадад оролцохоор ирсэн есөн багш үдийн цайны үеэр нэг ширээнд суужээ. Тэгэхэд багш бүр гурав эсвэл дөрвөн багштай танил байв. Мөн ямар ч хоёр танил багшийн хувьд хоёулантай нь танил багш ядаж нэг байв. Гэхдээ бүгд хос хосоороо танил дөрвөн багш байхгүй байв.

Хамгийн багадаа хэдэн танил хос байж болох вэ? Энд танилын харилцаа тэгш хэмтэй.

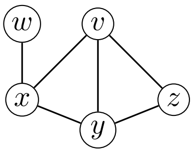
(Дэвшүүлсэн: Б. Билэгдэмбэрэл)

*Бодолт.* Хариу: 15.

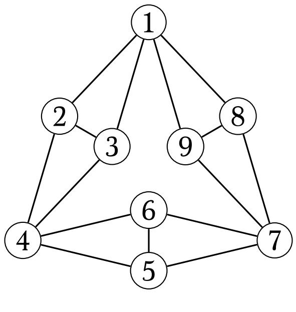
Гурван найзтэй багшийн тоог $n_3$, дөрвөн найзтай багшийн тоог $n_4$ гээд нийт багш хосын тоог $e$ гэе.

Тэгвэл $n_3 + n_4 = 9$ ба $2e = 3n_3 + 4n_4 = 27 + n_4$ байна. Тухайлбал $e \geq 14$ байна.

$e = 14$ гэвэл $n_4 = 1$ байна. Тэгвэл гурван танилтай ба танилууд нь бүгд гурван танилтай багш олдоно. Энэ нь боломжгүй. Үнэхээр $v$, $x$, $y$, $z$ багш нар бүгд гурван танилтай ба $vx$, $vy$, $vz$ танил гэе. Бүгд хос хосоороо танил биш тул $xz$ танил биш гэж үзэж болно. Энэ үед ерөнхий танилын нөхцөлөөс $xy$, $yz$ танил болох тул $y$ эднээс өөр танилгүй. $x$-ийн үлдсэн танилыг $w$ гэвэл $xw$ ерөнхий танилгүй болж зөрчил гарна.



Иймд $e \geq 15$ байна. $e = 15$ байх жишээ олдоно.



**Бодлого T3.** $(a_n)_{n\geq 1}$ натурал тоон дарааллын бүх гишүүдийн хувьд $a_n \leq 2026^n$ байв. Дурын $k$, $m$ натурал тоонуудын хувьд

$$\frac{a_{k+m}}{a_k + a_m}$$

харьцаа бүхэл байдаг бол $a_n = na_1$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

*Бодолт.* Эхлээд индукцээр $a_1 \mid a_n$ гэж харуулъя. $n = 1$ үед үнэн ба $n$ үед үнэн бол $a_1 \mid a_n + a_1 \mid a_{n+1}$ гэдгээс $n+1$ үед үнэн. Одоо $a_n/a_1$ дарааллыг авч үзэх замаар $a_1 = 1$ гэж үзэж болно. Энэ үед $a_n + 1 \mid a_{n+1}$ гэдгээс дараалал эрс өсөх ба тухайлбал $a_n \geq n$ байна.

Эсрэгээс нь $a_d \neq d$ байх $d \geq 2$ олддог гээд хамгийн багыг нь авбал $a_d > d$ ба $a_{d-1} = d - 1$ байна.

$k_n$, $l_n$ натурал тоонуудын хувьд $a_{n+d} = k_n(a_{n+1} + d - 1)$ ба $a_{n+1} = l_n(a_n + 1)$ гэж бичье. Тэгвэл $a_{n+d} = k_n(l_n(a_n + 1) + d - 1)$ болох ба

$$k_n l_n(a_n + a_d) - a_{n+d} = k_n(l_n(a_d - 1) - (d-1)) \geq k_n(a_d - d) \geq 1$$

натурал тоо $a_n + a_d$ нийлбэрт хуваагдана. Эндээс

$$a_n < a_n + a_d \leq k_n(l_n(a_d - 1) - (d-1)) \leq k_n l_n a_d$$

болох тул $a_{n+d} \geq k_n l_n a_n \geq a_n^2/a_d$ байна.

Одоо $m$ дугаарыг $a_m \geq \max\{a_d^2, 2026\}$ байхаар сонгоё. Тэгвэл $a_{m+d} \geq a_m^{1.5}$ болно. Индукцээр $a_{m+2d} \geq a_{m+d}^{1.5} \geq a_m^{1.5^2}$ гэх мэтчилэн дурын $k$ хувьд $a_{m+kd} \geq a_m^{1.5^k} \geq 2026^{1.5^k}$ болно. Энд $k$ хангалттай том үед $1.5^k \geq m + kd$ байх тул зөрчил гарлаа.

**Бодлого T4.** Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. $f$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ буулгалтуудын хувьд дурын $n \in \mathbb{N}$ тоог авахад

$$f(f(n)) = 2f(n), \qquad g(g(n)) = 2g(n), \qquad f(n) + g(n) = 4n + 1$$

байдаг байв. Дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $|f(n) - g(n)| = 1$ байна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Хүчит индукцээр дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}$ гэж харуулъя. Тэгвэл $|f(n) - g(n)| = 1$ болох нь илт. Энд $g(n) = 4n + 1 - f(n)$ тул $f(n) \in \{2n, 2n+1\}$ гэж харуулахад хангалттай.

$n = 1$ гэе. $f(f(1)) = 2f(1))$ гэдгээс $f(1) \neq 1$ ба мөн ижлээр $g(1) \neq 1$ байна. Цаашилбал $f(1) + g(1) = 5$ тул $\{f(1), g(1)\} = \{2, 3\}$ байна.

Дурын $1 \leq k < n$ хувьд $\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}$ биелдэг гэе. Одоо $k = \lfloor n/2 \rfloor$ гэвэл $n \in \{2k, 2k+1\} = \{f(k), g(k)\}$ байна.

$n = f(k)$ үед $f(n) = f(f(k)) = 2f(k) = 2n$ байна.

$n = g(k)$ үед $f(n) = f(g(k)) = 4g(k) + 1 - g(g(k)) = 2g(k) + 1 = 2n + 1$ байна.

Аль ч тохиолдолд $f(n) \in \{2n, 2n+1\}$ байна. Иймд дурын $n$ хувьд үнэн.

Жич: өгсөн чанартай функцүүд оршин байх ба $f(1) \leq g(1)$ гэвэл цор ганц хос байна.

**Бодлого T5.** $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжныг багтаасан тойрог $\omega$ өгөгдөв. $B$ болон $C$ цэгийг дайрсан тойрог $AB$ хэрчмийг $F$ цэгт, $AC$ хэрчмийг $E$ цэгт огтолдог байг. $EF$ хэрчим дээрх $D$ цэгийн хувьд $BD$ шулуун $\omega$ тойргийг $B$ цэгээс ялгаатай $K$ цэгт, $CD$ шулуун $\omega$ тойргийг $C$ цэгээс ялгаатай $L$ цэгт огтолдог гэе. Хэрэв $BFK$ гурвалжныг багтаасан тойрог болон $CEL$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $X$, $Y$ ялгаатай хоёр цэгээр огтлолцдог бол $\omega$ тойрог $XY$ хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бэлгүтэй)

*Бодолт.* **F5** бодолтыг харна уу.

**Бодлого T6.** Бүтэн квадрат тооноос нэгээс ихгүй зөрдөг натурал тоог *бараг квадрат тоо* гээд бараг квадрат тоонуудыг 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15, ... гэх мэтчилэн өсөх эрэмбээр дараалуулан бичье. Дараалсан хэдэн бараг квадрат тооны нийлбэрт тавигддаггүй тоо төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* $k$ дахь бараг квадрат тоог $a_k$ гэвэл $a_k \geq k^2/9$ байхыг шалгах хэцүү биш.

$n$ тоо $f(n)$ янзаар дараалсан хэдэн бараг квадрат тооны нийлбэрт тавигддаг гэе. Нийлбэр нь $n$-ээс хэтэрдэггүй дараалсан хэдэн бараг квадрат тоо $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ нийлбэрт нэг удаа тоологдоно.

Дараалсан $r$ ширхэг бараг квадрат тооноос тогтох олонлогийн тоо

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+r-1} \leq n$$

байдаг хамгийн их $k$ тооноос хэтрэхгүй. Энд $ra_k \leq n$ гэдгээс $k \leq 3\sqrt{n/r} \leq 3\sqrt{n}$ байна.

Харин $r$ нь $a_1 + a_2 + \cdots + a_m \leq n$ байдаг хамгийн их $m$ тооноос хэтрэхгүй ба

$$\sum_{k=1}^{m} a_i \geq \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{2 \cdot 27} \geq \frac{m^3}{3^3}$$

тул $m \leq 3\sqrt[3]{n}$ байна. Эндээс

$$f(1) + \cdots + f(n) \leq 3\sqrt[3]{n} \cdot 3\sqrt{n} = 9\,n^{\frac{5}{6}}$$

болно. Иймд төгсгөлгүй олон $n$ тооны хувьд $f(n) = 0$ байна.

# Олон Улсын Мэдээ

## Европын Охидын Математикийн Олимпиад

Европын Охидын Математикийн 14 дүгээр Олимпиад Бүгд Найрамдах Косово улсын Приштина хотод 2025 оны 4 сарын 11-17 өдрүүдэд байгуулагдав. Олимпиадад Монгол улсаа төлөөлж оролцох шигшээ багийг 2025 оны 1 сарын 25, 26 ба 2 сарын 8, 9 өдрүүдэд зохион байгуулсан хоёр сорилын нийлбэр дүнгээр сонгон шалгаруулав. Багийн ахлагчаар Т. Хулан, дэд ахлагчаар С. Цогзолмаа, туслахаар Ү. Отгонбаяр ажиллав.

Уг олимпиадад оролцогч нар 2 өдрийн турш тус бүр 3 бодлогыг 4 цаг 30 минутын хугацаанд бодож өрсөлддөг. Энэ жилийн хуваарь:

| Огноо | Үйл ажиллагаа |
|---|---|
| 4.11 | Бүртгэл |
| 4.12 | Нээлт |
| 4.13 | Бодолт |
| 4.14 | Бодолт |
| 4.15 | Хамгаалалт |
| 4.16 | Хаалт |

Хоёр өдрийн бодолтын дүнг манай баг 3 хүрэл медаль, 1 тусгай шагнал авч багаараа 33-р байранд орлоо.

| Овог | Нэр | Сургууль | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | Нийт | Амжилт |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Наранбаатар | Болор | Эрдмийн Хишиг | 7 | 0 | 2 | 7 | 1 | 0 | 17 | Хүрэл медаль |
| Алтангэрэл | Ану | 11 дүгээр сургууль | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 16 | Хүрэл медаль |
| Анхбаяр | Мишээл | Орчлон | 7 | 1 | 0 | 7 | 1 | 0 | 16 | Хүрэл медаль |
| Банди | Оюунбилиг | Хархорин | 2 | 0 | 0 | 7 | 1 | 0 | 10 | Тусгай шагнал |
| Баг | | | 23 | 2 | 2 | 28 | 4 | 0 | 59 | 33-р байр |

Ингээд манай улсын баг энэ чухал олимпиадаас нийт 2 мөнгөн медаль, 13 хүрэл медаль, 4 тусгай шагналтай боллоо.

*2025 оны 4 сарын 13, Ням*

**Бодлого 1.** Натурал $N$ тооноос бага, $N$-тэй харилцан анхны бүх натурал тоог $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ гэе. Дурын $1 \leq i \leq m-1$ дугаарын хувьд

$$\text{ХИЕХ}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

байдаг бүх $N \geq 3$ натурал тоог ол.

*Энд $a$, $b$ тоонуудыг хоёуланг нь хуваадаг хамгийн их натурал тоог ХИЕХ$(a, b)$ гэж тэмдэглэв. Бүхэл $a$, $b$ тоонуудыг ХИЕХ$(a, b) = 1$ үед харилцан анхны гэдэг.*

**Бодлого 2.** Эрс өсдөг $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ натурал тоон төгсгөлгүй дарааллыг, дурын натурал $n$ тооны хувьд эхний $a_n$ гишүүний арифметик дундаж $a_n$-тэй тэнцүү байдаг бол *төвийн* гэнэ. Дараах чанартай $b_1$, $b_2$, $b_3$, $\ldots$ натурал тоон төгсгөлгүй дараалал олдохыг батал:

> Дурын $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$ төвийн дарааллын хувьд $a_n = b_n$ байдаг төгсгөлгүй олон натурал $n$ оршин байна.

**Бодлого 3.** $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжин өгөгдөв. $B$, $D$, $E$, $C$ цэгүүд энэ дараалллаараа нэг шулуун дээр орших ба $BD = DE = EC$ байв. $AD$ талын дунджийг $M$ гээд, $AE$ талын дунджийг $N$ гэе. $ADE$ гурвалжны ортотөвийг $H$ гэе. $BM$ шулуун дээр $P$ цэгийг, $D$, $H$, $M$, $P$ цэгүүд хос хосоороо ялгаатай ба нэг тойрог дээр орших байхаар авав. Мөн $CN$ шулуун дээр $Q$ цэгийг, $E$, $H$, $N$, $Q$ цэгүүд хос хосоороо ялгаатай ба нэг тойрог дээр оршиж байхаар авав. $P$, $Q$, $N$, $M$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

*Гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг ортотөв гэдэг.*

Хугацаа: 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноотой.

EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Mongolian**

Day: 2

*2025 оны 4 сарын 14, Даваа*

**Бодлого 4.** $AB \neq AC$ байх $ABC$ хурц өнцөгт гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг $I$ гэе. $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог $BI$ шулуунтай $P \neq B$ цэгт, $CI$ шулуунтай $Q \neq C$ цэгт огтлолцоно. $R$, $S$ цэгүүдийг $AQRB$ болон $ACSP$ параллелограм байхаар авав ($AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$, $AP \parallel CS$). $RB$, $SC$ шулуунууд $T$ цэгт огтлолцдог гэе. $R$, $S$, $T$, $I$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

**Бодлого 5.** $n > 1$ бүхэл тоо байг. $n^2$ нүдтэй $n \times n$ хөлгийн нүд бүрд дээшээ, доошоо, баруун тийшээ эсвэл зүүн тийшээ заасан сум байрлуулсныг *байрлал* гэе. Эхний байрлал өгөгдөхөд, Турбо эмгэн хумс аль нэг нүднээс эхлэн, нүднээс нүд дамжин нүүнэ. Нүүдэл бүрд, Турбо байгаа нүднийхээ сумны чиглэлд нэг нүд явна (хөлгөөс гарч болно). Нүүдэл болгоны дараа бүх нүдэн дэх сум цагийн зүүний эсрэг 90° эргэнэ. Хэрэв Турбо ямар нэг нүднээс эхлэхэд, хөлгөөс гаралгүйгээр бүх нүдээр яг нэг дайраад эргээд тэр нүдэндээ буцаж ирдэг бол уг нүдийг *сайн* гэе. Сайн нүд хамгийн олондоо хэд байхыг $n$-ээс хамааруулж ол. Энд бүх боломжит эхний байрлалыг авч үзнэ.

**Бодлого 6.** Мөр болгон дахь тоонуудын нийлбэр 1, мөн багана болгон дахь тоонуудын нийлбэр 1 байхаар $2025 \times 2025$ хүснэгтийн нүд бүрд сөрөг биш бодит тоо бичив. $i$-р мөрд бичигдсэн хамгийн их тоог $r_i$ гэж тэмдэглээд, $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$ гэе. Мөн $i$-р баганад бичигдсэн хамгийн их тоог $c_i$ гэж тэмдэглээд, $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$ гэе.
$\frac{R}{C}$ илэрхийллийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Language: Монгол

Цаг: 4 цаг 30 минут
Бодлого бүр 7 оноотой

## Олон Улсын Математикийн Зуны Сургалт

Австрали улсад зохион байгуулагдах Олон Улсын Математикийн Олимпиадад оролцох баг маань Бээжин хотын Математикийн Шинжлэх Ухааны Хүрээлэн дээр зохион байгуулагдсан Олон Улсын Математикийн Зуны Сургалт (IMSC)-д хамрагдан бэлтгэлээ хангав. Энд дэлхийн шилдэг 30 гаран баг 3 долоо хоногийн турш хамтарсан бэлтгэл хийв.

Багийн ахлагчаар Ү.Отгонбаяр, дэд ахлагчаар Т.Базар, багшаар Х.Нурсолтан ажиллав. Багш нар маань бусад багуудад хичээл орж, тэдний багш нартай туршлага солилцож, хамтын ажиллагаагаа өргөжүүллээ.

7 сарын 5 – 6 өдрүүдэд зохион байгуулагдсан зуны сургалтын хаалтын олимпиадад манай баг амжилттай оролцож багаараа 3-р байр эзэллээ. Энэ зуны сургалтын үндсэн багшаар ажилласан Х. Нурсолтанд талархал илэрхийлье.

| Овог | Нэр | Сургууль | Оноо | Шагнал |
|---|---|---|---|---|
| Арвис | Ивээл | 11 дүгээр сургууль | 35 | 1-р байр |
| Сонор | Манлай | Сант | 29 | 2-р байр |
| Батлхагва | Тэнүүнсайхан | Шинэ үе | 24 | 2-р байр |
| Болдбаатар | Төвшиндалай | 11 дүгээр сургууль | 21 | 3-р байр |
| Даваадорж | Хүслэн | Сант | 19 | 3-р байр |
| Баяр | Бэлгүтэй | 11 дүгээр сургууль | 17 | 3-р байр |
| | Монгол | | 145 | 3-р байр |

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: `https://www.imscprogram.com`

## Олон Улсын Зуны 3-р Сургалт (IMSC2025)

# Олимпиад-I өдөр

**Огноо:** Бямба, 2025.07.05
**Хугацаа:** 09:30-14:00
**Бодлогын тоо:** 3
**Нийт оноо:** 21

**Бодлого 1.** $D$ цэгийг $ABC$ гурвалжны $BC$ тал дээр авав. $ABD$ гурвалжныг багтаасан тойрог $AC$ талыг $E \neq A$ цэгт огтолдог, $ACD$ гурвалжныг багтаасан тойрог $AB$ талыг $F \neq A$ цэгт огтолдог байг. $BDF$, $CDE$ гурвалжныг багтаасан тойргууд дахин $X \neq D$ цэгт огтлолцдог, $AEF$, $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойргууд дахин $Y \neq A$ цэгт огтлолцдог гэе.

$XY$ шулуун $D$ цэгийн сонголтоос үл хамаарах тогтмол цэг дайрна гэж батал.

**Бодлого 2.** $n \geqslant 3$ натурал тоо өгөгдөв. Сөрөг биш $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ тоонууд $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ байхаар гүйх үед

$$\max\{x_i + \sqrt{x_{i+1}x_{i+2}} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгыг ол *(энд $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ гэв).*

**Бодлого 3.** Анар, Болд хоёр $K_{2026}$ дээр дараах тоглоом тоглов. Анараас эхлээд ээлжлэн үйлдэл хийнэ. Эхлээд бүх ирмэг будагдаагүй байна. Анар өөрийн ээлж дээр будагдаагүй ирмэг нэгийг сонгон улаан өнгөөр будна. Болд өөрийн ээлж дээр 1, 2, эсвэл 3 ширхэг будагдаагүй ирмэг сонгон бүгдийг нь хөхөөр будна. Бүх ирмэг будагдахад тоглоом дуусна. Хамгийн том улаан кликийн оройн тоог $r$ гээд хамгийн том хөх кликийн оройн тоог $b$ гэе. Тоглоом дуусахад $b > r$ бол Болд хожно. Анар яаж тоглохоос үл хамааран Болд хожиж чадна гэж батал.

*Энд: $n$ оройтой бүтэн графыг $K_n$ гэж тэмдэглэнэ. Улаан клик гэж бүх ирмэг нь улаан байдаг дэд бүтэн графыг хэлнэ. Мөн ижлээр, хөх клик гэж бүх ирмэг нь хөх байдаг дэд бүтэн графыг хэлнэ.*

## Олон Улсын Зуны 3-р Сургалт (IMSC2025)

# Олимпиад-II өдөр

**Огноо:** Ням, 2025.07.06 **Хугацаа:** 09:30-14:00
**Бодлогын тоо:** 3 **Нийт оноо:** 21

**Бодлого 4.** $15°$, $75°$, $90°$ өнцгүүдтэй төгсгөлөг ширхэг гурвалжинд (тэнцүү байх албагүй) хувааж болдог гүдгэр $n$-өнцөгт оршин байдаг бүх $n$ натурал тоог ол.

**Бодлого 5.** Бүхэл коэффициенттой, тэг биш $Q(x)$ олон гишүүнт өгөгдөв.

Дурын $p$ анхны тооны хувьд

$$p \mid \sigma(n)+1 \text{ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл } p \mid Q(n)$$

байдаг $n$ натурал тоог *онцгой* гэе. $n$ болон $n+1$ тоонууд нэгэн зэрэг онцгой биш байдаг натурал $n$ тоо төгсгөлгүй олон олдохыг харуул.

*Энд $n$ тооны натурал тоон хуваагчдын нийлбэрийг $\sigma(n)$ гэж тэмдэглэв.*

**Бодлого 6.** Хурц өнцөгт, элдэв тал $ABC$ гурвалжны орто төвийг $H$, багтаасан тойргийг $\omega$ гэе. $\omega$ тойргийн $A$ цэгийг агуулсан $BC$ нумын дундаж цэгийг $M$ гэе. $BM$, $CH$ шулуунууд $E$ цэгт, $CM$, $BH$ шулуунууд $F$ цэгт огтлолцдог гээд, $BC$, $EF$ шулуунууд $K$ цэгт огтлолцдог гэе. $M$ цэгээс $KH$ шулуунд буулгасан перпендикулярын суурь $L$ бол $AH = AL$ гэж батал.

## Олон Улсын Математикийн Олимпиад

Олон Улсын Математикийн 66-р Олимпиад Австрали улсын Саншайн Көуст хотод 2025 оны 7 сарын 10-20 өдрүүдэд амжилттай зохион байгуулагдав.

Олимпиадад Монгол улсаа төлөөлж оролцох багийг 2025 оны 3 сарын 22, 23 ба 4 сарын 26, 27 өдрүүдэд зохион байгуулсан хоёр сорил ба улсын олимпиадын F ангиллын нийлбэр дүнгээр сонгон шалгаруулав. Албан ёсны багт

| Сурагч | Сургууль |
|---|---|
| Сонорын Манлай | Сант сургууль |
| Батлхагвын Тэнүүнсайхан | Шинэ үе сургууль |
| Арвисын Ивээл | 11 дүгээр сургууль |
| Баярын Бэлгүтэй | 11 дүгээр сургууль |
| Болдбаатарын Төвшиндалай | 11 дүгээр сургууль |
| Даваадоржийн Хүслэн | Сант сургууль |

нар орлоо. Багийн ахлагчаар Ү. Отгонбаяр, дэд ахлагчаар Т. Базар, туслахаар Т. Хулан, Х. Нурсолтан нар ажиллав. Багийн А ажиглагчаар Т. Хулан, Г. Номин нар, С ажиглагчаар С. Батсайхан, Б. Мөнхтулга, Ж. Ёндонсамбуу нар ажиллав.

Олимпиадын бэлтгэлийн I шат 3 сарын 02 өдрөөс 28 өдөр, II шат 4 сарын 21 өдрөөс 6 сарын 13 өдөр хүртэл үргэлжилэв. Бэлтгэлд Global Talent Lab ТББ, Капитрон банк санхүүгийн дэмжлэг үзүүлэв.

### IMO 2029

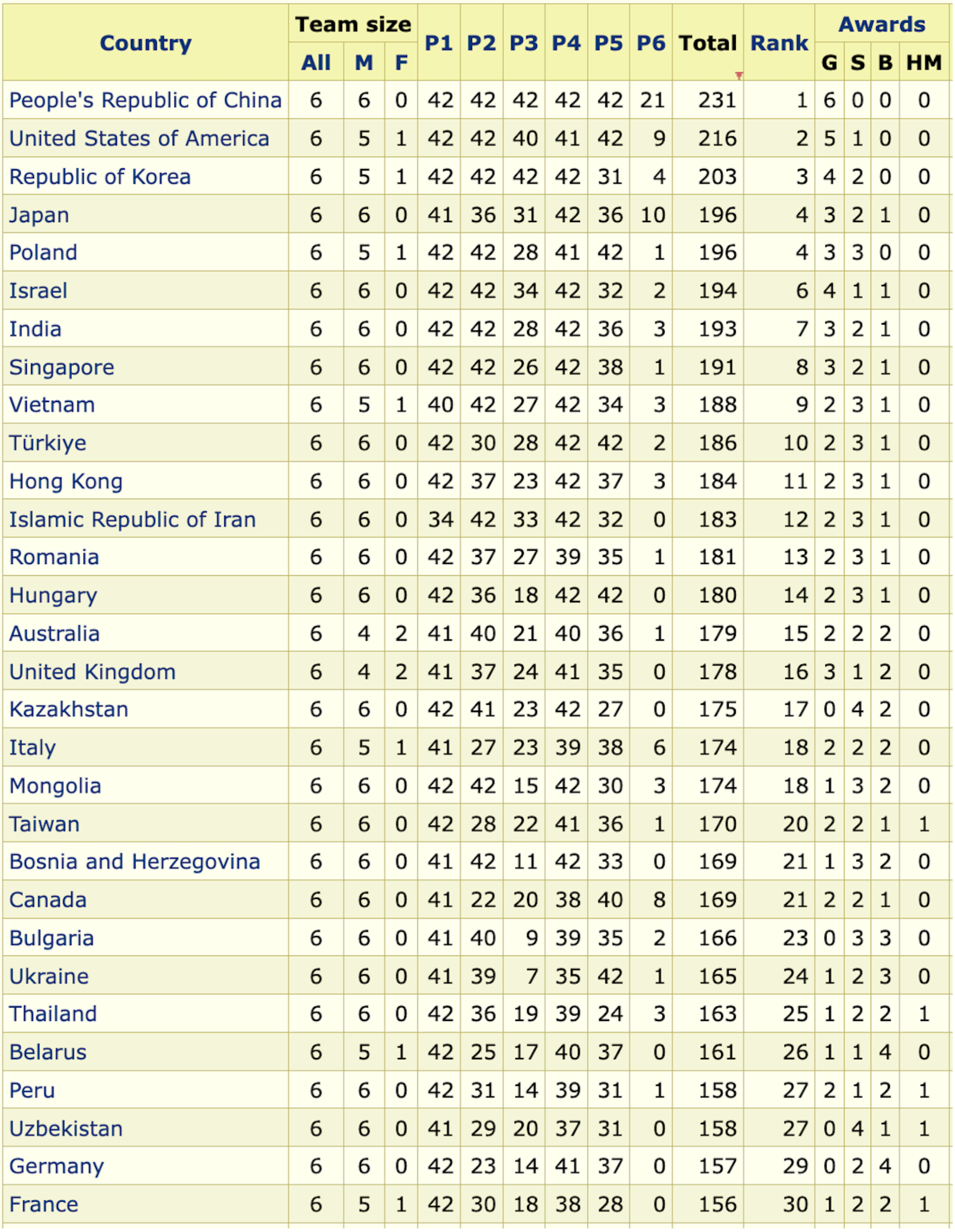
Олон Улсын Математикийн 70-р Олимпиадыг Монгол улсад зохион байгуулах албан ёсны эрхийг 7/11 өдрийн ОУМО-ын удирдах зөвлөл болон бүх ахлагчдын нэгдсэн хурлаас авлаа.

Энэхүү нэр хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай эрхийг авахад онцгой туслалцаа үзүүлсэн хорооны дэд ерөнхийлөгч, УИХ-ын гишүүн Ч.Анарт гүн талархал илэрхийлье. Мөн бидний үйл хэргийг үргэлж дэмжиж, олон улсын түвшинд ажиллах боломж олгосон Монгол улсын Ерөнхийлөгч У. Хүрэлсэх, Ерөнхий сайд Г. Занданшатар, Ерөнхийлөгчийн зөвлөх Ч. Лодойравсал нарт бүх математикчдынхаа өмнөөс дахин дахин талархал илэрхийлье.

Оюуны олимп гэж нэрлэгддэг энэ олимпиадыг зохион байгуулах эрхийг авахад УИХ-ын гишүүн, Боловсролын сайд П. Наранбаяр, УИХ-ын гишүүн, Гадаад харилцааны сайд Б. Батцэцэг, хорооны ерөнхийлөгч Н. Мөнхнасан (МПМ групп ТУЗ-ийн дарга), дэд ерөнхийлөгч Д. Энхтүвшин (УИХ-ын гишүүн), дэд ерөнхийлөгч Б. Батбаасан (Космо групп ТУЗ-ийн дарга), дэд ерөнхийлөгч Б. Чандмань (Капитрон банк ГЗ-ын тэргүүн орлогч) нарын дэмжлэг чухал байсныг онцлон тэмдэглэе.

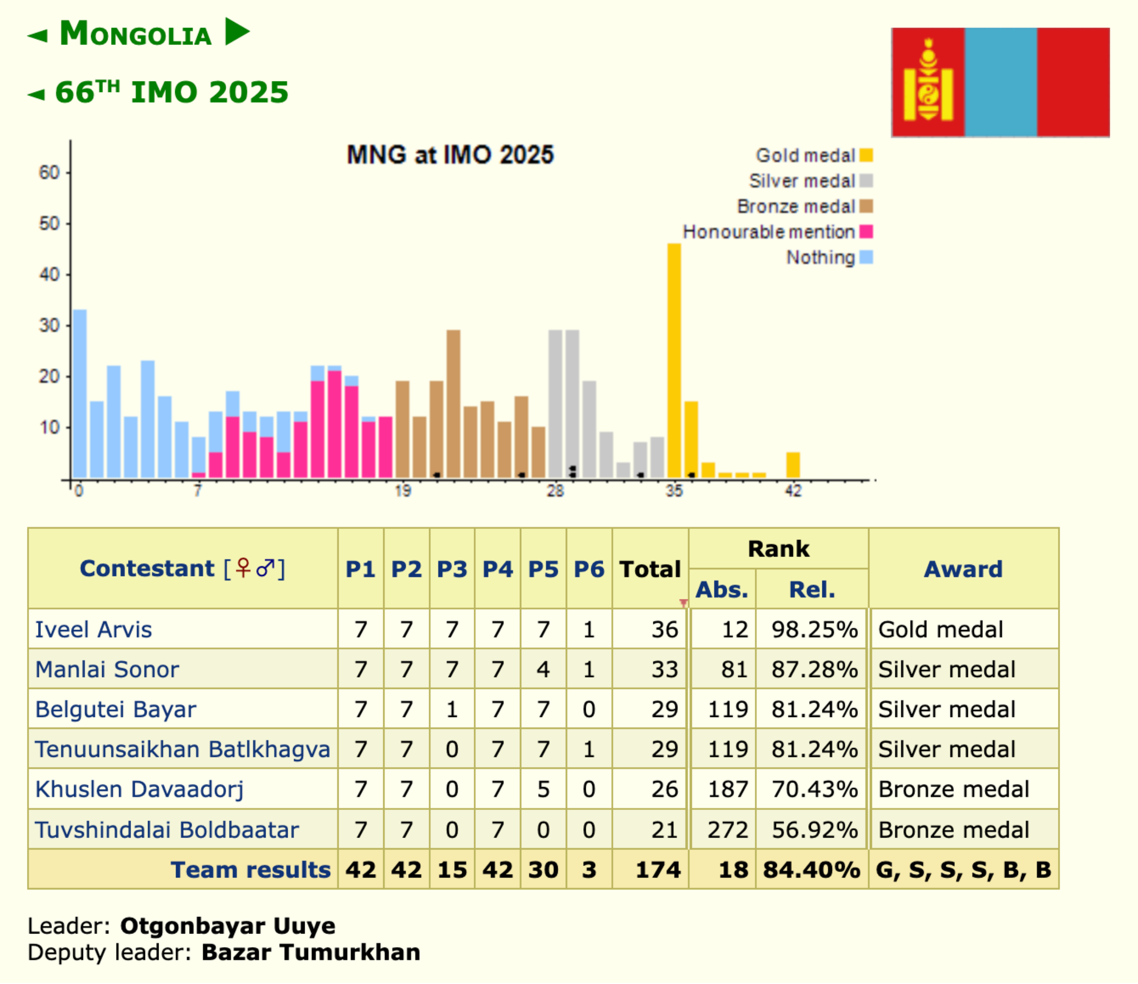
## Амжилт

Энэ олимпиадад 110 орны 630 сурагч оюун ухаан, ур чадвараа уралдуулан өрсөлдсөнөөс бид 1 алтан медаль, 3 мөнгөн медаль, 2 хүрэл медаль хүртэж багаараа 18-р байр эзэллээ. Нийт 174 оноо авсан нь бүх цаг үеийн дээд амжилт байлаа.



| Country | Team size | | | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | Total | Rank | Awards | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | All | M | F | | | | | | | | | G | S | B | HM |
| People's Republic of China | 6 | 6 | 0 | 42 | 42 | 42 | 42 | 42 | 21 | 231 | 1 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| United States of America | 6 | 5 | 1 | 42 | 42 | 40 | 41 | 42 | 9 | 216 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| Republic of Korea | 6 | 5 | 1 | 42 | 42 | 42 | 42 | 31 | 4 | 203 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| Japan | 6 | 6 | 0 | 41 | 36 | 31 | 42 | 36 | 10 | 196 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Poland | 6 | 5 | 1 | 42 | 42 | 28 | 41 | 42 | 1 | 196 | 4 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| Israel | 6 | 6 | 0 | 42 | 42 | 34 | 42 | 32 | 2 | 194 | 6 | 4 | 1 | 1 | 0 |
| India | 6 | 6 | 0 | 42 | 42 | 28 | 42 | 36 | 3 | 193 | 7 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Singapore | 6 | 6 | 0 | 42 | 42 | 26 | 42 | 38 | 1 | 191 | 8 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Vietnam | 6 | 5 | 1 | 40 | 42 | 27 | 42 | 34 | 3 | 188 | 9 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Türkiye | 6 | 6 | 0 | 42 | 30 | 28 | 42 | 42 | 2 | 186 | 10 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Hong Kong | 6 | 6 | 0 | 42 | 37 | 23 | 42 | 37 | 3 | 184 | 11 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Islamic Republic of Iran | 6 | 6 | 0 | 34 | 42 | 33 | 42 | 32 | 0 | 183 | 12 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Romania | 6 | 6 | 0 | 42 | 37 | 27 | 39 | 35 | 1 | 181 | 13 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Hungary | 6 | 6 | 0 | 42 | 36 | 18 | 42 | 42 | 0 | 180 | 14 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| Australia | 6 | 4 | 2 | 41 | 40 | 21 | 40 | 36 | 1 | 179 | 15 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| United Kingdom | 6 | 4 | 2 | 41 | 37 | 24 | 41 | 35 | 0 | 178 | 16 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| Kazakhstan | 6 | 6 | 0 | 42 | 41 | 23 | 42 | 27 | 0 | 175 | 17 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| Italy | 6 | 5 | 1 | 41 | 27 | 23 | 39 | 38 | 6 | 174 | 18 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| Mongolia | 6 | 6 | 0 | 42 | 42 | 15 | 42 | 30 | 3 | 174 | 18 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| Taiwan | 6 | 6 | 0 | 42 | 28 | 22 | 41 | 36 | 1 | 170 | 20 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Bosnia and Herzegovina | 6 | 6 | 0 | 41 | 42 | 11 | 42 | 33 | 0 | 169 | 21 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| Canada | 6 | 6 | 0 | 41 | 22 | 20 | 38 | 40 | 8 | 169 | 21 | 2 | 2 | 1 | 0 |
| Bulgaria | 6 | 6 | 0 | 41 | 40 | 9 | 39 | 35 | 2 | 166 | 23 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| Ukraine | 6 | 6 | 0 | 41 | 39 | 7 | 35 | 42 | 1 | 165 | 24 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| Thailand | 6 | 6 | 0 | 42 | 36 | 19 | 39 | 24 | 3 | 163 | 25 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Belarus | 6 | 5 | 1 | 42 | 25 | 17 | 40 | 37 | 0 | 161 | 26 | 1 | 1 | 4 | 0 |
| Peru | 6 | 6 | 0 | 42 | 31 | 14 | 39 | 31 | 1 | 158 | 27 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| Uzbekistan | 6 | 6 | 0 | 41 | 29 | 20 | 37 | 31 | 0 | 158 | 27 | 0 | 4 | 1 | 1 |
| Germany | 6 | 6 | 0 | 42 | 23 | 14 | 41 | 37 | 0 | 157 | 29 | 0 | 2 | 4 | 0 |
| France | 6 | 5 | 1 | 42 | 30 | 18 | 38 | 28 | 0 | 156 | 30 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Багийн амжилт.



◄ **MONGOLIA** ▶

◄ **66TH IMO 2025**

| Contestant [♀♂] | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | Total | Rank | | Award |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | Abs. | Rel. | |
| Iveel Arvis | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 1 | 36 | 12 | 98.25% | Gold medal |
| Manlai Sonor | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 1 | 33 | 81 | 87.28% | Silver medal |
| Belgutei Bayar | 7 | 7 | 1 | 7 | 7 | 0 | 29 | 119 | 81.24% | Silver medal |
| Tenuunsaikhan Batlkhagva | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | 29 | 119 | 81.24% | Silver medal |
| Khuslen Davaadorj | 7 | 7 | 0 | 7 | 5 | 0 | 26 | 187 | 70.43% | Bronze medal |
| Tuvshindalai Boldbaatar | 7 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | 21 | 272 | 56.92% | Bronze medal |
| **Team results** | **42** | **42** | **15** | **42** | **30** | **3** | **174** | **18** | **84.40%** | **G, S, S, S, B, B** |

Leader: **Otgonbayar Uuye**
Deputy leader: **Bazar Tumurkhan**

Сурагчдын амжилт.

---

*2025 оны 7-р сарын 15, Мягмар*

**Бодлого 1.** Хавтгайн $x$-тэнхлэг, $y$-тэнхлэг болон $x + y = 0$ шулуунуудын алинтай нь ч параллел **биш** шулууныг *нарлаг* гэе.

$n \geqslant 3$ бүхэл тоо өгөгдөв. Дараах хоёр нөхцөлийг зэрэг хангах $n$ ялгаатай шулуун оршин байдаг бүх сөрөг биш бүхэл $k$ тоог ол.

- $a + b \leqslant n + 1$ байдаг бүх $a$, $b$ натурал тоонуудын хувьд, $(a, b)$ цэг $n$ шулууны ядаж нэг дээр оршдог;
- $n$ шулууны яг $k$ ширхэг нь нарлаг байдаг.

**Бодлого 2.** $M$ цэгт төвтэй $\Omega$ тойрог ба $N$ цэгт төвтэй $\Gamma$ тойрог өгөгдсөн ба $\Omega$ тойргийн радиус $\Gamma$ тойргийн радиусаас бага байв. $\Omega$, $\Gamma$ тойргууд ялгаатай $A$, $B$ цэгүүдэд огтлолцоно. $MN$ шулуун $\Omega$ тойрогтой $C$ цэгт, $\Gamma$ тойрогтой $D$ цэгт огтлолцох ба $C$, $M$, $N$, $D$ цэгүүд шулуун дээр энэ дараалларaa байрлана. $ACD$ гурвалжныг багтаасан тойргийг төвийг $P$ гэе. $AP$ шулуун $\Omega$ тойрогтой дахин $E \neq A$ цэгт, $\Gamma$ тойрогтой дахин $F \neq A$ цэгт огтлолцоно. $PMN$ гурвалжны орто төвийг $H$ гэе.

$H$ цэгийг дайрсан $AP$-тэй параллел шулуун $BEF$ гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

(Гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг уг гурвалжны *орто төв* гэдэг.)

**Бодлого 3.** Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $a$, $b$ натурал тоонуудын хувьд

$$f(a) \text{ тоо } b^a - f(b)^{f(a)} \text{ тоог хуваадаг}$$

бол $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ функцийг *саак* гэе.

Бүх $f$ саак функц ба бүх $n$ натурал тооны хувьд $f(n) \leqslant cn$ байдаг хамгийн бага бодит $c$ тоог ол.

*Language: Mongolian*

*Хугацаа: 4 цаг 30 минут.*
*Бодлого бүр 7 оноотой.*

*2025 оны 7-р сарын 16, Лхагва*

**Бодлого 4.** Натурал тооны өөрөөс нь ялгаатай натурал тоон хуваагчийг *жинхэнэ хуваагч* гэнэ.

$a_1, a_2, \ldots$ натурал тоон, төгсгөлгүй дарааллын гишүүн бүр ядаж гурван жинхэнэ хуваагчтай ба дурын $n \geqslant 1$ хувьд $a_n$ тооны хамгийн их гурван жинхэнэ хуваагчийн нийлбэр $a_{n+1}$ байв.

$a_1$ гишүүний авч болох бүх боломжит утгыг ол.

**Бодлого 5.** $\lambda > 0$ гэе. Ану, Базар хоёр $\lambda$-аас хамаарсан дүрэмтэй дараах тоглоом тоглож байгаа ба хоёулаа $\lambda$-ийн утгыг мэднэ. Тоглоомын $n \geqslant 1$ дүгээр ээлжид:

- $n$ сондгой үед Ану $x_n$ сөрөг биш бодит тоог

  $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n$$

  байхаар сонгоно.

- $n$ тэгш үед Базар $x_n$ сөрөг биш бодит тоог

  $$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n$$

  байхаар сонгоно.

Хэрэв тоглогч ээлжин дээрээ нөхцөл хангах $x_n$ тоо сонгож чадахгүй бол тоглоом дуусах ба нөгөө тоглогч хожно. Тоглоом төгсгөлгүй үргэлжилбэл хэн нь ч хожихгүй. Тоглогчид сонгогдсон тоонуудыг мэдэж байгаа гэж үзнэ.

Ану хожих стратегитай байх бүх $\lambda$ тооны утгыг ол. Мөн Базар хожих стратегитай байх бүх $\lambda$ тооны утгыг ол.

**Бодлого 6.** Нэгж нүднүүдээс тогтох $2025 \times 2025$ хэмжээтэй хөлөг авч үзье. Номин хөлөг дээр тэгш өнцөгт хавтангуудыг, талууд нь хөлгийн нүднүүдийг хиллэсэн шулуунууд дээр орших бөгөөд нүд бүр ихдээ нэг хавтангаар хучигдсан байхаар байрлуулахыг хүсчээ. Энд хавтангууд өөр өөр урт, өргөнтэй байж болно.

Хүснэгтийн мөр ба багана бүрд ямар ч хавтангаар хучигдаагүй яг нэг нүд үлдсэн байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн хавтан байрлуулж болох вэ?

*Хугацаа: 4 цаг 30 минут.*
*Бодлого бүр 7 оноотой.*

# Ираны Геометрийн Олимпиад

Ираны геометрийн 12-р Олимпиад 2025 оны 10 сарын 17-ны өдөр Олонлог эгзэ сургууль дээр зохион байгуулагдаж манай улсаас нийт дөрвөн ангилалд 200 орчим сурагчид оролцлоо.

Бага буюу D ангилалд нийт 81 сурагч оролцсноос Д. Одонгоо 18 оноогоор, У. Амин-Эрдэнэ, Э. Ананд, Я. Анударь, А. Анх-Од, Р. Ариунзул, Л. Гэгээбадрах, Б. Дагва-Очир, О. Дөлгөөн, А. Мандах, М. Мөнх-Орших, Б. Мухулай, М. Одхүү, М. Оюу, Д. Оюунтөгөлдөр, Б. Сүүндарь, Г. Танан, С. Төгсбилэг, Т. Түмэнжин, Б. Уранбат, Ц. Цэлмүүн, З. Явуумэргэн нар тус бүр 16 оноогоор хүрэл шугамын болзол хангалаа.

Дунд буюу E ангилалд нийт 58 сурагч оролцсноос Д. Долгор, Б. Төрбат нар 24 оноогоор мөнгөн шугамын, Д. Азжаргал, А. Ану, Б. Болд, А. Гоомарал, Б. Дэлгэрмөрөн, О. Жавхлантөгс, Б. Жаргал, М. Номгон, А. Соёмбо, Б. Төгсбилэгт, П. Тэмүүлэн, Б. Эгшиглэн, Э. Энхлэн, М. Энэрэл, Т. Эрдэнэчулуун нар тус бүр 16 оноогоор хүрэл шугамын болзол хангалаа.

Ахлах буюу F ангилалд нийт 35 сурагч оролцсноос А. Ану, Ц. Бажнамсрай, Ч. Төрболд нар 24 оноогоор, Н. Болор, Д. Хүслэн нар 23 оноогоор хүрэл шугамын болзол хангалаа.

Чөлөөт ангилалд нийт 24 багш, оюутнууд оролцсноос Х. Нурсолтан, Д. Хосбаяр нар 24 оноогоор хүрэл шугамын, Э. Энхжин 17 оноогоор, Б. Зоригтбаатар, С. Буяндэлгэр, Х. Санжаахүү нар тус бүр 16 оноогоор хүрэл шугамын болзол хангалаа.

Олимпиадын зохион байгуулалтыг оролцогчдын хураамжаар санхүүжүүллээ.

| | Дүн (MNT) | Задаргаа |
|---|---:|---|
| Орлого | 7 650 000 | Хураамж |
| Зарлага | 800 000 | Хураамх |
| | 750 000 | Орчуулга |
| | 1 200 000 | Хяналт |
| | 2 550 000 | Засалт |
| | 600 000 | Хамгаалалт |
| | 750 000 | Хоол |
| | 1 000 000 | Бичиг хэрэг |

Олимпиадыг сургууль дээрээ зохион байгуулахад бүх талаар дэмжин ажилласан Олонлог эгзэ сургуулийн хамт олон болон засалтанд оролцсон Х. Нурсолтан, А. Мишээл, Э. Гэрэлхүү, Б. Улсболд, Т. Базар нартаа талархал илэрхийлье.

Олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан Т. Хулан (ММОХ), Г. Батзаяа (УБ 1-р сургууль) нарт талархал илэрхийлье.

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: `https://igo-official.com/`

## Ираны Геометрийн 12-р Олимпиад

## Бага ангилал (D)

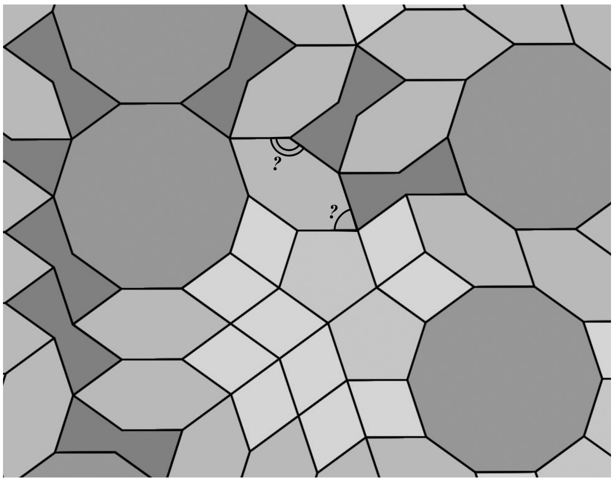
2025 оны 10 сарын 17

---

**Энэ уралдааны бодлогуудыг ИГО албан ёсны сайт igo-official.com дээр тавигдах хүртэл нууцлана уу.**

---

**Бодлого 1.** Исфахан хотын нэгэн сүмийн хавтанцар ханыг зурагт үзүүлэв. Хана таван өөр төрлийн олон өнцөгтөөс бүрдэнэ. Үүнд зөв таван өнцөгт, зөв арван өнцөгт багтах ба талуудын урт бүгд тэнцүү. Зурагт үзүүлсэн зургаан өнцөгтийн дөрвөн өнцөг тэнцүү ба үлдэх хоёр өнцөг нь мөн хоорондоо тэнцүү байна. Тэмдэглэгдсэн өнцгүүдийг ол.



**Бодлого 2.** $ABC$ зөв гурвалжин өгөгдөв. $O_1$ цэг $AB$ тал дээр, $O_2$ цэг $AC$ тал дээр байрлана. $O_1$ цэг дээр төвтэй, $B$-г дайрах тойрог болон $O_2$ цэг дээр төвтэй, $C$-г дайрах тойргууд гурвалжин доторх $P$ цэгт гадаад байдлаар шүргэлцдэг. $\angle BPC$ өнцгийг ол.

**Бодлого 3.** Аагийд цаасаар хийсэн адил хажуут, тэгш өнцөгт гурвалжин байв. Хэрэв нугалсны дараа гарсан олон өнцөгтийн бүх өнцөг 180°-аас бага байвал энэ нугалалтыг *сайн* гэж нэрлэе. Аагий *сайн* нугалалт гүйцэтгэсний дараа Баагий цаасыг аваад хоёр удаа *сайн* нугалалт хийнэ. (Цаасыг нийт гурван удаа нугална гэсэн үг). Аагий эцсийн олон өнцөгтийг аль болох олон талтай байхыг хүсэж байгаа бол Баагий эсрэгээр нь цөөн талтай байлгахыг хүснэ. Тэд чадах бүхнээ хийсэн гэж үзвэл эцсийн олон өнцөгт хэдэн талтай вэ?

**Бодлого 4.** Гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн диагональ бүр аль ч талаасаа урт байв. Аль нэг талыг $\sqrt{3}$ дахин сунгахад диагонал бүрээс урт болно гэж батал.

**Бодлого 5.** $ABC$ гурвалжны $\angle CAB = 15°$ ба $\angle CBA = 30°$ байв. $\angle BCA$ өнцгийн дотор $X$, $Y$ цэгүүдийг $\angle BCX = \angle ACY = 45°$ ба $BC = CY$, $AC = CX$ байхаар авав. $XY$ шулуун $AB$ талтай $Z$ цэгт дээр огтлолцоно. $AZ = BC$ гэж батал.

Хугацаа: 4 цаг.
Бодлого бүр 8 оноотой.

# Ираны Геометрийн 12-р Олимпиад

## Дунд ангилал (E)

2025 оны 10 сарын 17

---

**Энэ уралдааны бодлогуудыг ИГО албан ёсны сайт igo-official.com дээр тавигдах хүртэл нууцлана уу.**

---

**Бодлого 1.** $PYXQ$ тэгш өнцөгт трапец өгөгджээ ($PY \perp PQ \perp QX$). $PQ$ шулуун дээр $A$, $B$ цэгүүдийг $\angle AYQ = \angle BXP = 90^\circ$ байхаар авав. Хэрэв трапецийн диагоналууд $S$ цэгт огтлолцдог бол $\triangle AYS \sim \triangle BXS$ гэж батал.

**Бодлого 2.** $ABCD$ квадрат өгөгджээ. $BC$ талын дундаж $E$ цэг, $AB$ тал дээр орших $DE \perp EF$ байх $F$ цэг авав. Квадратын дотор талд $GF = EF$ ба $GF \perp EF$ байх $G$ цэг авав. $AC, DE$ шулуунууд $X$ цэгт огтлолцоно. $G, B, E, X$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

**Бодлого 3.** $ABC$ гурвалжин болон түүнийг багтаасан тойрог $\omega$ өгөгджээ. $\omega$ тойргийн $BC$ нумын дундаж цэгийг $T$ гэе ($A$ цэгийг агуулаагүй нум). $BT$ шулуун $BAC$ өнцгийн гадаад биссектрисстэй $P$ цэгт огтлолцоно. $A$ цэгээс $\omega$ тойргийн $T$ цэгт татсан шүргэгч шулуун руу буусан перпендикулярын суурийг $H$ гэе. $AP$ хэрчмийн дундаж цэгийг $M$ гэвэл $\angle AHM = \angle ACP$ гэж батал.

**Бодлого 4.** $ABCYXD$ гүдгэр 6-өнцөгтийн хувьд

$$\angle ACY = \angle BDX = 90^\circ$$

$$\angle BAC = 2\angle CAY, \quad \angle ABD = 2\angle DBX$$

$$XY = DX + CY$$

нөхцөлүүд биелдэг бол

$$\sqrt{(CD - DX)(CD - CY)} \leq \frac{AC + BD - AB}{2}$$

гэж батал.

**Бодлого 5.** $AB < AC$ байх $ABC$ гурвалжин болон $B, C$ цэгүүдийг дайрсан дурын тойрог $\omega$ өгөгджээ. $\omega$ тойрог $AB$ шулуунтай дахин $F$ цэгт, $AC$ шулуунтай дахин $E$ цэгт огтлолцоно. $BF$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр $BC$ талтай $M$ цэгт, $CE$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр $BC$ талтай $N$ цэгт огтлолцоно. $MN$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляр $EF$ шулуунтай $P$ цэгт огтлолцоно. $\omega$ тойрог өөрчлөгдөхөд $P$ цэг тогтмол нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Хугацаа: 4 цаг 30 минут.
Бодлого бүр 8 оноотой.

# Ираны Геометрийн 12-р Олимпиад
## Ахлах ангилал (F,T)
2025 оны 10 сарын 17

---

**Энэ уралдааны бодлогуудыг ИГО албан ёсны сайт igo-official.com дээр тавигдах хүртэл нууцлана уу.**

---

**Бодлого 1.** $AB = AC$ байх адил хажуут $ABC$ гурвалжин өгөгдөв. $BC$ тал дээр $X$, $Y$ цэгүүдийг $X$ цэг $B$, $Y$ цэгүүдийн хооронд оршиж байхаар авав. $AYB$ гурвалжныг багтаасан тойргийг $\omega_1$гэе. $C$, $X$ цэгүүдийг дайрсан $AC$ шулууныг шүргэх тойргийг $\omega_2$ гэе. $\omega_1$, $\omega_2$ тойргууд $M$, $N$ цэгүүдэд огтлолцоно. $\angle AMX = \angle BNX$ гэж батал.

**Бодлого 2.** $ABCD$ дөрвөн өнцөгт $\omega$ тойрогт багтана. $DB$ цацраг дээр $X$ цэгийг, $CA$ цацраг дээр $Y$ цэгийг $DA = DX, CB = CY$ байхаар авав $(X \neq Y)$. $CD$ талыг $AX$ шулуун $P$ цэгт, $BY$ шулуун $Q$ цэгт огтолно. $APC, BQD$ гурвалжныг багтаасан тойргуудын радикал тэнхлэг болон $AB$ талын дунджид татсан перпендикуляр шулуунууд $\omega$ тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

**Бодлого 3.** $AB \neq AC$ байх $ABC$ гурвалжны $BC$ талын дундаж цэгийг $M$ гэе. $AM$ хэрчим дээр дурын $X$ цэг авъя. $\triangle ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрог дээр $AA'||BC$ байх $A'$ цэг авъя. $AXA'$ гурвалжныг багтаасан тойрог $AB$ талтай $F$ цэгт, $AC$ талтай $E$ цэгт огтлолцоно. $BC, A'X$ шулуунууд $P$ цэгт огтлолцоно. $P, M, E, F$ цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

**Бодлого 4.** $AB = AC$ байх $ABC$ адил хажуут гурвалжин өгөгджээ. $BC$ тал дээр $M$, $N$ цэгүүдийг $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAC$ ба $M$ цэг $B$, $N$ цэгүүдийн хооронд оршиж байхаар авав. $AMN$ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг $P$ гэе. $BC$ шулуун $AM$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляртай $R$ цэгт, $AN$ хэрчмийн дунджид татсан перпендикуляртай $Q$ цэгт огтлолцоно. $PR$ шулуун дээр $S$ цэгийг, $PQ$ шулуун дээр $T$ цэгийг $ST \perp PA$ байхаар авав. $QS$ шулууны хувьд $A$ цэгийн тэгш хэмтэй цэгийг $K$, $RT$ шулууны хувьд $A$ цэгийн тэгш хэмтэй цэгийг $L$ гэе. $CMK$, $BNL$ гурвалжныг багтаасан тойргууд $BC$ талын дунджид татсан перпендикуляр шулуун дээр огтлолцоно гэж батал.

**Бодлого 5.** $ABC$ гурвалжинд багтсан тойрог $AC$ талыг $E$ цэгт, $AB$ талыг $F$ цэгт шүргэнэ. $BE, CE$ хэрчмүүдийг шүргэдэг, $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой шүргэлцдэг тойргийг $\omega_1$ гэе. $CF, BF$ хэрчмүүдийг шүргэдэг, $ABC$ гурвалжныг багтаасан тойрогтой шүргэлцдэг тойргийг $\omega_2$ гэе. $\omega_1, \omega_2$ тойргуудын экссимилицентр нь $ABC$ гурвалжныг багтаасан болон багтсан тойргуудын радикал тэнхлэг дээр оршино гэж батал. *(2 тойргийн экссимилицентр гэж тэдгээрийн ерөнхий гадаад шүргэгч шулуунуудын огтлолцлын цэгийг хэлдэг.)*

Хугацаа: 4 цаг 30 минут.
Бодлого бүр 8 оноотой.

## Ази-Номхон Далайн Математикийн Олимпиад

Ази-Номхон Далайн Математикийн Олимпиадад манай улс хоёр дахь удаа албан ёсоор оролцлоо.

Олимпиад 2026 оны 3 сарын 10 өдөр Нийслэлийн 11-р сургууль дээр зохион байгуулагдаж манай улсаас нийт 60 сурагч олимпиадад оролцов. Албан ёсны дүн жич зарлагдана. Урьдчилсан дүнгээр эхний байруудад дараах сурагчид шалгарав. Журмын дагуу 1, 3, 7-р байранд жагссан сурагчдын бодолтыг зохион байгуулах хороо руу илгээв.

| | Last Name | First Name | M/F | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Sonor | Manlai | M | 7 | 7 | 7 | 3 | 0 | 24 |
| 2 | Chindegsuren | Chingun | M | 7 | 7 | 7 | 0 | 0 | 21 |
| 3 | Davaadorj | Khuslen | M | 6 | 7 | 0 | 5 | 0 | 18 |
| 4 | Chingunjav | Turbold | M | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 | 14 |
| 5 | Munkhbayar | Amin-Erdene | F | 5 | 7 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 6 | Enkhbat | Khangarid | M | 7 | 0 | 4 | 0 | 0 | 11 |
| 7 | Turmunkh | Javkhlanzaya | F | 7 | 1 | 2 | 0 | 0 | 10 |
| 8 | Naranbaatar | Bolor | F | 7 | 0 | 2 | 0 | 0 | 9 |
| 9 | Bayarsaikhan | Batzorig | M | 7 | 0 | 2 | 0 | 0 | 9 |
| 10 | Kharris Jyul Bryus | Garyet Bryus Kharris | M | 7 | 0 | 2 | 0 | 0 | 9 |

Зохион байгуулалтыг оролцогчдын хураамжаар санхүүжүүлэв.

| | Дүн (MNT) | Задаргаа |
|---|---|---|
| Орлого | 1 800 000 | Хураамж |
| Зарлага | 300 000 | Хяналт |
| | 1 300 000 | Засалт |
| | 200 000 | Хоол |

Олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан У. Батзориг (ММОХ), А. Ганбат (УБ 11-р сургууль) нарт талархал илэрхийлье.

Дэлгэрэнгүй мэдээллийг албан ёсны сайтаас авна уу: `https://www.apmo-official.org/`

# XXXVIII Ази Номхон Далайн Математикийн Олимпиад

**2026 оны 3 сарын 10 өдөр**

Хугацаа: 4 цаг

Бодлого бүр 7 оноотой

*Бодлогуудыг албан ёсны APMO вэбсайт* `http://apmo-official.org` *дээр нийтлэгдэх хүртэл нууцлан хадгалах ёстой. Тэр хүртэл бодлогуудыг олон нийтэд задруулах, эсвэл интернэт орчинд хэлэлцэхийг хориглоно. Тооны машин ашиглахыг хориглоно.*

**Бодлого 1.**

$$a! + p! = m^o + 26$$

бөгөөд $o \geq 2$ байх бүх $(a, p, m, o)$ натурал тоон дөрвөлүүдийг ол.

**Бодлого 2.** $n \geq 2$ бүхэл тоо байг. $n$ элементтэй олонлогийн $2^n$ дэд олонлогуудыг ямар нэг дараалллаар $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ гэж тэмдэглэе.

$$|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{2^n-1} \cap A_{2^n}| + |A_{2^n} \cap A_1| \geq 2^{n-2}$$

гэж батал.

**Бодлого 3.** Бүх эерэг бодит тоонуудыг олонлогийг $\mathbb{R}_+$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y, z \in \mathbb{R}_+$-ийн хувьд

$$|x - y| < |y - z| \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < |f(y) - f(z)|$$

байх бүх $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ буулгалтыг ол.

**Бодлого 4.** $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд $I$ цэгт төвтэй $\omega$ тойрог багтсан байв. $AC$ ба $BD$ диагоналиуд $E$ цэгт огтлолцсон байг. $ABD$ гурвалжинд багтсан тойргийн төв $J$ байг. $EJ$ цацрагийн үргэлжлэл $\omega$ тойрогтой $P$ цэгт огтлолцдог байг. $PI \perp BD$ болохыг батал.

**Бодлого 5.** $n$ натурал тоо байг. $(n+1) \times n$ хэмжээтэй тор хэлбэрээр байрласан нийт $n(n+1)$ өрөө байв. Хөрш хоёр (хажуу талаараа нийлсэн) өрөө бүрийн хооронд нэг хаалга бий. Дараах хоёр нөхцөл биелж байх $S$ ба $G$ гэсэн хоёр өрөө олддог байхаар эдгээр хаалгануудын нэг дэд олонлогийг сонгон түгжих аргын тоог ол:

(i) Эхний мөрөнд $S$ байрлана, $(n+1)$-р мөрөнд $G$ байрлана

(ii) Зөвхөн түгжигдээгүй хаалгануудаар дамжин $S$-с $G$-д хүрж болдог байх.