

## Гарчиг

|                                                                |           |
|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын I Даваа</b>           | <b>1</b>  |
| Сургуулийн Олимпиад . . . . .                                  | 1         |
| Бодлогууд . . . . .                                            | 1         |
| <b>Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын II Давааны I шат</b>  | <b>7</b>  |
| Аймаг/дүүргийн Олимпиад . . . . .                              | 7         |
| Бодлогууд . . . . .                                            | 7         |
| Бодолтууд . . . . .                                            | 11        |
| <b>Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын II Давааны II шат</b> | <b>27</b> |
| Хот/бүсийн Олимпиад . . . . .                                  | 27        |
| Бодлогууд . . . . .                                            | 27        |
| Бодолтууд . . . . .                                            | 31        |
| <b>Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын III Даваа</b>         | <b>45</b> |
| Улсын Олимпиад . . . . .                                       | 45        |
| Олимпиадын дүн . . . . .                                       | 47        |
| Бодлогууд . . . . .                                            | 49        |
| Бодолтууд . . . . .                                            | 51        |
| <b>Олон Улсын Мэдээ</b>                                        | <b>65</b> |
| Европын Охидын Математикийн Олимпиад . . . . .                 | 65        |
| Цинхуагийн Их Сургууль . . . . .                               | 66        |
| STAR Challenge . . . . .                                       | 67        |



# Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын I Даваа

## Сургуулийн Олимпиад

Монголын Математикийн Олимпиадын хороо бусад орнуудын олимпиадын I давааг зохион байгуулж байгаа туршлага болон 2020–2022 онуудад онлайнаар олимпиад зохион байгуулсан туршлага дээрээ үндэслэн олимпиадын I давааг 2022 оны 12-р сарын 09 өдөр Улаанбаатар хотын боловсролын газар, дүүргүүдийн боловсролын газар, ЕБС-уудтай хамтран нөхөх тестийн хэлбэрээр зохион байгууллаа. 2023–2024 оны хичээлийн жилд орон даяар зохион байгуулахаар төлөвлөж байна.

С (5–6), D (7–8) ангилалд тус бүр 10 бодлогыг 2 цагийн хугацаанд, E (9–10), F (11–12) ангилалд тус бүр 12 бодлогыг 2 цаг 30 минутын хугацаанд бодуулав.

Сургууль бүрээс ирүүлсэн дүнгийн хавтгайг дүүргүүд дээр нэгтгэсний дараа хорооны [www.mmo.mn](http://www.mmo.mn) сайтад оруулан олимпиадын нэгдсэн дүнг гаргав. Дүнгийн хавтгайд сурагчдын ID-г оруулаагүй, буруу оруулсан, хариултыг натурал тоогоор оруулаагүй зэрэг алдаа их байсан нь олимпиадын эцсийн дүнг гаргахад ихээхэн хүндрэл учруулсныг дурдах нь зүйтэй. Цаашид тодорхой хугацаанд багтаж залруулгаа ирүүлээгүй тохиолдолд дүнг системд оруулдаггүй, дараагийн даваанд оролцуулдаггүй байх зэрэг зохицуулалтыг хийх зайлшгүй шаардлагатай болох нь харагдлаа.

Тус олимпиадын С ангилалд 6574 сурагч, D ангилалд 5818 сурагч, E ангилалд 4297 сурагч, F ангилалд 2938 сурагч нийт 19402 сурагч оролцсоноос 9208 нь эрэгтэй, 9100 нь эмэгтэй бусад нь бүртгэл дутуу байв. Цаашид багш, сурагчид бүртгэлийн мэдээллээ бүрэн гүйцэд системд оруулах тал дээр анхаарна уу.

I давааг нэгдсэн байдлаар зохион байгуулснаар нэг сургуулиас II даваанд оролцох сурагчийн тоонд хиймэл хязгаар тавигдахгүй болохоос гадна олимпиадын төрлийн бодлого бодох чадвартай сурагчдыг шигшиж II даваанд оролцуулдаг болно гэсэн давуу талууд үүснэ гэж үзэж байна.

Дүнг [www.mmo.mn/post/?id=257](http://www.mmo.mn/post/?id=257) хаягаар орж үзээрэй. Бодлогуудыг сонирхуулж байна, хариунуудыг дараах хаягаас харж болно. [www.mmo.mn/olympiads/problems/?year=59](http://www.mmo.mn/olympiads/problems/?year=59)

## Бодлогууд

### С (5–6) ангилал

**Бодлого С1.**  $С.ВА + А.АА = В.А$  бол  $\overline{CAB} = ?$  Энд ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.

**Бодлого С2.** Цифрүүдийнхээ нийлбэрээс 59 дахин их байдаг хамгийн бага натурал тоог ол.

**Бодлого С3.** Бат цифрүүдийн нийлбэр дээр нь цифрүүдийнх нь үржвэрийг нэмэхэд өөрөө гардаг бүх хоёр оронтой тоог олж тэдгээрийн нийлбэрийг боджээ. Бат ямар хариу гаргасан бэ?

**Бодлого С4.** Дэлгүүрт 4 төрлийн талх худалдаж байжээ. Энх хоёр өөр төрлийн 2 ширхэг талх худалдаж авахаар шийдээд бүх боломжит (2 өөр төрлийн 2 ширхэг талхыг 6 аргаар сонгож болно) сонголтод төлөх үнийн дүнг тооцоолж үзжээ. Эдгээрийн 5 хувилбар нь харгалзан 1900, 2070, 2110, 2330, 2500 төгрөгний үнэтэй байсан бол үлдсэн ганц хувилбар хэдэн төгрөгний үнэтэй байх вэ?

**Бодлого С5.** Тусгаар тогтнолын өдрөөр ангийн 36 сурагч улаан эсвэл хөх өнгийн цамц өмсөж иржээ. Тэд тойрч зогссоны дараа аль ч хөвгүүний хажууд охин зогссон, аль ч охины хажууд цэнхэр цамцтай хүүхэд зогссон болох нь мэдэгдэж байв. Тэгвэл улаан өнгийн цамцтай охидын тоо хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

**Бодлого С6.** Аймгийн төвөөс сумын төв орохоор суудлын машин гарчээ. Түүнтэй нэгэн зэрэг сумын төвөөс аймгийн төв орохоор дугуйтай хүн гарав. Машин ба дугуйтай хүн уулзсаны дараа машин шууд эргэж аймгийн төв рүү буцжээ. Дугуйтай хүн аймгийн төвд, машинаас 35 минутын дараа ирсэн бөгөөд дугуйтай хүний хурд машины хурдаас 4.5 дахин бага бол сумаас аймаг ороход дугуйтай хүн хэдэн минут зарцуулсан бэ?

**Бодлого С7.**  $K$  натурал тооны бүх натурал тоон хуваагчдыг өсөх эрэмбээр эрэмбэлж хамгийн багаас нь эхлэн нэг, хоёр, ... гэх мэтээр дугаарлая. Хэрэв 6-р хуваагч ба 13-р хуваагчдын үржвэр  $K$  тоотой тэнцүү байсан бол  $K$  тоо хэдэн натурал тоон хуваагчтай байсан бэ?

**Бодлого С8.** Үлгэрийн орны нэгэн хаант улс таван хоттой. Энэ улсын аль ч хотоос бусад аль ч хот руу шууд очдог замтай. Нэг хотод нэгээс олон удаа очихгүйгээр  $A$  хотоос  $B$  хот руу хэчнээн ялгаатай замаар очиж болох вэ? ( $A$  хотод мөн буцаж очихгүй.)

**Бодлого С9.** Шооны талууд дээр 1, 2, 3, 4, 5, 6 тоонуудыг нэг, нэгээр нь бичсэн байв. Шоог эхний удаа орхисны дараа 4 хажуу талс дээрх тоонуудын нийлбэр 13 гарчээ. 2-р хаялтын дараа хажуу талсууд дээрх тоонуудын нийлбэр 16 байсан бол 4-ийн тоо бичигдсэн талсын эсрэг талс дээр ямар тоо бичигдсэн байж болох вэ?

**Бодлого С10.** Дараачийн гишүүн бүр нь өмнөх хоёр гишүүнийхээ нийлбэртэй тэнцүү байдаг натурал тоонуудын дарааллын 8-р гишүүн нь 400-тай тэнцүү бол 2-р гишүүн хамгийн ихдээ хэдтэй тэнцүү байж болох вэ?

## D (7-8) ангилал

**Бодлого D1.** 1-ээс 2022 хүртэлх тоонуудыг эхнээс нь залгуулж бичихэд гарах  $N = 12345 \dots 2022$  тооны  $n$ -р цифрийг  $a_n$  гээ.  $\overline{a_{2021}a_{2022}a_{2023}}$  гурван оронтой тоог ол.

**Бодлого D2.**  $\frac{p-1}{2}$  ба  $\frac{p+1}{4}$  анхны тоо байх  $p$  анхны тоог “супер анхны тоо” тоо гээ. Бүх супер анхны тоонуудын нийлбэрийг ол.

**Бодлого D3.** Үлгэрийн орны нэгэн хаант улс зургаан хоттой. Энэ улсын аль ч хотоос бусад аль ч хот руу шууд очдог замтай. Нэг хотод нэгээс олон удаа очихгүйгээр  $A$  хотоос  $B$  хот руу хэчнээн ялгаатай замаар очиж болох вэ? ( $A$  хотод мөн буцаж очихгүй.)

**Бодлого D4.** Худалдаачин нэг төрлийн барааны худалдаалах үнийг 20% буулгахад тухайн бараанаас 20% ашиг олохоор байжээ. Тэгвэл анх тухайн бараанаас хэдэн хувийн ашиг олдог байсан бэ?

**Бодлого D5.** 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифрүүдийг ашиглан цифрүүд нь ялгаатай 4 оронтой 3-д хуваагдаг тоо хэчнээнийг зохиож болох вэ?

**Бодлого D6.**  $S(n)$ -ээр  $n$  тооны цифрүүдийн нийлбэрийг тэмдэглэе.  $n = 59S(n)$  нөхцөлийг хангах хамгийн бага  $n$  натурал тоог ол.

**Бодлого D7.**  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  олонлогоос  $\text{ХИЕХ}(a, b) = 1$  ба  $a \leq b$  байх  $a, b$  тоонуудыг хэчнээн янзаар сонгож болох вэ? ( $a, b$  нь ялгаатай байх албагүй)

**Бодлого D8.**  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  үржвэрийг  $n$ -ийн факториал гэнэ. 1-ээс 2022 хүртлэх бүх натурал тооны факториалуудын нийлбэрийг 100-д хуваахад гарах үлдэгдлийг ол.

**Бодлого D9.** Аль ч цифрийг нь арчихад үлдэх 4 оронтой тоо 7-д хуваагддаг байх хэдэн 5 оронтой тоо байх вэ?

**Бодлого D10.** Дараачийн гишүүн бүр нь өмнөх хоёр гишүүнийхээ нийлбэртэй тэнцүү байдаг натурал тоонуудын дарааллын 8-р гишүүн нь 400-тай тэнцүү бол 3-р гишүүн хамгийн багадаа хэдтэй тэнцүү байж болох вэ?

### Е (9-10) ангилал

**Бодлого E1.**  $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \dots$  дараалал өгөгдөв.  $\frac{2022}{2023}$  тоо энэ дарааллын хэд дэх гишүүн бэ?

**Бодлого E2.** Натурал  $n$  тооны цифрүүдийн нийлбэрийг  $S(n)$  гэж тэмдэглэе.  $n = 2022S(n)$  нөхцөлийг хангах хамгийн бага  $n$  натурал тоог ол.

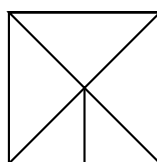
**Бодлого E3.** 59-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг, 2022-д хуваахад 59 үлдэгдэл өгдөг хамгийн бага натурал тоог ол.

**Бодлого E4.** Ямар ч  $x$  бодит тооны хувьд  $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - n| \geq 59$  тэнцэтгэл биш биелдэг байх хамгийн бага  $n$  натурал тоог ол.

**Бодлого E5.**  $x, y$  бодит тоонууд  $x + y + \frac{x}{y} = 10$  ба  $\frac{x(x+y)}{y} = 20$  системийн шийдүүд бол  $x + y$  нийлбэрийн авч болох бүх утгуудын нийлбэрийг ол.

**Бодлого E6.**  $ABC$  гурвалжны  $AB$  тал дээр  $P$  цэгийг  $3AP = AB$  байхаар,  $BC$  тал дээр  $Q$  цэгийг  $4BQ = BC$  байхаар,  $AC$  тал дээр  $R$  цэгийг  $5CR = AC$  байхаар тус тус авав. Хэрэв  $ABC$  гурвалжны талбай 24-тэй тэнцүү бол  $PQR$  гурвалжны талбайг ол.

**Бодлого E7.** Дараах зурганд 5 ширхэг гурвалжин өгөгдөв. Ерөнхий талтай гурвалжнууд нь ялгаатай өнгөтэй байхаар 3 өнгө ашиглан (өнгө бүр ядаж нэг удаа орно) хэчнээн янзаар будаж болох вэ?



**Бодлого E8.**  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = \frac{4}{3}$  тэгшитгэлийн натурал шийдийн тоог ол.

**Бодлого E9.**  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + 2$  олон гишүүнтийн язгуурууд  $r, s, t, u$  болог.

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{n}{m}$$

ба  $\frac{n}{m}$  нь үл хураагдах бутархай бол  $\sqrt{nm}$  тоог ол.

**Бодлого E10.**  $ABC$  гурвалжны  $\angle ABC = 120^\circ$  ба энэ өнцгийн дотоод биссектрисийн суурийг  $D$  гэе. Хэрэв  $BD = 21$ ,  $AB + BC = 100$  бол  $AB \cdot BC$ -г ол.

**Бодлого E11.** Элементүүдийнх нь нийлбэрийг 12-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$  олонлогийн 3 элементтэй дэд олонлогийн тоог ол.

**Бодлого E12.**  $ABCD$  тэгш өнцөгтийн  $AB$  талын дундаж цэгийг  $M$  гэе.  $BD$  диагональ дээр  $\angle MNC = 90^\circ$  байх,  $B$  цэгээс ялгаатай  $N$  цэг авав.  $MC$ ,  $NB$  шулуунууд  $P$  цэгт огтлолцоно. Хэрэв  $AB = 4\sqrt{21}$ ,  $BD = 24$  бол  $NP$  хэрчмийн уртыг ол.

## F (11-12) ангилал

**Бодлого F1.** Ахмад гишүүний коэффициент нь 1 байх 3 зэргийн  $f(x)$  олон гишүүнтийн хувьд  $f(2) = 6$ ,  $f(3) = 9$ ,  $f(4) = 12$  бол  $f(5)$  утгыг ол.

**Бодлого F2.**  $AB = CD$  байх  $ABCD$  адил хажуут трапецийн диагоналууд  $O$  цэгт огтлолцоно.  $AD > BC$  ба  $AD = 12$  байв.  $CD$  хэрчмээр диаметрээ хийсэн тойрог  $O$  цэгийг дайрдаг ба  $AD$  талтай  $E$  цэгт огтлолцов. Хэрэв  $ED = 3$  бол  $ABCD$  трапецийн талбайг ол.

**Бодлого F3.** Ямар ч  $x$  бодит тооны хувьд  $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - n| \geq 2022$  тэнцэтгэл биш биелдэг байх хамгийн бага  $n$  натурал тоог ол.

**Бодлого F4.**  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ ,  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  нь  $(1, 2, 3, 4)$ -ийн ямар нэг сэлгэмэлүүд болог.

$$S = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3 + a_4b_4c_4$$

нийлбэрийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

**Бодлого F5.**  $z = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}$  ба  $z^4 = Az^2 + Bz + C$ ,  $A, B, C$  бүхэл тоонууд бол  $C$ -г ол.

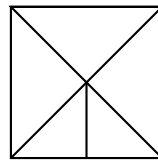
**Бодлого F6.**  $T_n$ -ээр  $(x + y + z)^n$  илэрхийлэлд хаалт задлаж төсөөтэй гишүүдийг эмхэтгэсний дараах гишүүдийн тоог тэмдэглэе. Тэгвэл

$$S = T_0 - T_1 + T_2 - \dots - T_{2021} + T_{2022}$$

нийлбэрийг ол.

**Бодлого F7.** Ижил радиустай  $\omega_1, \omega_2$  тойргуудын огтлолцлын цэгүүдийн нэгийг  $B$  гэе.  $\omega_1$  тойргийн төвийг  $O_1$ ,  $\omega_2$  тойргийн төвийг  $O_2$  гэе.  $O_1B$  шулуун  $\omega_2$  тойрогтой  $A$  цэгт огтлолцоно.  $O_1O_2$  хэрчим  $\omega_1$ -тэй  $C$  цэгт огтлолцдог ба  $AC$  шулуун  $\angle O_1AO_2$  өнцгийн биссектрисс болдог бол  $\angle AO_1O_2$  өнцгийг ол.

**Бодлого F8.** Дараах зурганд 5 ширхэг гурвалжин өгөгдөв. Ерөнхий талтай гурвалжнууд нь ялгаатай өнгөтэй байхаар эдгээр гурвалжнуудыг улаан, цэнхэр, шар, ногоон өнгөөр хэчнээн янзаар будаж болох вэ? (Өнгө бүр орох албагүй.)



**Бодлого F9.** Элементүүдийнх нь нийлбэрийг 12-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$  олонлогийн 4 элементтэй дэд олонлогийн тоог ол.

**Бодлого F10.** Кубын эсрэг хоёр орой дээр нэг, нэг шоргоолж байжээ. Минут бүрд шоргоолжнууд байгаа оройтойгоо ирмэгээр холбогдсон аль нэг орой руу шилжинэ. 4 минутын дараа шоргоолжнууд анх байсан оройнууд дээрээ ирэх магадлалыг  $\frac{n}{m}$  ба  $\text{ХИЕХ}(n, m) = 1$  гэе. Тэгвэл  $n + m$  тоо хэдтэй тэнцүү вэ?

**Бодлого F11.**  $ABCD$  квадратын  $BD$  диагональ дээр  $E$  цэг авав.  $AB$  шулууны хувьд  $AE$  шулуунтай тэгш хэмтэй шулууныг  $l$  гэе.  $CE$  болон  $l$  шулуунууд  $M$  цэгт огтлолцоно. Хэрэв  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AM \cdot CM = 14$ ,  $CM > AM$  бол  $CM : AM$  харьцааг ол.

**Бодлого F12.**  $3^{3^a} - a$  тоо 31-д хуваагддаг байх хамгийн бага  $a$  эерэг бүхэл тоог ол.



# Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын II Давааны I шат

## Аймаг/дүүргийн Олимпиад

2022–2023 оны хичээлийн жилээс эхлэн аймгийн олимпиадыг дүүргийн олимпиадтай хамтатган II давааны I шат болгон зохион байгуулж байхаар боллоо. Ингэснээр нэгдүгээрт аймаг, дүүргүүд Улсын Олимпиадад оролцох багаа нэг ижил хугацаанд бүрдүүлдэг болох, хоёрдугаарт тухайн даваанд илүү тохирсон бодлого бодуулдаг болох, гуравдугаарт Улаанбаатар хотын олимпиадыг бүсийн математикийн олимпиадтай нэг ижил хугацаанд зохион байгуулах боломжтой болох зэрэг олон давуу тал үүснэ гэж үзэж байна.

Энэ жилийн аймаг/дүүргийн олимпиадыг Боловсролын Ерөнхий Газраас гаргасан удирдамжийн хүрээнд зохион байгуулах хугацааг нь зайлшгүй өөрчлөх шаардлага гарч 3-р сарын 18, 19-ны өдрүүдэд зохион байгуулав. Энэ нь олимпиадын хуваарийг зохих шатны төрийн байгууллагуудтай эртнээс тохиролцох шаардлагатайг харуулав.

## Бодлогууд

### C (5-6) ангилал

**Бодлого C1.** Бат нохойтойгоо дэлгүүрээс гэр хүртлээ алхжээ. Нохой нь түүнээс 4 дахин хурдан тул түрүүлж гэртээ хүрээд буцаж ирэн Баттай хамт явж гэртээ харив. Дэлгүүрээс гэр хүртэл 1 км зайтал бол Батын нохой нийт хэдэн метр зам туулсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого C2.**  $\overline{abcd}$  - дөрвөн оронтой тоо бөгөөд  $\overline{ab}$  ба  $\overline{cd}$  гэсэн хоёр оронтой тоонуудын нийлбэр  $\overline{bc}$ -тэй тэнцүү байвал  $\overline{abcd}$  тоог сонин тоо гэе. Жишээлбэл  $13 + 18 = 31$  тул 1318 сонин тоо, харин 08 хоёр оронтой тоо биш тул 1208 сонин тоо биш. Сонин тоо нийт хэдэн ширхэг байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого C3.**  $6 \times 6$  хүснэгтийн зарим нүднүүдэд  $\star$  однууд ба  $\circ$  дугуйнууд зурсан байв. Энэ хүснэгтийг шугамын дагуу, аль ч хэсэгт нь нэг од, нэг дугуй орсон байхаар дөрвөн ижилхэн хэсэгт хуваа.

|   |  |   |   |   |  |
|---|--|---|---|---|--|
|   |  |   |   |   |  |
|   |  |   |   |   |  |
|   |  | ○ | ○ | ○ |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  |   |   |   |  |
| ○ |  |   |   |   |  |

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого С4.** 1, 2, 3, ..., 11, 12 тоонуудыг хэдэн бүлэгт хуваажээ. Бүлэг бүрийн хамгийн их тоо бүлгийнхээ бусад тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байсан бол тоонуудыг хэдэн бүлэгт хуваасан байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

## D (7-8) ангилал

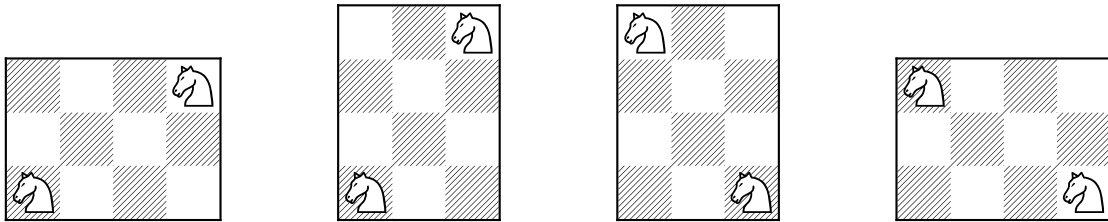
**Бодлого D1.** Таван хүүхэдтэй айлын аль ч хоёр хүүхдүүдийн насны нийлбэр өөр хоёр хүүхдийн насны нийлбэртэй давхацдаггүй байв. Хамгийн том хүүхэд хамгийн багадаа хэдэн настай вэ? Энэ айлд ихэр хүүхэд байхгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого D2.**  $ABCD$  квадратын гадна талд  $F$  цэгийг  $BCF$  зөв гурвалжин байхаар, квадратын дотор талд  $E$  цэгийг  $ABE$  зөв гурвалжин байхаар авав.  $EF$  хэрчмийн дундаж цэг  $M$  бол  $\angle AMD$  өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого D3.**  $8 \times 8$  хэмжээтэй шатрын хөлөг байв. Анугийн зохиосон шинэ тоглоомын морь  $3 \times 4$  хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн диагоналийн дагуу нүүдэг (зураг хар) бол зүүн доод булангаас эхэлсэн морь баруун дээд буланд хамгийн цөөндөө хэдэн нүүдлээр очих боломжтой вэ?



(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого D4.**  $T = \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 12}{abc}$  илэрхийлэл бүхэл тоо байдаг бүх натурал тоон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

## E (9-10) ангилал

**Бодлого E1.** Дөрвөн хүүхэдтэй айлын хэдэн ч хүүхдийн насны нийлбэр өөр хэдэн хүүхдийн насны нийлбэртэй ижил байдаггүй гэе. Хамгийн том хүүхэд хамгийн багадаа хэдэн настай вэ? Энэ айлд ихэр хүүхэд байхгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого E2.**  $AB > AC$  байдаг хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжны дотор талд  $\angle ANB = 180^\circ - \angle BAC$ ,  $\angle NBA = 180^\circ - 2\angle ACB$  байхаар  $N$  цэгийг авав.  $\angle NBA$  өнцгийн дотоод биссектрис,  $\angle NAC$  өнцгийн дотоод биссектрис тэй  $P$  цэгт огтлолцоно.  $NB$  шулуун,  $C$  цэгийг дайрсан  $AN$  шулуунтай параллель шулуунтай  $D$  цэгт огтлолцоно.  $\angle DPN = 2\angle ABC$  гэж батал.

**Бодлого Е3.** Өгөгдсөн  $a, b, c$  натурал тоонуудын хувьд  $P_N = (a^2 + N)(b^2 + N)(c^2 + N)$  үржвэрийг авч үзье.

(1)  $P_N$  тоо бүтэн квадрат биш байх натурал  $N$  тоо олдохыг харуул.

(2)  $P_N$  тоо бүтэн квадрат байх натурал  $N$  тоо олдохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Е4.**  $ABC$  гурвалжны  $\angle A$  өнцгийн дотоод биссектрис  $\angle C$  өнцгийн дотоод биссектрис-тэй  $E$  цэгт огтлолцоно.  $\angle A$  өнцгийн дотоод биссектрис дээр  $EC = ED$  байх  $D$  цэгийг  $E$  цэг  $A, D$  цэгүүдийн хооронд байхаар авав.  $ACDB$  дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах бол  $\angle B$  өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого Е5.**  $10 \times 10$  хүснэгтийн бүх нүдэнд  $-1$  тоо бичигдсэн байв. Дараалсан хоёр мөр ба дараалсан хоёр багана сонгож аваад тэдгээрийн огтлолцолд бичигдсэн дөрвөн тоог хэвээр нь үлдээгээд, сонгогдсон мөр ба баганад бичигдсэн бусад бүх тоонуудын тэмдэгийг эсрэгээр солих үйлдэл хийж болно. Хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог 1 болгож болох уу?

**Бодлого Е6.** Бүхэл  $n \geq 0$  ба бодит  $x$  тооны хувьд  $Q_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  гэе.

$n \geq 1$  ба  $b > a > 0$  бол  $\frac{Q_n(b) - Q_n(a)}{b - a} \geq Q_{n-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)$  гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

## F (11-12) ангилал

**Бодлого F1.** Натурал  $n$  тооны хувьд  $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$  гэе. Энд  $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$ .

(1)  $n \geq 3$  үед  $a_n > a_{n+1}$  гэж батал.

(2)  $a_n$  бүхэл байдаг бүх натурал  $n$  тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F2.** Хос хосоороо ялгаатай  $x, y, z$  бодит тоонуудын хувьд

$$x(z+1) = y(x+1) = z(y+1)$$

нөхцөл биелдэг бол  $z \neq 0$  болохыг баталж  $y + 1/z$  илэрхийллийн утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F3.** 0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн, дор хаяж дөрвөн ширхэг 1 агуулсан  $n \geq 4$  оронтой тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

**Бодлого F4.**  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн  $BC$  тал дээр  $P$  цэгийг,  $CD$  тал дээр  $Q$  цэгийг авсан ба  $2PB = AB$ ,  $2QD = AD$  байв.  $BD$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $M$ ,  $PQ$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $N$  гэе. Хэрэв  $4MN = BD$  байсан бол  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

**Бодлого F5.** Дурын натурал  $m \geq 3$  тооны хувьд  $(2^m - 1)!! \equiv 1 \pmod{2^m}$  гэж батал. Энд сондгой  $k$  тооны хувьд  $k!! = k \times (k-2) \times \dots \times 1$ .

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F6.**  $a, b$  эерэг бодит тоонууд

$$\begin{cases} a^2 = 2 + b \\ b^3 = 3 - a \end{cases}$$

нөхцөлийг хангадаг гэе.  $x^n + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдгүй байдаг бүх натурал  $n$  тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

## S (ББ) ангилал

**Бодлого S1.** Бат явган алхахаасаа 3 дахин хурдан гүйдэг. Бат сургууль руугаа алхдаг боловч заримдаа хичээлээсээ хоцрохгүйн тулд гүйх хэрэгтэй болдог. Бат өнөөдөр сургуульдаа явахдаа өчигдрөөс 12 минут илүү алхсан бол өнөөдөр өчигдрөөс хэдэн минут илүү хугацаа зарцуулсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S2.** Самбарт анх 2022 гэсэн тоо бичигдсэн байв. Чимгээ самбарт хамгийн сүүлд бичигдсэн тооноос 2-оор бага эсвэл 2-оор их тоог самбарт нэмж бичиж болно. Харин Цэцгээ самбарт хамгийн сүүлд бичигдсэн тооноос 3-аар бага эсвэл 3-аар их тоог самбарт нэмж бичиж болно. Чимгээ эхэлж үйлдэл хийгээд цаашид ээлжлэн үйлдэл хийнэ. 2022 үйлдлийн дараа самбарт 1, 2, 3, ..., 2023 тоонууд бүгд нэг, нэг удаа бичигдсэн байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S3.** Жингээрээ ялгаатай 59 ширхэг зоос байв. Туухайгүй жингээр нийт 64 удаа жинлээд жингээрээ хамгийн хүнд болон хүндээрээ 2-т орох зоосыг олж чадна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S4.** Цифрүүдийнх нь үржвэр дээр цифрүүдийнх нь нийлбэрийг 7 удаа нэмэхэд өөрөө гардаг гурван оронтой бүх тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого S5.** Хэрвээ гүдгэр олон өнцөгт яг 2023 ширхэг мохоо өнцөгтэй бол уг олон өнцөгт хамгийн олондоо хэдэн өнцөгтэй вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S6.** Зөв 30 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой хурц өнцөгт гурвалжны тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

## T (ДБ) ангилал

**Бодлого T1.** Натурал тоон гишүүдтэй арифметик прогрессын дэс дараалсан долоон гишүүний квадратуудын нийлбэр бүтэн квадрат байх боломжгүйг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого T2.** Тал бүрийн урт нь натурал тооны бүтэн квадрат байдаг хурц өнцөгт, элдэв талт гурвалжны периметр хамгийн багадаа хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

**Бодлого T3.** 0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн  $n \geq 4$  оронтой тооны  $n - 4$  ширхэг цифрийг 2023 үлдэхээр дарж болдог бол туулай тоо гэе.  $n \geq 4$  оронтой туулай тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т4.**  $a_1, a_2, \dots$  дарааллыг  $a_1 = 1$  ба  $n \geq 1$  үед  $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+4}a_n$  гэж тодорхойлъя.

(1)  $b_n = a_n^2 \times n(n+1)^2$  дараалал өснө гэж батал.

(2) Дурын  $n$  хувьд

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \leq a_n < \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

**Бодлого Т5.** Хэсэг сурагчид байв. Дурын дөрвөн сурагч авахад үүсэх зургаан хос дотор заавал тэгш тооны найз байдаг байв. Сурагчдыг

(i) дугуйлан бүрийн хувьд тус дугуйланд явдаг бүх сурагчид хоорондоо найз байдаг

(ii) ямар ч хоёр найз авахад хоёулаа явдаг дугуйлан яг нэг байдаг

(iii) сурагч бүр нэг эсвэл хоёр дугуйланд явдаг

байхаар хэдэн дугуйланд хамруулж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т6.** Дурын натурал  $m \geq 3$  тооны хувьд  $(2^m + 1)!! \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$  гэж харуул. Энд сондгой  $k$  тооны хувьд  $k!! = k \times (k-2) \times \dots \times 1$ .

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

## Бодолтууд

### С (5-6) ангилал

**Бодлого С1.** Бат нохойтойгоо дэлгүүрээс гэр хүртлээ алхжээ. Нохой нь түүнээс 4 дахин хурдан тул түрүүлж гэртээ хүрээд буцаж ирэн Баттай хамт явж гэртээ харив. Дэлгүүрээс гэр хүртэл 1 км зайтал бол Батын нохой нийт хэдэн метр зам туулсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу: 2200 м.**

Бат нохойтойгоо буцаж уулзах хүртэл  $x$  м зам туулсан бол нохой нь  $4x$  м зам туулна. Уулзах үедээ тэд нийлээд 2 км зам туулах тул  $x + 4x = 2000 \Rightarrow x = 400$ . Иймд нохой нь нийтдээ  $4 \cdot 400 + 600 = 2200$  м зам туулжээ.

(1) ба (2)-д авсан оноо хоорондоо нэмэгдэнэ. Өөрөөр хэлбэл (1), (2)-ийг бичээд нийт 4 оноо авна.

**Бодлого С2.**  $\overline{abcd}$  - дөрвөн оронтой тоо бөгөөд  $\overline{ab}$  ба  $\overline{cd}$  гэсэн хоёр оронтой тоонуудын нийлбэр  $\overline{bc}$ -тэй тэнцүү байвал  $\overline{abcd}$  тоог сонин тоо гээ. Жишээлбэл  $13 + 18 = 31$  тул 1318 сонин тоо, харин  $\overline{08}$  хоёр оронтой тоо биш тул 1208 сонин тоо биш. Сонин тоо нийт хэдэн ширхэг байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу: 28.**

Нөхцөлөөс  $1 \leq a, c \leq 9$  ба  $0 \leq b, d \leq 9$  байна.

$$10a + b + 10c + d = \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc} = 10b + c$$

нөхцөл  $a + d = 9(b - c - a)$  гэж бичигдэнэ.  $1 \leq a + d \leq 18$  ба  $9 \mid a + d$  гэдгээс  $a + d = 9$  ба  $b = a + c + 1$  байх хэрэгтэй. Учир нь  $a + d = 18$  гэвэл  $a = d = 9$  болох ба  $2 = b - c - 9 \leq 0$  болж зөрчил үүснэ. Иймд нөхцөл хангах дөрвөлүүд

$$(a, b, c, d) = (a, a + c + 1, c, 9 - a)$$

болно. Энд  $a$  ба  $c$  цифрүүд  $a \geq 1, c \geq 1, a + c \leq 8$  нөхцөлүүдийг хангах дурын цифр байж болно.  $a = 1$  үед  $c$  нь 7 боломжтой,  $a = 2$  үед  $c$  нь 6 боломжтой гэх мэтчилэн  $a = 7$  үед  $c$  нь 1 боломжтой тул сонин тоо нийт

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

ширхэг байна.

**Бодлого С3.**  $6 \times 6$  хүснэгтийн зарим нүднүүдэд  $\star$  однууд ба  $\circ$  дугуйнууд зурсан байв. Энэ хүснэгтийг шугамын дагуу, аль ч хэсэгт нь нэг од, нэг дугуй орсон байхаар дөрвөн ижилхэн хэсэгт хуваа.

|   |  |   |   |   |  |
|---|--|---|---|---|--|
|   |  |   |   |   |  |
|   |  | ○ | ○ | ○ |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  |   |   |   |  |
| ○ |  |   |   |   |  |

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. Дараах хуваалт нөхцөл хангана, өөр хувилбар байж болно.

|   |  |   |   |   |  |
|---|--|---|---|---|--|
|   |  |   |   |   |  |
|   |  | ○ | ○ | ○ |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  | ★ | ★ |   |  |
|   |  |   |   |   |  |
| ○ |  |   |   |   |  |

**Бодлого С4.** 1, 2, 3, ..., 11, 12 тоонуудыг хэдэн бүлэгт хуваажээ. Бүлэг бүрийн хамгийн их тоо бүлгийнхээ бусад тоонуудын нийлбэртэй тэнцүү байсан бол тоонуудыг хэдэн бүлэгт хуваасан байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

Бодолт. **Хариу: 4.**

Бүлэг бүрийн хамгийн их тоог тэр бүлгийн том тоо гэе. Бүх тоонуудын нийлбэр  $1 + 2 + \dots + 12 = 78$  тул том тоонуудын нийлбэр 39 байна.  $10 + 11 + 12 = 33 < 39$  тул 3-аас цөөн бүлэгт хуваах боломжгүй. Бүлэг бүрд дор хаяж 3 тоо байх ёстой тул 5 буюу түүнээс олон бүлэгт хувааж чадахгүй. Харин 4 бүлэгт хуваасан жишээ байгуулж болно.

$$\{12, 9, 3\}, \quad \{11, 7, 4\}, \quad \{10, 8, 2\}, \quad \{6, 5, 1\}.$$

## D (7-8) ангилал

**Бодлого D1.** Таван хүүхэдтэй айлын аль ч хоёр хүүхдүүдийн насны нийлбэр өөр хоёр хүүхдийн насны нийлбэртэй давхцдаггүй байв. Хамгийн том хүүхэд хамгийн багадаа хэдэн настай вэ? Энэ айлд ихэр хүүхэд байхгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

Наснуудыг натурал тоо гэж үзсэн бодолт: **Хариу: 8.**

1, 2, 3, 5, 8 настай хүүхдүүд нөхцөл хангана. Иймд хамгийн том хүүхэд 8 настай байх боломжтой.

Одоо 8-аас бага байх боломжгүй гэж харуулъя.

Наснуудаа  $1 \leq a_1 < \dots < a_5 \leq 7$  гэвэл  $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$  ба  $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$  байна гэдгээс

$$a_5 = (a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 \geq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 7$$

болох тул  $a_1 = 1, a_5 = 7$  байна. Цаашилбал  $\{a_2 - a_1, a_4 - a_3\} = \{1, 2\}$  гэдгээс  $\{a_2, a_3, a_4\} = \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 5, 6\}$  гэсэн дөрвөн боломж гарах ба бүгд  $1 + 7 = 8$  нийлбэртэй хоёр тоо агуулах тул нөхцөл хангахгүй.

Наснуудыг сөрөг биш бүхэл тоо гэж үзсэн бодолт: **Хариу: 7.**

0, 1, 2, 4, 7 настай хүүхдүүд нөхцөл хангана. Бодолт болон дүгнэх аргачлал дээрхтэй ижил (бүх насыг 1-ээр багасгана).

**Бодлого D2.**  $ABCD$  квадратын гадна талд  $F$  цэгийг  $BCF$  зөв гурвалжин байхаар, квадратын дотор талд  $E$  цэгийг  $ABE$  зөв гурвалжин байхаар авав.  $EF$  хэрчмийн дундаж цэг  $M$  бол  $\angle AMD$  өнцгийг ол.

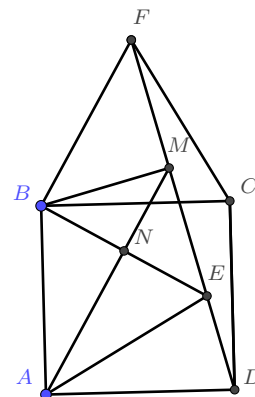
(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **Хариу:  $45^\circ$ .**

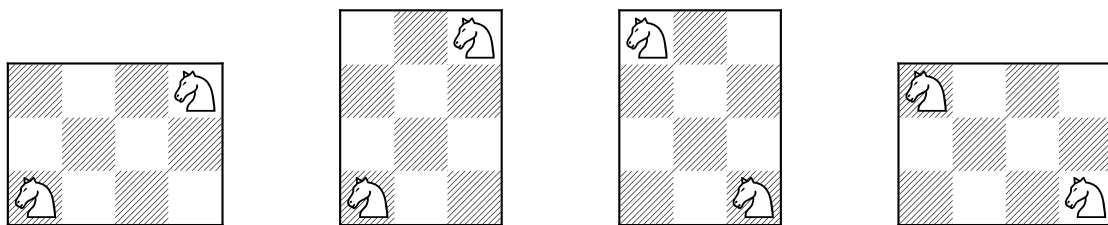
Квадратын талыг  $a$ -аар,  $BE$  хэрчмийн дундажыг  $N$ -ээр тэмдэглэе.

$$\angle FBE = \angle FBC + \angle CBA - \angle ABE = 60^\circ + 90^\circ - 69^\circ = 90^\circ.$$

$BE = a = BF$  учир  $BEF$  адил хажуут, тэгш өнцөгт гурвалжин болно.  $BM = MF$  тул  $MN \perp BE$  байна.  $AB = AE$  тул  $AN \perp BE$  болох ба  $\angle AME = \angle NME = 45^\circ$  байна. Одоо  $M, E, D$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж харуулъя.  $\angle MEB = 45^\circ, \angle BEA = 60^\circ. AE = a = AD$  ба  $\angle EAD = 30^\circ$  тул  $\angle AED = 75^\circ$ . Эндээс  $\angle MED = 45^\circ + 60^\circ + 75^\circ = 180^\circ$  болж  $M, E, D$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Иймд  $\angle AMD = \angle AME = 45^\circ$  байна.



**Бодлого D3.**  $8 \times 8$  хэмжээтэй шатрын хөлөг байв. Анугийн зохиосон шинэ тоглоомын морь  $3 \times 4$  хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн диагоналийн дагуу нүүдэг (зураг хар) бол зүүн доод булангаас эхэлсэн морь баруун дээд буланд хамгийн цөөндөө хэдэн нүүдлээр очих боломжтой вэ?

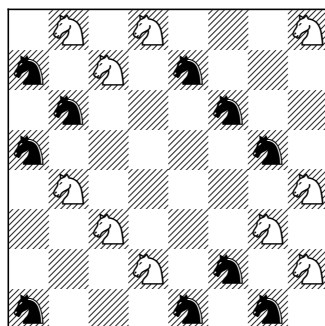


(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 6.**

$a1 \rightarrow d3 \rightarrow g1 \rightarrow e4 \rightarrow h2 \rightarrow f5 \rightarrow h8$  гэж нүүж болох тул 6 нүүгээд очиж чадна. Одоо 5-аас цөөн нүүдлээр очих боломжгүй гэж харуулъя.

$a1$  ба  $h8$  нүднүүд ижил өнгөтэй ба нүүх болгонд нүдний өнгө солигдох тул сондгой тооны нүүдлээр очиж боломжгүй. Зай тооцвол  $2\sqrt{2^2 + 3^2} < \sqrt{2 \cdot 7^2}$  тул 2 нүүдлээр очих боломжгүй.  $a1$  булангаас 2 нүүдлээр  $a5, a7, b6, e1, e7, f2, f6, g1, g5$  нүднүүдэд очиж чадах ба диагоналийн дагуу тэгш хэмтэй хувиргавал  $h8$  нүднээс 2 нүүдлээр очих боломжтой нүднүүд гарах ба энэ дотор давхцал байхгүй.



Иймд 4 нүүдлээр очих боломжгүй.

**Бодлого D4.**  $T = \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 12}{abc}$  илэрхийлэл бүхэл тоо байдаг бүх натурал тоон  $a, b, c$  гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:**  $(a, b, c) = (1, 1, m), (2, 3, n)$  ба эдний сэлгэмлүүд, энд  $m = 1, 2, 4, 8$  ба  $n \geq 1$  дурын.

Дээрх хариунууд шийд болохыг шалгах хялбар тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.  $a, b, c$  натурал тоонуудын хувьд  $T = \frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 12}{abc}$  бүхэл тоо байг.  $a, b, c$  тоонууд тэгш эрхтэй учраас  $1 \leq a \leq b \leq c$  гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. Тохиолдлуудад хуваая.

$a = 1$  гэе.

$$b = 1 \text{ үед } T - 4 = \frac{4(c+1) - 12}{c} - 4 = -\frac{8}{c} \text{ бүхэл гэдгээс } c = 1, 2, 4, 8 \text{ байж болно.}$$

$$b = 2 \text{ үед } T - 3 = \frac{6(c+1) - 12}{2c} - 3 = -\frac{3}{c} \text{ бүхэл гэдгээс } c = 3 \text{ байна.}$$

$b \geq 3$  үед  $(b-2)(c-2) > 0$  гэдгээс  $bc > 2(b+c-2) > 2(b+c-5) > 0$  байх тул  
 $T-2 = \frac{2(b+1)(c+1)-12}{bc} - 2 = \frac{2(b+c-5)}{bc}$  бүхэл байх боломжгүй.

$a = 2$  гэе.

$b = 2$  үед  $T-2 = \frac{9(c+1)-12}{4c} - 2 = \frac{c-3}{4c}$  бүхэл гэдгээс  $c = 3$  байна.

$b = 3$  үед  $T = \frac{12(c+1)-12}{6c} = 2$  бүхэл тул  $c \geq 3$  дурын байж болно.

$b \geq 4$  үед  $(b-3)(c-3) > 0$  гэдгээс  $bc > 3(b+c-3) > 0$  байх тул  $2T-3 = \frac{3(b+1)(c+1)-12}{bc} - 3 = \frac{3(b+c-3)}{bc}$  бүхэл байх боломжгүй.

$a \geq 3$  гэе.  $S = \frac{ab+bc+ca+a+b+c-11}{abc} = T-1$  бүхэл. Энд  $ab+a \geq 12$  тул  $S > 0$  байна.

Нөгөө талаас  $S < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{3(a+1)}{a^2}$  байна.

$a = 3$  үед  $0 < S < \frac{4}{3}$  тул  $S = 1$  байхаас өөр аргагүй. Энэ үед  $bc = 2b + 2c - 4$  гэдгээс  
 $b = 2$  эсвэл  $c = 2$  болох тул эрэмбийн нөхцөл зөрчигдөнө.

$a \geq 4$  үед  $0 < S < \frac{3}{4}$  тул  $S$  бүхэл байх боломжгүй.

## Е (9-10) ангилал

**Бодлого Е1.** Дөрвөн хүүхэдтэй айлын хэдэн ч хүүхдийн насны нийлбэр өөр хэдэн хүүхдийн насны нийлбэртэй ижил байдаггүй гэе. Хамгийн том хүүхэд хамгийн багадаа хэдэн настай вэ? Энэ айлд ихэр хүүхэд байхгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.** 0 настай хүүхэд байвал  $0+a=a$  болж нөхцөл биелэхгүй тул наснуудыг натурал тоо гэж үзэж болно. Наснуудын олонлогийг  $X$  гээд  $d = \max X$  гэе.  $X = \{3, 5, 6, 7\}$  нөхцөл хангах тул  $d = 7$  байх боломжтой. Одоо  $d \leq 6$  байх боломжгүй гэж харуулъя. Илт  $d \geq 4$  байна.

$d = 4$  үед  $\{1, 2, 3, 4\}$  нөхцөл хангахгүй.

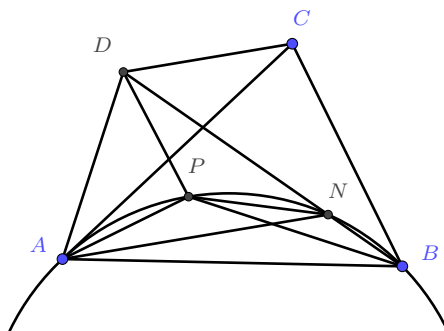
$d = 5$  үед  $\{1, 4\}, \{2, 3\}$  олонлогуудаас нэгээс олон гишүүн агуулж болохгүй тул боломжгүй.

$d = 6$  үед  $\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}$  олонлогуудаас нэг нэг гишүүн агуулна. Тухайлбал  $3 \in X$  байна. Иймд  $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{4, 5\}$  олонлогуудаас нэгээс олон гишүүн агуулж болохгүй. Эндээс  $\{2, 3, 5, 6\}$  гэсэн ганц боломж үлдэх боловч энэ нь нөхцөл хангахгүй.

Иймд  $d \geq 7$ .

**Бодлого Е2.**  $AB > AC$  байдаг хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжны дотор талд  $\angle ANB = 180^\circ - \angle BAC$ ,  $\angle NBA = 180^\circ - 2\angle ACB$  байхаар  $N$  цэгийг авав.  $\angle NBA$  өнцгийн дотоод биссектрис,  $\angle NAC$  өнцгийн дотоод биссектрис  $P$  цэгт огтлолцоно.  $NB$  шулуун,  $C$  цэгийг дайрсан  $AN$  шулуунтай параллель шулуунтай  $D$  цэгт огтлолцоно.  $\angle DPN = 2\angle ABC$  гэж батал.

Бодолт.



$ABC$  гурвалжны  $\angle A$  өнцгийг  $\alpha$ -аар,  $\angle B$  өнцгийг  $\beta$ -аар,  $\angle C$  өнцгийг  $\gamma$ -аар тэмдэглэе. Тэгвэл  $NAB = \alpha + 2\gamma - 90 = \gamma - \beta$  болно.

$\angle PAN = \frac{\angle BAC - \angle BAN}{2} = \frac{\alpha - (\gamma - \beta)}{2} = 90^\circ - \gamma = \angle NBP$  болох тул  $P$  цэг  $ANB$  гурвалжны багтаасан тойрог дээр оршино.

$CD \parallel AN$  тул  $\angle CDN = \angle DNA = \alpha$  учраас  $ABCD$  тойрогт багтана.

$PB$  биссектрис тул  $AP = PN$  байна. Мөн  $\angle ADN = \gamma$ ,  $\angle APN = 180^\circ - 2(90^\circ - \gamma) = 2\gamma$  гэдгээс  $P$  цэг  $ADN$  гурвалжны багтаасан тойргийн төв болох ба  $\angle DPN = 2\angle DAN$  байна.

$\angle ADN = \gamma$ ,  $DNA = \alpha$  учир  $\angle DAN = \angle ABC$ . Иймд  $\angle DPN = 2\angle ABC$  болж батлагдав.

**Бодлого Е3.** Өгөгдсөн  $a, b, c$  натурал тоонуудын хувьд  $P_N = (a^2 + N)(b^2 + N)(c^2 + N)$  үржвэрийг авч үзье.

(1)  $P_N$  тоо бүтэн квадрат биш байх натурал  $N$  тоо олдохыг харуул.

(2)  $P_N$  тоо бүтэн квадрат байх натурал  $N$  тоо олдохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.

(1) Бүхэл тооны квадрат 4-т хуваахад эсвэл 0 эсвэл 1 үлдэгдэл өгдгийг саная.

$a, b, c$  тоонууд бүгд тэгш үед  $P_3 \equiv 3 \pmod{4}$  тул  $P_3$  бүтэн квадрат биш. Үүнтэй ижлээр бүгд сондгой үед  $P_2 \equiv 3 \pmod{4}$ , яг нэг нь тэгш үед  $P_2 \equiv 2 \pmod{4}$ , яг нэг нь сондгой үед  $P_1 \equiv 2 \pmod{4}$  тул бүтэн квадрат биш.

(2)  $N = ab + bc + ca$  гэж сонгож авъя. Тэгвэл  $a^2 + N = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$  болно. Иймд

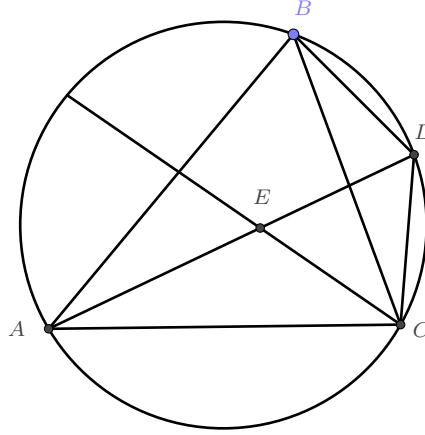
$$(a^2 + N)(b^2 + N)(c^2 + N) = ((a + b)(b + c)(c + a))^2$$

болж батлагдав.

**Бодлого Е4.**  $ABC$  гурвалжны  $\angle A$  өнцгийн дотоод биссектрис  $\angle C$  өнцгийн дотоод биссектрис-тэй  $E$  цэгт огтлолцоно.  $\angle A$  өнцгийн дотоод биссектрис дээр  $EC = ED$  байх  $D$  цэгийг  $E$  цэг  $A, D$  цэгүүдийн хооронд байхаар авав.  $ACDB$  дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах бол  $\angle B$  өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **Хариу:**  $\angle B = 60^\circ$ .



$\angle ABC = \beta$  гэвэл  $\angle ADC = \beta$ ,  $ED = EC$  тул  $\angle DCE = \beta$ . Иймд  $\angle DEC = 180^\circ - 2\beta$ .

Мөн  $\angle DEC = \angle EAC + \angle ECA = \angle A/2 + \angle B/2 = 90^\circ - \beta/2$ . Эндээс  $180^\circ - 2\beta = 90^\circ - \beta/2$ . Иймд  $\beta = 60^\circ$ .

**Бодлого Е5.**  $10 \times 10$  хүснэгтийн бүх нүдэнд  $-1$  тоо бичигдсэн байв. Дараалсан хоёр мөр ба дараалсан хоёр багана сонгож аваад тэдгээрийн огтлолцолд бичигдсэн дөрвөн тоог хэвээр нь үлдээгээд, сонгогдсон мөр ба баганад бичигдсэн бусад бүх тоонуудын тэмдэгийг эсрэгээр солих үйлдэл хийж болно. Хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоог 1 болгож болох уу?

Бодолт. **Хариу:** Болохгүй.

Бүх тоог 1 болгож болдог гэж үзье.  $a_i$ -ээр  $i$ -р мөр хэдэн удаа сонгогдсон тоог,  $b_j$ -ээр  $j$ -р багана хэдэн удаа сонгогдсон тоог тэмдэглэе. Тэгвэл бүх тоог 1 болохын тулд

$$a_i + b_j \equiv 1 \pmod{2}, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad j = 1, 2, \dots, 10 \quad (*)$$

байна. Дараалсан мөр ба багана дээр үйлдэл хийж байгаа тул

$$\begin{cases} a_1 = m_1 \\ a_2 = m_1 + m_2 \\ a_3 = m_2 + m_3 \\ \vdots \\ a_9 = m_8 + m_9 \\ a_{10} = m_9 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = n_1 \\ b_2 = n_1 + n_2 \\ b_3 = n_2 + n_3 \\ \vdots \\ b_9 = n_8 + n_9 \\ b_{10} = n_9 \end{cases} \quad (**)$$

байх  $m_i, n_j$  тоонууд оршин байна. Энд  $m_i$  нь  $i, i+1$ -р мөрийг сонгосон тоо,  $n_j$  нь  $j, j+1$ -р баганыг сонгосон тоо юм. Нийт үйлдэл хийсэн тоог  $k$  гэвэл  $k = m_1 + m_2 + \dots + m_9 = n_1 + n_2 + \dots + n_9$  байна.

*Тохиолдол салгасан бодолт:*  $a_1 + b_1$  сондгой тул нэг нь тэгш, нөгөө нь сондгой байна.  $a_1$  тэгш,  $b_1$  сондгой гэе.  $a_1 + b_j$  бүр сондгой тул  $b_j$  тоонууд бүгд сондгой болно. Иймд  $n_1$  сондгой,  $(**)$ -оос  $n_2$  тэгш,  $n_3$  сондгой,  $n_4$  тэгш гэх мэтчилэн  $n_9$  сондгой байна. Цаашилбал  $a_i + b_1$  бүр сондгой тул  $a_i$  тоонууд бүгд тэгш байна. Дээрхтэй ижлээр  $m_1, m_2, \dots, m_9$  тоонууд бүгд тэгш. Эндээс  $m_1 + \dots + m_9$  тэгш, харин  $n_1 + n_2 + \dots + n_9$  сондгой байх тул хүснэгтийн бүх тоог 1 болгох боломжгүй юм.  $a_1$  сондгой,  $b_1$  тэгш үед яг адилаар батлагдана.

Нийлбэр ашигласан бодолт:  $2k = (m_1 + \dots + m_9) + (n_1 + \dots + n_9)$  гэдгээс

$$0 \equiv 2k = (a_1 + b_1) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_9 + b_9) \equiv 5 \equiv 1 \pmod{2}$$

болж зөрчил гарах тул хүснэгтийн бүх тоог 1 болгох боломжгүй.

**Бодлого Е6.** Бүхэл  $n \geq 0$  ба бодит  $x$  тооны хувьд  $Q_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  гэе.

$n \geq 1$  ба  $b > a > 0$  бол  $\frac{Q_n(b) - Q_n(a)}{b - a} \geq Q_{n-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)$  гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.  $k \geq 1$  ба  $b > a > 0$  бол  $\frac{b^k - a^k}{b - a} \geq k \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-1}$  гэж харуулахад хангалттай.  $b = a + 2c$  ба  $c > 0$  хувьд

$$(a + 2c)^k \geq a^k + 2kc(a + c)^{k-1}$$

гэж баталъя. Бернулийн тэнцэтгэл бишээс  $1 \leq l \leq k$  хувьд  $2^{l-1} \geq l$  гэдгээс

$$\binom{k}{l} 2^l \geq 2k \binom{k-1}{l-1}$$

болох тул биномын задаргаагаар батлагдана.  $n = 1, 2$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

## F (11-12) ангилал

**Бодлого F1.** Натурал  $n$  тооны хувьд  $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3}$  гэе. Энд  $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$ .

(1)  $n \geq 3$  үед  $a_n > a_{n+1}$  гэж батал.

(2)  $a_n$  бүхэл байдаг бүх натурал  $n$  тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

(1)  $n \geq 3$  үед  $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n-3) + 2}{(n+1)^2} > 0$  тул  $a_n > a_{n+1}$  байна.

(2) **Хариу:**  $n = 1, 2$ .

$n = 1, 2$  үед  $(n!)^3 \mid (2n)!$  байх нь илт.  $n = 3, 4$  үед  $3 \mid n!$  ба  $3^3 \nmid (2n)!$  байна.  $n = 5, 6$  үед  $5 \mid n!$  ба  $5^3 \nmid (2n)!$  байна.  $n = 7$  үед  $a_7 = \frac{143}{210} < 1$  ба  $n \geq 8$  үед (1)-с  $a_n < a_7 < 1$  байна.

**Бодлого F2.** Хос хосоороо ялгаатай  $x, y, z$  бодит тоонуудын хувьд

$$x(z+1) = y(x+1) = z(y+1)$$

нөхцөл биелдэг бол  $z \neq 0$  болохыг баталж  $y + 1/z$  илэрхийллийн утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодолт.** **Хариу:**  $y + 1/z = -1$ .

**Тэгш хэм ашигласан бодолт:**  $x(z + 1) = y(x + 1) = z(y + 1) = A$  гэе.

$xz = A - x$  ба  $yz = A - z$  гэдгээс  $xyz = x(A - z) = Ax - (A - x) = (A + 1)x - A$  болно. Мөн ижлээр  $xyz = (A + 1)y - A$  болох ба  $x \neq y$  тул  $A + 1 = 0$  байна. Одоо  $z(y + 1) = A = -1$  гэдгээс  $z \neq 0$  ба  $y + 1/z = -1$  байна.

**Ялгавар ашигласан бодолт:** Бодлогын нөхцөл хангах  $x, y, z$  бодит тоонуудын хувьд

$$x - y = x(y - z) \quad \text{ба} \quad y - z = y(z - x) \quad \text{ба} \quad z - x = z(x - y)$$

биелнэ.  $x, y, z$  ялгаатай гэдгээс  $xyz = 1$  гэж мөрдөх ба тухайлбал  $x, y, z \neq 0$  байна. Мөн  $x(1/(xy) + 1) = y(x + 1)$  гэдгээс  $(y - 1)(y + xy + 1) = 0$  болно.

$y \neq 1$  бол  $y + xy + 1 = 0$  гэдгээс  $y + 1/z = y + xy = -1$  байна.

$y = 1$  бол  $z \neq 1$  ба  $x(z + 1) = x + 1 = 2z$  буюу  $(2z - 1)(z + 1) = 2z$  гэдгээс  $z = -1/2$  болох тул  $y + 1/z = 1 - 2 = -1$  байна.

**Олон гишүүнт ашигласан бодолт:**  $z = 0$  бол  $x = x(z + 1) = z(y + 1) = 0$  болж  $x \neq z$  гэдэгт зөрчнө. Иймд  $z \neq 0$  байна. Мөн ижлээр  $x \neq 0, y \neq 0$  ба  $x = \frac{A}{y} - 1, y = \frac{A}{z} - 1, z = \frac{A}{x} - 1$  байна. Эндээс

$$x + 1 = \frac{A}{y} = \frac{A}{\frac{A}{z} - 1} = \frac{A}{\frac{A}{\frac{A}{x} - 1} - 1} = \frac{A}{\frac{A}{\frac{A}{x} - 1} - 1} = \frac{A}{\frac{Ax}{A - x} - 1} = \frac{A(A - x)}{Ax - A + x}$$

болох тул  $(x + 1)(Ax - A + x) - A(A - x) = (A + 1)(x^2 + x - A) = 0$  байна.  $A \neq -1$  бол  $A = x(x + 1) = x(z + 1) = y(x + 1)$  гэдгээс  $x, y, z$  тоонууд бүгд ялгаатай байх боломжгүй. Иймд  $A = -1$  ба  $y + 1/z = y - A/z = -1$  байна.

**Бодлого F3.** 0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн, дор хаяж дөрвөн ширхэг 1 агуулсан  $n \geq 4$  оронтой тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

**Бодолт.** **Хариу:**  $3 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-5}(2n^3 + 15n^2 + 103n + 366)/2$  ширхэг.

0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн,  $k$ -аас олонгүй 1 агуулсан  $n$ -ээс хэтрэхгүй оронтой тооны тоог  $a(k, n)$  гэвэл

$$a(k, n) = 3^n + \binom{n}{1}3^{n-1} + \dots + \binom{n}{k}3^{n-k}$$

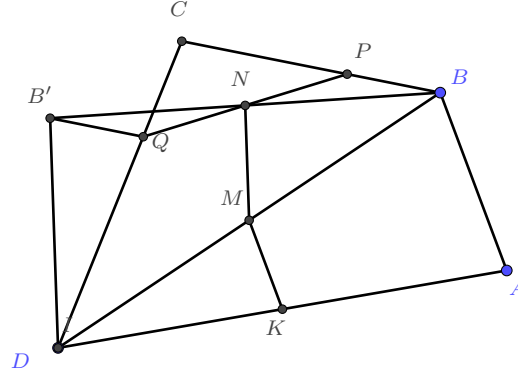
байна. Иймд бодлогын нөхцөл хангах тооны тоо

$$d_n = 3 \cdot 4^{n-1} - a(2, n-1) - 2 \cdot a(3, n-1) = 3 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-5}(2n^3 + 15n^2 + 103n + 366)/2$$

байна. Тухайлбал  $d_4 = 1, d_5 = 15, d_6 = 138, d_7 = 1002$  байна.

**Бодлого F4.**  $ABCD$  дөрвөн өнцөгтийн  $BC$  тал дээр  $P$  цэгийг,  $CD$  тал дээр  $Q$  цэгийг авсан ба  $2PB = AB, 2QD = AD$  байв.  $BD$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $M, PQ$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $N$  гэе. Хэрэв  $4MN = BD$  байсан бол  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

Бодолт.



$B$  цэгийг  $N$  цэгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргаад  $B'$  гэвэл  $B'Q = PB = AB/2$  байна.

$AD$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $K$  гэе.  $MK = AD/2 = B'Q$ ,  $QD = AD/2 = DK$ ,  $B'D = 2MN = BD/2 = DM$ .

Эндээс  $\triangle B'QD = \triangle MDK$  байна. Иймд  $\angle B'QD = \angle MKD = \angle BAD$ ,  $\angle B'QD = 180^\circ - \angle B'QC = 180^\circ - \angle DCB$ ,  $\angle BAD = \angle DCB = 180^\circ$  болж батлагдав.

**Бодлого F5.** Дурын натурал  $m \geq 3$  тооны хувьд  $(2^m - 1)!! \equiv 1 \pmod{2^m}$  гэж батал. Энд сондгой  $k$  тооны хувьд  $k!! = k \times (k-2) \times \dots \times 1$ .

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.  $M = 2^m$  ба  $K = 2^{m-1}$  гэе.  $A = \{1, 3, 5, \dots, M-1\}$  олонлог бүх  $M$ -модулиар урвуутай үлдэгдлээс тогтоно. Одоо  $B = \{x \in A \mid x^2 \equiv 1 \pmod{M}\}$  гэвэл  $B = \{1, K-1, K+1, M-1\}$  байна.  $m \geq 3$  гэдгээс эдгээр гишүүд бүгд ялгаатай.

Иймд  $(M-1)!! \equiv (K-1)(K+1)(M-1) \equiv 1 \pmod{M}$  байна. Энд  $A$  олонлогийн гишүүдийг үржүүлэхэд урвуугаасаа ялгаатай гишүүд урвуутайгаа үржигдэж 1 болох тул зөвхөн урвуутайгаа тэнцдэг гишүүдийн, өөрөөр хэлбэл,  $B$  олонлогийн гишүүдийн үржвэр үлдэхийг ашиглав.

**Бодлого F6.**  $a, b$  эерэг бодит тоонууд

$$\begin{cases} a^2 = 2 + b \\ b^3 = 3 - a \end{cases}$$

нөхцөлийг хангадаг гэе.  $x^n + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдгүй байдаг бүх натурал  $n$  тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:**  $n = 2, 4$ .

Завсрын утгын теоремоор сондгой зэргийн олон гишүүнт бүр бодит язгууртай тул  $n$  тэгш тохиолдлыг авч үзэхэд хангалттай ( $n = 1$  үед  $a + 1 > 0$  болохыг ашиглана).

$n = 2$  гэе.  $b \leq 1$  гэвэл  $a = 3 - b^3 \geq 2$  болох ба энэ нь  $a^2 = 2 + b \leq 3$  гэдэгтэй зөрчилдөнө.

Иймд  $b > 1$  байна. Эндээс дурын  $x$ -ийн хувьд

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3b-2}{4} > \frac{1}{4}$$

байх тул  $x^2 + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдгүй.

$n = 4$  гэе.  $u = \sqrt[3]{-a/4}$  гэвэл  $4u^3 + a = 0$  байна. Дурын  $x$ -ийн хувьд арифметик-геометр дунджийн тэнцэтгэл бишээс  $x^4 + 3u^4 \geq 4u^3x$  байх тул  $x^4 + ax + b \geq b - 3u^4$  байна. Одоо  $b > 3u^4$  буюу  $4^4b^3 > 3^3a^4$  гэж харуулъя.  $b > 1$  ба  $4^4 = 256 > 243 = 3^5$  тул

$$4^4b^3 > 3^5b^2 = 3^3(2b + b)^2 > 3^3(2 + b)^2 = 3^3a^4$$

байна. Иймд  $x^4 + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдгүй.

$n = 6$  гэе.  $v = \sqrt[5]{-a/6}$  гэвэл  $6v^5 + a = 0$  байна. Завсрын утгын теоремоор  $v^6 + av + b = b - 5v^6 < 0$  буюу  $6^6b^5 < 5^5a^6$  гэж харуулахад хангалттай.

$b > 1$  ба  $a > 0$  тул  $a = \sqrt{2 + b} > \sqrt{3}$  байна. Эндээс  $b^3 = 3 - a < 3 - \sqrt{3} < \frac{4}{3}$  болно.  $2^{10} \cdot 3 = 3072 < 3125 = 5^5$  тул

$$6^6b^6 < 6^6\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2^{10} \cdot 3^4 < 5^5 3^3 1 < 5^5 a^6 b$$

байна. Иймд  $x^6 + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдтэй.

$n \geq 8$  тэгш гэе.  $v$ -г өмнөх хэсэгтэй ижил авъя.  $a = 3 - b^3 < 2$  тул  $|v| < 1$  байна. Эндээс  $v^n + av + b \leq v^6 + av + b < 0$  байна. Иймд  $x^n + ax + b = 0$  тэгшитгэл бодит шийдтэй.

**Нэмэлт.** Нөхцөл хангах хос  $(a, b) \approx (1.75, 1.08)$  цор ганц байна. Энэ үед

$$\min\{x^2 + ax + b\} \approx 0.31 > 0$$

$$\min\{x^4 + ax + b\} \approx 0.08 > 0$$

$$\min\{x^6 + ax + b\} \approx -0.07 < 0$$

байна.

## S (ББ) ангилал

**Бодлого S1.** Бат явган алхахаасаа 3 дахин хурдан гүйдэг. Бат сургууль руугаа алхдаг боловч заримдаа хичээлээсээ хоцрохгүйн тулд гүйх хэрэгтэй болдог. Бат өнөөдөр сургуульдаа явахдаа өчигдрөөс 12 минут илүү алхсан бол өнөөдөр өчигдрөөс хэдэн минут илүү хугацаа зарцуулсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодолт.** **Хариу: 8 минут.**

**Арифметик бодолт:** Бат нэг минутанд 1 хэсэг газар алхдаг гэе. Тэгвэл 1 минутанд 3 хэсэг газар гүйх ба зөрөө нь 2 хэсэг газар болно. 12 минутанд явсан замын зөрөө нь  $12 \cdot 2 = 24$  хэсэг болно. Энэ зөрөөг Бат гүйж арилгах тул  $24 \div 3 = 8$  минут.

**Хувьсагч ашигласан бодолт:** Өчигдөр  $x$  мин алхаж,  $y$  минут гүйсэн, өнөөдөр  $x + 12$  минут алхаж  $t$  минут гүйсэн гэе. Эхлээд  $y - t$  хугацааг олж. 1 минутанд 1 хэсэг газар алхдаг гэвэл Батын гэрээс сургууль хүртэлх зай

$$x + 3y = x + 12 + 3t$$

хэсэг болно. Эндээс  $3(y - t) = 12$  буюу  $y - t = 4$  байна. Иймд өнөөдөр өчигдрөөс

$$(x + 12 + t) - (x + y) = 12 - (y - t) = 12 - 4 = 8$$

минут илүү зарцуулсан.

**Бодлого S2.** Самбарт анх 2022 гэсэн тоо бичигдсэн байв. Чимгээ самбарт хамгийн сүүлд бичигдсэн тооноос 2-оор бага эсвэл 2-оор их тоог самбарт нэмж бичиж болно. Харин Цэцгээ самбарт хамгийн сүүлд бичигдсэн тооноос 3-аар бага эсвэл 3-аар их тоог самбарт нэмж бичиж болно. Чимгээ эхэлж үйлдэл хийгээд цаашид ээлжлэн үйлдэл хийнэ. 2022 үйлдлийн дараа самбарт 1, 2, 3, ..., 2023 тоонууд бүгд нэг, нэг удаа бичигдсэн байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* **Хариу: Болохгүй..**

Самбарт бичсэн тоонууд нь Т, Т, С, С, Т, Т, С, С, ... дараалал үүсгэнэ. Өөрөөр хэлбэл сондгой тоонууд нь тэгшээсээ ямагт цөөн эсвэл тэнцүү тоотой байна. Гэтэл 1, 2, 3, ..., 2023 тоонууд бичигдсэн гэвэл сондгой тоо нь тэгшээсээ олон болоход хүрнэ. Иймд боломжгүй.

**Бодлого S3.** Жингээрээ ялгаатай 59 ширхэг зоос байв. Туухайгүй жингээр нийт 64 удаа жинлээд жингээрээ хамгийн хүнд болон хүндээрээ 2-т орох зоосыг олж чадна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* 59 зоосоо бөхчилж жинлээд хөнгөн зоосыг нь хасах замаар хамгийн хүндийг нь олоход нийт 58 жинлэлт болно. Учир нь 58 зоос хасагдах ёстой бөгөөд тухай бүрд нь нэг жинлэлт харгалзана. Хоёр дахь хүнд зоос нь зөвхөн хамгийн хүнд зоостой жинлэсэн тохиолдолд хасагдах тул хамгийн хүнд зоостой жинлээд хасагдсан зоосон дунд байна. Эдгээр нь хамгийн олондоо 6 ширхэг зоос байх ба эдгээрийн хамгийн хүндийг нь бид 5 жинлэлтээр олж чадна.

**Бодлого S4.** Цифрүүдийнх нь үржвэр дээр цифрүүдийнх нь нийлбэрийг 7 удаа нэмэхэд өөрөө гардаг гурван оронтой бүх тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

*Бодолт.* **Хариу: 198.**

Нөхцөлөөс  $6c - 3b = a(93 - bc)$  болно.  $a = 1$  үед  $(b + 6)(c - 3) = 93 - 18 = 3 \cdot 5 \cdot 5$  гэдгээс  $b = 9$ ,  $c = 8$  болно. Одоо өөр шийдгүй гэж харуулъя. Эхлээд

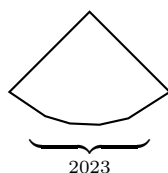
$$(a - 2)(93 - bc) = 6c - 3b - 2(93 - bc) = (b + 3)(2c - 3) - 177$$

гэж бичье.  $a = 2$  үед  $(b + 3)(2c - 3) = 3 \cdot 59$  шийдгүй ба  $a \geq 3$  үед  $12 = 1 \cdot (93 - 81) \leq (a - 2)(93 - bc) = (b + 3)(2c - 3) - 177 \leq 12 \cdot 15 - 177 = 3$  гэж зөрчил гарах тул шийдгүй.

**Бодлого S5.** Хэрвээ гүдгэр олон өнцөгт яг 2023 ширхэг мохоо өнцөгтэй бол уг олон өнцөгт хамгийн олондоо хэдэн өнцөгтэй вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Ямар ч гүдгэр олон өнцөгтийн гадаад өнцгүүдийн нийлбэр  $360^\circ$  байдаг. Иймд хурц эсвэл тэгш өнцөгийн тоо 4-өөс хэтрэхгүй бөгөөд хэрвээ 4 бол тэгш өнцөгт л байх боломжтой. Өгсөн дүрс тэгш өнцөгт биш тул нийт өнцгийн тоо  $2023 + 3 = 2026$ -аас хэтрэхгүй.



**Бодлого S6.** Зөв 30 өнцөгтийн оройнууд дээр оройтой хурц өнцөгт гурвалжны тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

*Бодолт.* Гурвалжны хурц өнцгийг суурийн орой гэе. Бэхлэгдсэн орой нэг суурийн орой нь болдог мохоо өнцөгт гурвалжны тоо

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + 14) = 210$$

байна. Мохоо эсвэл тэгш өнцөгт гурвалжин бүр яг 2 суурийн оройтой тул нийт мохоо эсвэл тэгш өнцөгт гурвалжны тоо  $\frac{210 \cdot 30}{2} = 3150$ . Нөгөө талаас нийт гурвалжны тоо  $C_{30}^3 = 4060$  тул хурц өнцөгт гурвалжны тоо  $4060 - 3150 = 910$  байна.

## Т (ДБ) ангилал

**Бодлого Т1.** Натурал тоон гишүүдтэй арифметик прогрессын дэс дараалсан долоон гишүүний квадратуудын нийлбэр бүтэн квадрат байх боломжгүйг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Арифметик прогрессын дараалсан долоон гишүүний квадратуудын нийлбэр

$$(a - 3d)^2 + (a - 2d)^2 + (a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + (a + 3d)^2 = 7(a^2 + 4d^2)$$

хэлбэртэй байна. Эсрэгээс нь  $7(a^2 + 4d^2) = c^2$  байх натурал тоон  $(a, d, c)$  гурвал олддог гээд ийм гурвалууд дотроос хамгийн бага  $a$  тоотойг сонгоё. Нөхцөлөөс  $c$  тоо 7-д хуваагдах тул  $c = 7C$  гэе. Тэгвэл  $a^2 + (2d)^2 = 7C^2$  болох ба бүтэн квадратыг 7-д хуваахад 0, 1, 2, 4 үлдэгдэл өгнө гэдгээс  $a, d$  тоонууд 7-д хуваагдахаас өөрцгүй.  $a = 7A, d = 7D$  гэвэл  $7(A^2 + 4D^2) = C^2$  болох ба  $A < a$  тул  $a$  тоо хамгийн бага байдаг гурвал сонгосон гэдэгт зөрчнө. Иймд нөхцөл хангах  $(a, d, c)$  тоонууд олдохгүй.

**Бодлого Т2.** Тал бүрийн урт нь натурал тооны бүтэн квадрат байдаг хурц өнцөгт, элдэв талт гурвалжны периметр хамгийн багадаа хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

*Бодолт.* **Хариу: 245.**

64, 81, 100 талуудтай гурвалжин нөхцөл хангана. Одоо энэ гурвалжин хамгийн бага периметртэй гэж харуулъя. Талуудыг  $a^2 < b^2 < c^2$  гэвэл  $a < b < c < \sqrt[4]{a^4 + b^4}$  нөхцөлөөс

$$(b + 1)^4 + 1 \leq c^4 + 1 \leq a^4 + b^4 \leq (b - 1)^4 + b^4$$

болох ба эндээс  $(b^2 + 1)(b(b - 8) - 1) = (b - 1)^4 + b^4 - (b + 1)^4 - 1 \geq 0$  болох тул  $b \geq 9$  байна. Энэ үед  $c \geq 10$  ба  $a^4 \geq (b + 1)^4 - b^4 + 1 \geq 3440$  гэдгээс  $a \geq 8$  байна. Ийм гурвалжны периметр хамгийн багадаа  $8^2 + 9^2 + 10^2 = 245$  байна.

**Бодлого Т3.** 0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн  $n \geq 4$  оронтой тооны  $n - 4$  ширхэг цифрийг 2023 үлдэхээр дарж болдог бол туулай тоо гэе.  $n \geq 4$  оронтой туулай тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* **Хариу:  $3 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-5}(2n^3 + 15n^2 + 103n + 366)/2$  ширхэг.**

0, 1, 2, 3 цифрүүдээр бичигдсэн  $n$  оронтой  $3 \cdot 4^{n-1}$  тоо байна. Цифрүүдийг дарсаар байгаад 2-ийг гаргаж авч чаддаг тоо  $a_n$  ширхэг, 20 гаргаж авч чаддаг тоо  $b_n$  ширхэг, 202 гаргаж авч чаддаг тоо  $c_n$  ширхэг, 2023 гаргаж авч чаддаг тоо  $d_n$  ширхэг байдаг гэе.

$n \geq 1$  хувьд  $3 \cdot 4^{n-1} - a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$  байх нь илэрхий. Цаашилбал  $b_1 = 0$  ба  $n \geq 1$  үед  $b_{n+1} = 4b_n + (a_n - b_n) = 3b_n + a_n$  байна. Мөн ижлээр,  $c_1 = d_1 = 0$  ба  $n \geq 1$  үед  $c_{n+1} = 3c_n + b_n$  ба  $d_{n+1} = 3d_n + c_n$  байна.

$$n \geq 1 \text{ үед } \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{4^n}{3^n} - 1 \text{ гэдгээс}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_n}{3^n} = \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{2n+7}{9}$$

$$\frac{c_n}{3^n} = \frac{c_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left( \frac{b_1}{3^1} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{n^2 + 6n + 20}{27}$$

$$\frac{d_n}{3^n} = \frac{d_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{c_{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left( \frac{c_1}{3^1} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{2n^3 + 15n^2 + 103n + 366}{486}$$

байна. Иймд  $n \geq 4$  оронтой сайн тоо  $d_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 3^{n-5}(2n^3 + 15n^2 + 103n + 366)/2$  ширхэг байна. Тухайлбал  $d_4 = 1$ ,  $d_5 = 15$ ,  $d_6 = 138$ ,  $d_7 = 1002$  байна.

**Бодлого Т4.**  $a_1, a_2, \dots$  дарааллыг  $a_1 = 1$  ба  $n \geq 1$  үед  $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+4} a_n$  гэж тодорхойлъё.

(1)  $b_n = a_n^2 \times n(n+1)^2$  дараалал өснө гэж батал.

(2) Дурын  $n$  хувьд

$$\left( \frac{1}{n} \right)^{3/2} \leq a_n < \left( \frac{2}{n} \right)^{3/2}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

*Бодолт.*

$$(1) 1 - \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)^2} > 0 \text{ тул } b_n \text{ дараалал өснө.}$$

$$(2) c_n = a_n^2 \times (n+1)^3 \text{ гэвэл } 1 - \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3n+2}{4(n+1)^3} > 0 \text{ тул } c_n \text{ дараалал буурна. Эндээс}$$

$$4 = b_1 < b_2 < \cdots < b_n < c_n < \cdots < c_2 < c_1 = 8$$

болно. Одоо  $1 \leq \frac{b_n}{4} \leq a_n^2 n^3 < c_n \leq 8$  гэдгээс батлах зүйл мөрдөнө.  $n = 1$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Нэмэлт.** (i) Бодолтоос  $\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}} \leq a_n \leq \left( \frac{2}{n+1} \right)^{3/2}$  гэж мөрдөнө.

$$(ii) d_n = a_n^2 \times n^3 \text{ гэвэл } 1 - \frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{9n^3 + 19n^2 + 7n + 1}{(2n+1)^2(n+1)^3} > 0 \text{ тул } d_n \text{ дараалал өснө.}$$

$$(iii) \text{ Валлисын үржвэрийн томьёоноос } n \rightarrow \infty \text{ үед } a_n^2 n^3 \nearrow \frac{16}{\pi} \approx 5.09 \text{ байна.}$$

$$(iv) 4^{n-1} a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \text{ Мянгат-Каталаны тоо.}$$

**Бодлого Т5.** Хэсэг сурагчид байв. Дурын дөрвөн сурагч авахад үүсэх зургаан хос дотор заавал тэгш тооны найз байдаг байв. Сурагчдыг

- (i) дугуйлан бүрийн хувьд тус дугуйланд явдаг бүх сурагчид хоорондоо найз байдаг
- (ii) ямар ч хоёр найз авахад хоёулаа явдаг дугуйлан яг нэг байдаг
- (iii) сурагч бүр нэг эсвэл хоёр дугуйланд явдаг

байхаар хэдэн дугуйланд хамруулж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.* Найзуудын граф авч үзье. Бүгд хос хосоороо холбогдсон оройнуудын олонлогийг клик гээд илүү олон оройтой кликэд агуулагддаггүй кликийг том клик гээ.

Том клик бүрд нэг дугуйлан харгалзуулахад нөхцөл биелнэ. (i) нөхцөл дугуйлангууд клик болохыг илэрхийлнэ.

(ii) Дурын  $ab$  ирмэг ямар нэгэн том кликэд агуулагдана.  $ab$  ирмэг  $C, D$  гэсэн хоёр өөр том кликэд агуулагддаг гээд  $a, b$ -ээс ялгаатай  $c \in C, d \in D$  оройнууд сонгоё. Тэгвэл  $ab, ac, bc, ad, bd$  ирмэгүүд байх тул нөхцөлөөс  $cd$  ирмэг байна. Иймд  $C \cup D$  клик болох ба энэ нь  $C, D$  том гэдэгт зөрчинө.

(iii)  $a$  орой  $C, D, E$  гэсэн гурван өөр том кликэд ордог гээд  $a$ -аас ялгаатай  $c \in C, d \in D, e \in E$  оройнууд сонгоё.  $cd, de, ec$  дотор сондгой тооны ирмэг байх тул  $cd$  ирмэг гэж үзэж болно.  $a, c$ -ээс ялгаатай  $c' \in C$  орой сонгоё. Энэ үед  $ac, ad, cd, cc', ac'$  ирмэгүүд тул  $c'd$  ирмэг байх ёстой. Эндээс  $C \cup \{d\}$  клик болох ба  $C$  том гэдэгт зөрчинө.

**Бодлого Т6.** Дурын натурал  $m \geq 3$  тооны хувьд  $(2^m + 1)!! \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$  гэж харуул. Энд сондгой  $k$  тооны хувьд  $k!! = k \times (k - 2) \times \dots \times 1$ .

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.*  $N = 2^{m+1}$  ба  $K = N/8, L = N/4, M = N/2$  гээ.  $m \geq 3$  гэдгээс  $K$  тэгш байна. Одоо  $5^K = (1 + 4)^K \equiv 1 + M \pmod{N}$  ба  $5^L \equiv 1 \pmod{N}$  гэдгээс

$$\{1, 5, 5^2, \dots, 5^{L-1}\} \equiv \{1, 5, 9, \dots, 4(L-1) + 1\} \pmod{N}$$

байна. Тухайлбал  $\prod_{k=0}^{L-1} (4k + 1) \equiv \prod_{k=0}^{L-1} 5^k \equiv 5^{(L-1)K} \equiv (1 + M)^{L-1} \equiv 1 + M \pmod{N}$  байна. Эндээс

$$\begin{aligned} (M + 1)!! &= \prod_{k=0}^K (4k + 1) \times \prod_{k=0}^{K-1} (4k + 3) = \prod_{k=0}^K (4k + 1) \times \prod_{k=K}^{L-1} (N - (4k + 1)) \\ &\equiv (-1)^K (1 + M) \prod_{k=0}^{L-1} (4k + 1) \equiv 1 \pmod{N} \end{aligned}$$

байна.



# Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын II Давааны II шат

## Хот/бүсийн Олимпиад

Монголын Математикийн 59-р олимпиадын II давааны II шат буюу хот/бүсийн олимпиад 2023 оны 3-р сарын 25, 26-ны өдрүүдэд Улаанбаатар хот болон Ховд (Цэцэг сум), Өмнөговь, Орхон, Хэнтий (Бор-Өндөр сум) аймгуудад тус тус зохион байгуулагдлаа.

Энэ жилийн бүсийн олимпиад аймгийн олимпиадын дараа болсон тул улсын эрхийг давхардуулахгүйгээр олгох боломжтой болсон нь энэ жилийн гол онцлог байв. Мөн Улаанбаатар хотын олимпиадыг бүсийн олимпиадын эрх авсан нийт багш, сурагчдад нээлттэй болголоо. Ингэснээр хөдөө орон нутгаас нэг ангилалд хэдэн ч сурагч улсын олимпиадад оролцох боломжтой болж байгаа юм.

## Бодлогууд

### D (7-8) ангилал

**Бодлого D1.**  $n$  натурал тоо бол  $3^n + 5^n$  нийлбэр бүтэн квадрат биш гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого D2.**  $ABCD$  трапецын  $CD$  хажуу талын дундаж цэгийг  $M$  гээ.  $BM$  хэрчим  $AC$  диагональтай  $E$  цэгт огтлолцоно.  $AE$  хэрчим дээр  $EC = EL$  байх  $L \neq C$  цэг авав.  $BL$  шулуун  $AD$  суурьтай  $K$  цэгт огтлолцоно.  $AK = KD$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого D3.** Алимаа самбарт 2023-аас хэтрэхгүй хэдэн ялгаатай натурал тоог, самбарт бичигдсэн ямар ч хоёр тооны нийлбэр ялгавартаа хуваагдахгүй байхаар бичихийг хүсжээ. Жишээлбэл  $4 \nmid 10$ ,  $13 \nmid 27$ ,  $17 \nmid 23$  тул Алимаа 3, 7, 20 тоонуудыг бичиж болно.

(1) Алимаа самбарт 676 ширхэг тоо бичиж чадахгүйг харуул.

(2) Алимаа самбарт 675 ширхэг тоо бичиж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

**Бодлого D4.** Натурал  $n$  тоог  $m \geq 2$  ширхэг ялгаатай  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$  натурал тоонуудын  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  нийлбэрт

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} = 1$$

байхаар задалж болдог бол  $n + 7 \leq a_1 a_2$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

### Е (9-10) ангилал

**Бодлого Е1.**  $\Gamma, \omega$  тойргууд  $C, D$  цэгүүдэд огтлолцоно. Мөн  $\omega$  тойргийн төв  $P$  цэг  $\Gamma$  тойрог дээр оршино.  $D$  цэгийг дайрсан шулуун  $\Gamma$  тойрогтой  $A$  цэгт,  $\omega$  тойрогтой  $B$  цэгт огтлолцох ба  $D$  цэг  $AB$  хэрчим дотор оршиж байв.  $PB$  шулуун  $\Gamma$  тойрогтой  $P$  цэгээс ялгаатай  $E$  цэгт огтлолцоно.  $AE = AB$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого Е2.**  $p < q < r$  байх анхны тоонууд өгөгдөв. Натурал  $n \geq 1$  тоо бүрийн хувьд  $p + n, q + n, r + n$  нийлбэрүүдийн ядаж хоёр нь харилцан анхны байдаг бол  $p, q$  тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Е3.** Натурал  $n$  тоог  $m \geq 2$  ширхэг ялгаатай  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$  натурал тоонуудын  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  нийлбэрт

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} = 1$$

байхаар задалж болдог бол  $n + 2m + 1 \leq a_1 a_2$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Е4.**  $n, m, k$  бүхэл тоонууд байг.  $\frac{mk + n}{n^2 + 1}$  ба  $\frac{nk + m}{m^2 + 1}$  тоонууд бүхэл бол  $n^2 + 1$  ба  $m^2 + 1$  тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч  $k^2 - 1$  тоог хуваахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Е5.**  $\angle DAB = \angle ABC$  байх  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт өгөгдөв.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AD$  хэрчимтэй  $K$  цэгт,  $CD$  хэрчимтэй  $L$  цэгт огтлолцоно.  $AL$  хэрчим  $CK$  хэрчимтэй  $P$  цэгт огтлолцоно. Хэрэв  $\angle ADB = \angle PDC$  байсан бол  $CP = CL$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого Е6.** Төгсгөлөг ширхэг натурал тооноос тогтох  $X$  олонлогийн бүх боломжит хоосон биш дэд  $A \subseteq X$  олонлогийн хувьд  $\Sigma A = \sum_{a \in A} a$  нийлбэр ялгаатай утга авдаг, өөрөөр хэлбэл  $A \neq B \subseteq X$  бол  $\Sigma A \neq \Sigma B$  байдаг, гэе.  $X$  олонлогийн гишүүдийн урвуунуудын нийлбэр

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{x} < \frac{5}{2}$$

гэж харуул. Жишээлбэл,  $X = \{1, 2, 5\}$  үед  $1, 2, 5, 1 + 2, 1 + 5, 2 + 5, 1 + 2 + 5$  нийлбэрүүд бүгд ялгаатай ба  $1/1 + 1/2 + 1/5 = 1.7 < 2.5$  үнэн.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

### Ү (11-12) ангилал

**Бодлого Ү1.**  $0 \leq a \leq 1$  бол дурын бүхэл  $m, n$  тоонуудын хувьд  $m^2 + 2am + an^2 \geq m + an$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Ү2.**  $p \geq 5$  анхны тоо ба  $f(x) = (x - 1)(x^3 - 1) \dots (x^{p-4} - 1)(x^{p-2} - 1)$  гэе.  $(p - 1)$ -тэй харилцан анхны натурал  $k$  тоо ба бүхэл  $n$  тоо бүрийн хувьд  $f(n^k) - f(n)$  ялгавар  $p$ -д хуваагдахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F3.** Дурын натурал тоог хэдэн натурал тооны нийлбэрт нэмэгдэхүүнүүдийн урвуугийн нийлбэр 4-өөс хэтрэхгүй бүхэл тоо байхаар бичиж чадахыг харуул. Жишээлбэл  $5 = 2 + 2 + 1$  ба  $1/2 + 1/2 + 1/1 = 2 \leq 4$  бүхэл.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F4.** Тэгээс ялгаатай  $a, b, c$  бодит тоонуудын хувьд

$$(ab - c)(bc - a) + (bc - a)(ca - b) + (ca - b)(ab - c) = 4abc$$

адилтгал биелдэг бол эдгээр гурван тооны нийлбэр эсвэл эдгээр гурван тооны урвуунуудын нийлбэр 1 болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого F5.**  $ABC$  гурвалжны  $BC$  тал дотор  $D, E$  цэгүүдийг  $D$  цэг  $B$  болон  $E$  цэгийн хооронд байхаар авав.  $AD$  хэрчим дээр  $\frac{AF}{FD} = \frac{BE}{EC}$  байх  $F$  цэг авав.  $ABD$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AE$  хэрчимтэй  $A$  цэгээс ялгаатай  $G$  цэгт огтлолцоно.  $EF$  ба  $GC$  шулуунууд параллел бол  $GE = EC$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого F6.** Нэг эгнээ болон жагссан  $n \geq 3$  сурагч байв. Сурагчид санамсаргүйгээр зүүн эсвэл баруун гараа өргөнө. Дараалсан гурван сурагч бүрийн ядаж нэг нь баруун гараа өргөсөн байх магадлалыг  $P_n$  гэвэл

$$P_n < \left(\frac{12}{13}\right)^{n-2}$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

## S (ББ) ангилал

**Бодлого S1.** Усан санд 4 хоолой байрлуулжээ. Эхний 2 хоолойгоор усан сан руу ус дүүргэдэг, үлдсэн 2 хоолойгоор усан сангаас ус асгадаг. Хэрэв 4 хоолой зэрэг ажиллах үед усан сан 2.5 цагт дүүрдэг, зөвхөн 1, 2, 3-р хоолой ажиллах үед 1.5 цагт дүүрдэг, зөвхөн 1, 3, 4-р хоолой ажиллах үед 15 цагт дүүрдэг бол зөвхөн 1, 3-р хоолой ажиллах үед хэдэн цагт дүүрэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S2.** Аль ч хоёрыг нь авахад нэг нь нөгөөдөө хуваагддаггүй, аль ч хоёрынх нь үржвэр үлдсэн бүх тоондоо хуваагддаг 10 натурал тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодлого S3.** Батаа самбарт 20-оос хэтэрдэггүй хэдэн ялгаатай натурал тоог, самбарт бичигдсэн аль ч тоо самбарт бичигдсэн бусад тоонуудын нэгээс олонгүйд хуваагддаг байхаар бичихийг хүсжээ.

(1) Батаа самбарт 14 ширхэг тоо бичиж чадахыг харуул

(2) Батаа самбарт 15 ширхэг тоо бичиж чадахгүйг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого S4.**  $a, b, c$  бодит тоонууд гэе.

(1)  $a^2 + b^2 = c^2$  ба  $a^3 + b^3 = c^3$  нөхцөл биелдэг бол  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$  болохыг харуул.

(2)  $a^3 + b^3 = c^3$  ба  $a^4 + b^4 = c^4$  нөхцөл биелдэг бол  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$  болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого S5.** Цифрүүдийнхээ куб зэргүүдийн нийлбэртэй тэнцдэг 37-д хуваагдах бүх гурван оронтой тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого S6.** Яг 2000 ширхэг зохиомол тоо агуулсан дэс дараалсан 2023 ширхэг натурал тоо оршин байна гэж батал.

## Т (ДБ) ангилал

**Бодлого Т1.** 1, 2, ..., 6 буух магадлал нь ижилхэн  $1/6$  байх албагүй далий хэлбэртэй шоог 2 удаа хаяхад тэгш сондгойгоороо ижил нүд буух магадлал тэгш сондгойгоороо ялгаатай нүд буух магадлалаас багагүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т2.**  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийн  $C$  оройг агуулаагүй  $AB$  нум дээр  $P$  цэг авав.  $ABC$  гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг  $I$  гээд  $AI$  шулуун  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрогтой  $A$  цэгээс өөр  $M$  цэгт огтлолцдог гэе.  $API$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AB$  хэрчимтэй  $A$  цэгээс өөр  $E$  цэгт огтлолцдог ба  $PM, BC$  хэрчмүүд  $D$  цэгт огтлолцдог бол  $BE = BD$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого Т3.**  $p = 12k + 5$  анхны тоо гэе.  $n \geq 1$  хувьд

$$f_n = (n-1)(n^2-1) \cdots (n^{6k+1}-1)(n^{6k+2}-1)$$

гэж тэмдэглэвэл  $f_2^2 + f_8^2 \equiv 0 \pmod{p}$  болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Т4.** Координатын хавтгайд  $A(-1, 0), B(1, 0)$  цэгүүд авъя.  $C$  цэг  $2xy = 1$  тэгшитгэлтэй гиперболоор гүйх үед  $\angle ACB$  өнцөг хамгийн ихдээ ямар утга авах вэ? (өнцгийг  $[0^\circ, 180^\circ]$  завсарт байхаар бага өнцгөөр хэмжинэ)

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т5.**  $m \geq 1$  ба  $n = 2m - 1$  гэе. Аль ч хоёр сурагч хоорондоо яг нэг удаа таарах, өөрөөр хэлбэл тойргоор тоглох, тэнцэх боломжгүй тэмцээнд  $n$  сурагч оролцов. Хожлын тоогоор байр эзлүүлэхэд (ижил хожилтой сурагчдыг нэрсийн цагаан толгойн дарааллаар жагсаана) тэг дунд буюу  $m$ -р байранд орох сурагч хамгийн ихдээ хэд хожсон байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Н. Ууганбаатар)

**Бодлого Т6.**  $P_1(X) = 1, P_2(X) = 2X$  гээд  $n \geq 3$  хувьд  $P_n(X)$  олон гишүүнтийг

$$P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - (X^2 + 1)P_{n-2}(X)$$

гэж тодорхойлъя. Дурын натурал  $n$  тоо ба бодит  $x$  тооны хувьд  $|P_n(x)| \leq (1 + x^2)^{\frac{n}{2}}$  тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

## Бодолтууд

### D (7-8) ангилал

**Бодлого D1.**  $n$  натурал тоо бол  $3^n + 5^n$  нийлбэр бүтэн квадрат биш гэж батал.

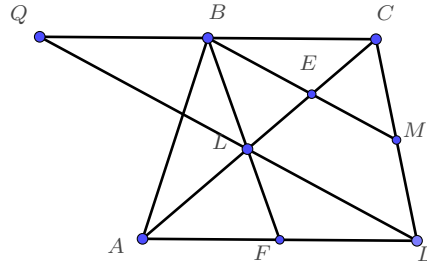
(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Эсрэгээс нь ямар нэг  $n$  тооны хувьд  $3^n + 5^n$  бүтэн квадрат байдаг гэе. Бүтэн квадрат тоог 3-т хуваахад 0, 1 үлдэгдэл өгдөг тул  $n$  тэгш байна. Энэ үед  $3^n + 5^n$  тоог 4-т хуваахад 2 үлдэгдэл өгөх ба бүтэн квадрат тоог 4-т хуваахад 0, 1 үлдэгдэл өгдөг гэдэгтэй зөрчнө.

**Бодлого D2.**  $ABCD$  трапецын  $CD$  хажуу талын дундаж цэгийг  $M$  гэе.  $BM$  хэрчим  $AC$  диагональтай  $E$  цэгт огтлолцоно.  $AE$  хэрчим дээр  $EC = EL$  байх  $L \neq C$  цэг авав.  $BL$  шулуун  $AD$  суурьтай  $K$  цэгт огтлолцоно.  $AK = KD$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

*Бодолт.*



$BC$  шулуун дээр  $BQ < CQ$ ,  $BQ = BC$  байх  $Q$  цэг авъя.  $QB = BC$ ,  $EC = EL$  тул Фалесийн теоремоор  $BE \parallel QL$ .  $CM = MD$ ,  $EC = EL$  тул Фалесийн теоремоор  $EM \parallel LD$ . Иймд  $Q, L, D$  цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.  $\triangle QLC \sim \triangle DLA$  учраас  $\frac{CL}{LA} = \frac{CQ}{AD}$ .  $\triangle ALK \sim \triangle CLB$  учраас  $\frac{CL}{LA} = \frac{BC}{AK}$ . Эндээс  $\frac{BC}{AK} = \frac{CQ}{AD}$  болох ба  $\frac{AK}{AD} = \frac{BC}{CQ} = \frac{1}{2}$  гарч батлагдав.

**Бодлого D3.** Алимаа самбарт 2023-аас хэтрэхгүй хэдэн ялгаатай натурал тоог, самбарт бичигдсэн ямар ч хоёр тооны нийлбэр ялгавартаа хуваагдахгүй байхаар бичихийг хүсжээ. Жишээлбэл  $4 \nmid 10$ ,  $13 \nmid 27$ ,  $17 \nmid 23$  тул Алимаа 3, 7, 20 тоонуудыг бичиж болно.

(1) Алимаа самбарт 676 ширхэг тоо бичиж чадахгүйг харуул.

(2) Алимаа самбарт 675 ширхэг тоо бичиж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ч. Гантөмөр)

*Бодолт.*

(1) Самбарт  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  тоонууд бичигдсэн гэе. Энд  $1 \leq a_1$  ба  $a_n \leq 2023$ .

$a_{k+1} - a_k = 1$  гэвэл  $1 \mid (a_{k+1} + a_k)$  болох тул боломжгүй.

$a_{k+1} - a_k = 2$  гэвэл  $2 \mid 2(a_k + 1) = a_{k+1} + a_k$  болох тул боломжгүй.

Иймд  $a_{k+1} - a_k \geq 3$  байна. Эндээс

$$3(n-1) \leq (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) \leq 2022$$

болох тул  $n \leq 675$  байна.

- (2) Самбарт 1, 4, 7, ..., 2020, 2023 гэсэн 3-т хуваахад 1 үлддэг тоонуудыг бичихэд бодлогын нөхцөл хангагдана. Үнэхээр, ийм тоо нийт 675 ширхэг байгаа бөгөөд аль ч хоёр тооны нийлбэр 3 хуваагдахгүй, харин ялгавар 3-т хуваагдана.

**Бодлого D4.** Натурал  $n$  тоог  $m \geq 2$  ширхэг ялгаатай  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$  натурал тоонуудын  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  нийлбэрт

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} = 1$$

байхаар задалж болдог бол  $n + 7 \leq a_1 a_2$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.**  $m \geq 2$  гэдгээс  $\frac{1}{a_m} < 1$  тул  $a_m \geq 2$  байна.

$m = 2$  гэе.  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$  тул  $m = 2$  байх боломжгүй.

$m = 3$  гэе.  $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} < \frac{3}{a_3}$  тул  $a_3 = 2$  ба  $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{2}{a_2}$  тул  $a_2 = 3$  байна. Эндээс  $a_1 = 6$  байх ба  $n + 7 = 18 = a_1 a_2$  болж тэнцэгтэл биелнэ.

$m \geq 4$  гэе.  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$  гэдгээс дурын  $3 \leq k \leq m$  хувьд  $\frac{a_1 a_2}{a_k} \geq a_k$  байна.

$k = 3, 4$  үед илүү нарийн үнэлгээ хийвэл  $a_1 a_2 \geq (a_3 + 2)(a_3 + 1) \geq (a_4 + 3)(a_4 + 2)$  гэдгээс

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} > a_3 + 3 \quad \text{ба} \quad \frac{a_1 a_2}{a_4} > a_4 + 5$$

болно. Эндээс

$$a_1 a_2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} \right) > a_2 + a_1 + (a_3 + 3) + (a_4 + 5) + a_5 + \dots + a_m$$

болох тул  $a_1 a_2 > n + 8$  байна. Тухайлбал тэнцэл биелэхгүй.

$n = 11, m = 3$  ба  $(a_1, a_2, a_3) = (6, 3, 2)$  үед тэнцэгтэл биелнэ.

**Нэмэлт.** Нөхцөл хангах задаргаа төгсгөлгүй олон олдоно:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m} = 1$$

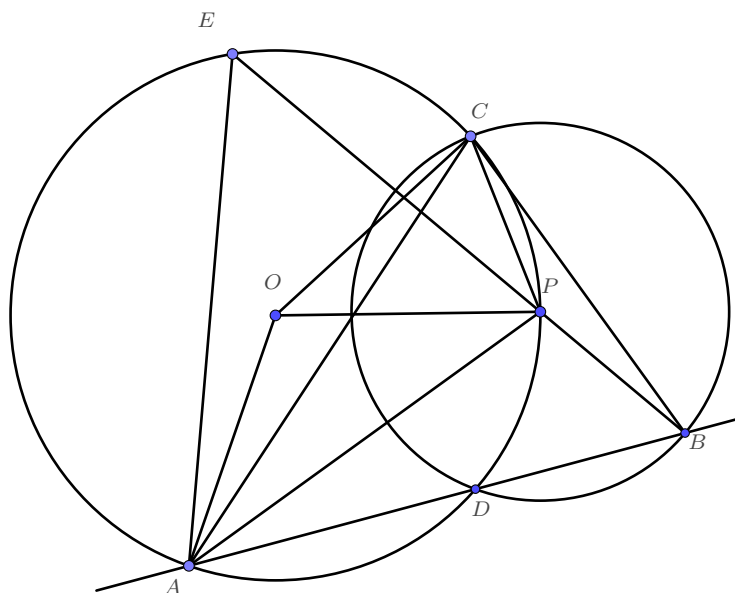
ба  $m$  тоог дараалсан тооны үржвэр биш байхаар авахад бүх нэмэгдэхүүн ялгаатай байна.

## Е (9-10) ангилал

**Бодлого Е1.**  $\Gamma, \omega$  тойргууд  $C, D$  цэгүүдэд огтлолцоно. Мөн  $\omega$  тойргийн төв  $P$  цэг  $\Gamma$  тойрог дээр оршино.  $D$  цэгийг дайрсан шулуун  $\Gamma$  тойрогтой  $A$  цэгт,  $\omega$  тойрогтой  $B$  цэгт огтлолцох ба  $D$  цэг  $AB$  хэрчим дотор оршиж байв.  $PB$  шулуун  $\Gamma$  тойрогтой  $P$  цэгээс ялгаатай  $E$  цэгт огтлолцоно.  $AE = AB$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.



$AECD$  тойрогт багтах тул  $\angle BDC = \angle AEC$ . Иймээс  $\angle BPC = \angle AOC$  болох ба  $\triangle BPC \sim \triangle AOC$  гарна.

$\angle OCA = \angle PCB$  учир  $\angle OCP = \angle ACB$ . Мөн  $\frac{OC}{AC} = \frac{CP}{CB}$  учраас  $\triangle OCP \sim \triangle ACB$  болно.  $OC = OP$  гэдгийг тооцвол  $AC = AB$  гарна. Иймд  $\triangle ABP = \triangle ACP$  болох ба  $\angle ABP = \angle ACP = \angle AEP$  болж  $AE = AB$  батлагдав.

**Бодлого Е2.**  $p < q < r$  байх анхны тоонууд өгөгдөв. Натурал  $n \geq 1$  тоо бүрийн хувьд  $p + n$ ,  $q + n$ ,  $r + n$  нийлбэрүүдийн ядаж хоёр нь харилцан анхны байдаг бол  $p, q$  тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:**  $p = 2, q = 3$ .

$p = 2, q = 3$  үед дурын  $n \geq 1$  хувьд  $p + n, q + n$  нийлбэрүүд дараалсан тоонууд тул харилцан анхны байна. Иймд нөхцөл биелнэ.

Одоо бусад тохиолдолд нөхцөл биелэхгүй гэж харуулъя.

$p \geq 3$  үед  $n = 1$  хувьд  $p + 1, q + 1, r + 1$  тоонууд бүгд тэгш тул аль ч хоёр нь харилцан анхны биш.

$p = 2, q \geq 5$  үед  $n = (q - 2)(r - 2) - 2$  гэж авахад  $n \geq 1, q - 2 \geq 3, r - 2 \geq 5$  ба

$$2 \mid (q + n, r + n), \quad (q - 2) \mid (p + n, q + n), \quad (r - 2) \mid (p + n, r + n)$$

тул  $p + n, q + n, r + n$  тоонуудын аль ч хоёр нь харилцан анхны биш.

**Бодлого Е3.** Натурал  $n$  тоог  $m \geq 2$  ширхэг ялгаатай  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$  натурал тоонуудын  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  нийлбэрт

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} = 1$$

байхаар задалж болдог бол  $n + 2m + 1 \leq a_1 a_2$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай, Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.**  $m \geq 2$  гэдгээс  $\frac{1}{a_m} < 1$  тул  $a_m \geq 2$  байна.

$m = 2$  гэе.  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$  тул  $m = 2$  байх боломжгүй.

$m = 3$  гэе.  $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} < \frac{3}{a_3}$  тул  $a_3 = 2$  ба  $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < \frac{2}{a_2}$  тул  $a_2 = 3$  байна. Эндээс  $a_1 = 6$  байх ба  $n + 2m + 1 = 18 = a_1 a_2$  болж тэнцэтгэл биелнэ.

$m = 4$  гэе.  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$  гэдгээс  $a_1 a_2 \geq (a_3 + 2)(a_3 + 1) \geq (a_4 + 3)(a_4 + 2)$  тул

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} \geq a_3 + 3 + \frac{2}{a_3} \quad \text{ба} \quad \frac{a_1 a_2}{a_4} \geq a_4 + 5 + \frac{6}{a_4}$$

байна. Эндээс

$$a_1 a_2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \right) \geq a_2 + a_1 + a_3 + a_4 + 8 + \frac{2}{a_3} + \frac{6}{a_4}$$

болох ба  $\frac{2}{a_3} + \frac{6}{a_4} > \frac{2}{a_3} + \frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{2}{a_4} = 2$  тул  $a_1 a_2 > n + 2m + 2$  байна. Тухайлбал тэнцэл биелэхгүй.

$m \geq 5$  гэе. Дээрхтэй ижлээр  $3 \leq k \leq m$  хувьд

$$\frac{a_1 a_2}{a_k} > a_k + (2k - 3)$$

байна. Индукцээр  $3 + 5 + \dots + (2m - 3) = (m - 2)m$  болох тул

$$a_1 a_2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m} \right) > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_m + (m - 2)m$$

байна.  $m \geq 5$  гэдгээс  $m(m - 4) \geq 5$  тул  $a_1 a_2 > n + 2m + 5$  байна. Тухайлбал тэнцэл биелэхгүй.

$n = 11, m = 3$  ба  $(a_1, a_2, a_3) = (6, 3, 2)$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Нэмэлт.** Нөхцөл хангах задаргаа төгсгөлгүй олон олдоно:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(m - 1)m} + \frac{1}{m} = 1$$

ба  $m$  тоог дараалсан тооны үржвэр биш байхаар авахад бүх нэмэгдэхүүн ялгаатай байна.

**Бодлого Е4.**  $n, m, k$  бүхэл тоонууд байг.  $\frac{mk + n}{n^2 + 1}$  ба  $\frac{nk + m}{m^2 + 1}$  тоонууд бүхэл бол  $n^2 + 1$  ба  $m^2 + 1$  тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч  $k^2 - 1$  тоог хуваахыг харуул.

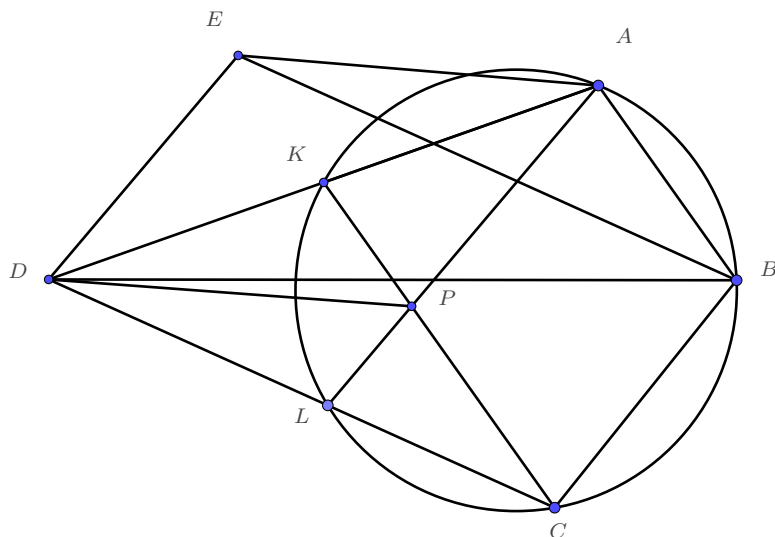
(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодолт.**  $d = (m^2 + 1, n^2 + 1)$  гэе. Тэгвэл  $\frac{mk + n}{d}, \frac{nk + m}{d}$  бүхэл тул  $\frac{m(k^2 - 1)}{d} = \frac{mk + n}{d}k - \frac{nk + m}{d}$  бүхэл.  $d \mid (m^2 + 1)$  гэдгээс  $(d, m) = 1$  тул  $d \mid (k^2 - 1)$  байна.

**Бодлого Е5.**  $\angle DAB = \angle ABC$  байх  $ABCD$  дөрвөн өнцөгт өгөгдөв.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AD$  хэрчимтэй  $K$  цэгт,  $CD$  хэрчимтэй  $L$  цэгт огтлолцоно.  $AL$  хэрчим  $CK$  хэрчимтэй  $P$  цэгт огтлолцоно. Хэрэв  $\angle ADB = \angle PDC$  байсан бол  $CP = CL$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.



$D$  цэгийг дайрсан  $AL$ -тэй параллел шулуун,  $B$  цэгийг дайрсан  $CD$ -тэй параллел шулуунтай  $E$  цэгт огтлолцдог гэе.  $\angle ADE = \angle KAL = \angle KCL = \angle ABE$  учраас  $ABDE$  тойрогт багтана. Иймд  $\angle AEB = \angle ADB = \angle PDC$  болох учраас  $\triangle ABE \sim \triangle PCD$  байна.

$APDE$  параллелограм учир  $AE = DP$  болно. Иймд  $\triangle ABE = \triangle PCD$  болно. Иймээс  $AB = PC$  гарна. Иймд  $AB \parallel PC$  гэдгийг тооцвол  $CL = AB = PC$  байна.

**Бодлого Е6.** Төгсгөлөг ширхэг натурал тооноос тогтох  $X$  олонлогийн бүх боломжит хоосон биш дэд  $A \subseteq X$  олонлогийн хувьд  $\Sigma A = \sum_{a \in A} a$  нийлбэр ялгаатай утга авдаг, өөрөөр хэлбэл  $A \neq B \subseteq X$  бол  $\Sigma A \neq \Sigma B$  байдаг, гэе.  $X$  олонлогийн гишүүдийн урвуунуудын нийлбэр

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{x} < \frac{5}{2}$$

гэж харуул. Жишээлбэл,  $X = \{1, 2, 5\}$  үед  $1, 2, 5, 1+2, 1+5, 2+5, 1+2+5$  нийлбэрүүд бүгд ялгаатай ба  $1/1 + 1/2 + 1/5 = 1.7 < 2.5$  үнэн.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ба  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n$  гэе.

$2 \leq k \leq n$  гэе.  $x_1 + \dots + x_k$  нийлбэрийн хоосон биш дэд нийлбэрүүд бүгд ялгаатай натурал тоо гэдгээс  $x_1 + \dots + x_k \geq 2^k - 1$  байна. Мөн  $k \geq 2$  гэдгээс  $kx_k > x_1 + \dots + x_k$  байх тул  $\frac{1}{x_k} \leq \frac{k}{2^k}$  байна.

Эндээс  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{k}{2^k} = \frac{5}{2} - \frac{n+2}{2^n} < \frac{5}{2}$  болж бодлого бодогдоно.

**Нэмэлт.** (1)  $X = \{3, 5, 6, 7\}$  олонлог нөхцөл хангах тул  $x_k \geq 2^{k-1}$  гэж хэлэх боломжгүй.

(2) Дээрх бодолтоос  $x_1 \geq 2$  үед  $\sum_{x \in X} 1/x < 2$  болно.  $x_1 = 1$  үед илүү нарийн үнэлгээ хийвэл дээд зааг  $< 2.18$  гэж батлах боломжтой. Дээд заагийг 2-оос багасгах боломжгүй.

### F (11-12) ангилал

**Бодлого F1.**  $0 \leq a \leq 1$  бол дурын бүхэл  $m, n$  тоонуудын хувьд  $m^2 + 2am + an^2 \geq m + an$  болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

*Бодолт.*  $m, n$  бүхэл гэдгээс  $m^2 \geq m$  ба  $(m + n)^2 \geq m + n$  байх тул

$$m^2 + 2am + an^2 = (1 - a)m^2 + a(m + n)^2 \geq (1 - a)m + a(m + n) = m + an$$

байна. ( $a = 0$  ба  $m = 0, 1$ ), ( $a = 1$  ба  $m + n = 0, 1$ ), ( $m = 0, 1$  ба  $m + n = 0, 1$ ) үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Бодлого F2.**  $p \geq 5$  анхны тоо ба  $f(x) = (x - 1)(x^3 - 1) \dots (x^{p-4} - 1)(x^{p-2} - 1)$  гэе.  $(p - 1)$ -тэй харилцан анхны натурал  $k$  тоо ба бүхэл  $n$  тоо бүрийн хувьд  $f(n^k) - f(n)$  ялгавар  $p$ -д хуваагдахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.*  $p \mid n$  бол дурын  $k \geq 1$  хувьд  $f(n^k) \equiv f(n) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$  байх тул  $p \mid f(n^k) - f(n)$  байна.

Одоо  $p \nmid n$  ба  $(k, p - 1) = 1$  гэе.  $p - 1$  тэгш тул  $k$  сондгой байна.

Иймд  $S = \{1, 3, \dots, p - 4, p - 2 \pmod{p - 1}\}$  гэвэл дурын  $m \in S$  хувьд  $km \in S$  байна. Мөн  $(k, p - 1) = 1$  гэдгээс  $S \rightarrow S, m \mapsto km$  буулгалт инъектив ба  $S$  төгсгөлөг тул биектив байна. Өөрөөр хэлбэл  $S = \{mk \mid m \in S\}$  байна.

Фермагийн бага теоремоор  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  тул

$$f(n^k) = \prod_{m \in S} (n^{km} - 1) \equiv \prod_{m \in S} (n^m - 1) = f(n) \pmod{p}$$

байна.

**Бодлого F3.** Дурын натурал тоог хэдэн натурал тооны нийлбэрт нэмэгдэхүүнүүдийн урвуугийн нийлбэр 4-өөс хэтрэхгүй бүхэл тоо байхаар бичиж чадахыг харуул. Жишээлбэл  $5 = 2 + 2 + 1$  ба  $1/2 + 1/2 + 1/1 = 2 \leq 4$  бүхэл.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

*Бодолт.* Хоёр бодолт хийе. Бодлогын нөхцөл хангадаг нийлбэрийг *сайн* гэе.

*Индукц ашигласан бодолт:*  $N$  натурал тоо гээд хүчит индукцээр дурын  $n < N$  натурал тоог сайн нийлбэрт тавьж чаддаг гэе. Одоо  $N$  тоог сайн нийлбэрт задалъя.

$N = 1, 2, 3, 5, 7, 9$  үед  $1 = 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, 5 = 2 + 2 + 1, 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1, 9 = 3 + 3 + 3$  гэхэд болно.

$N \geq 4$  тэгш үед  $N = 2 + 2n$  гэж бичээд  $n = \sum_{i=1}^k a_i$  ба  $m = \sum_{i=1}^k 1/a_i \leq 4$  бүхэл байхаар сайн нийлбэрт тавьбал

$$N = \begin{cases} 2 + \sum_{i=1}^k 2a_i, & m = 1, 3 \\ 1 + 1 + \sum_{i=1}^k 2a_i, & m = 2, 4 \end{cases}$$

сайн нийлбэр болно. Энд урвуугуудын нийлбэр  $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4$  гэж өөрчлөгдөнө.

$N \geq 11$  сондгой үед  $N = 9 + 2n$  гэж бичээд  $n = \sum_{i=1}^k a_i$  ба  $m = \sum_{i=1}^k 1/a_i \leq 4$  бүхэл байхаар сайн нийлбэрт тавьбал

$$N = \begin{cases} 3 + 6 + \sum_{i=1}^k 2a_i, & m = 1, 3 \\ 3 + 3 + 3 + \sum_{i=1}^k 2a_i, & m = 2, 4 \end{cases}$$

сайн нийлбэр болно. Энд урвуугуудын нийлбэр  $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3$  гэж өөрчлөгдөнө.

**Лагранжийн теорем ашигласан бодолт:** Лагранжийн дөрвөн квадратын теоремоор ямар нэг  $1 \leq m \leq 4$  хувьд  $N = a_1^2 + \dots + a_m^2$  гэж бичиж чадна. Энэ үед

$$N = \underbrace{a_1 + \dots + a_1}_{a_1} + \dots + \underbrace{a_m + \dots + a_m}_{a_m}$$

сайн нийлбэр болно.

**Бодлого F4.** Тэгээс ялгаатай  $a, b, c$  бодит тоонуудын хувьд

$$(ab - c)(bc - a) + (bc - a)(ca - b) + (ca - b)(ab - c) = 4abc$$

адилтгал биелдэг бол эдгээр гурван тооны нийлбэр эсвэл эдгээр гурван тооны урвуунуудын нийлбэр 1 болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодолт.**  $r = abc \neq 0$  ба  $p = a + b + c, q = 1/a + 1/b + 1/c$  гэе.

$(ab - c)(bc - a) = (r/c - c)(r/a - a) = r^2/(ac) - r(a/c + c/a) + ac = r(b - (a/c + c/a) + 1/b)$  тул өгсөн нөхцөлийг

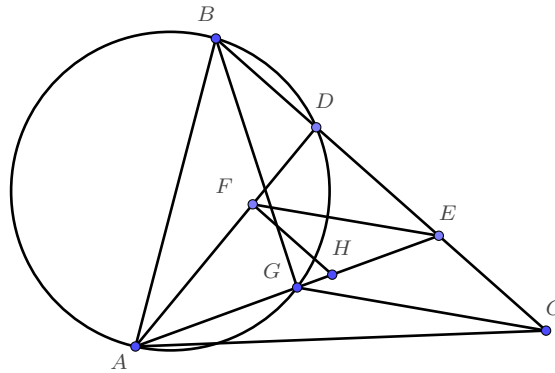
$$r(p - (pq - 3) + q) = 4r$$

гэж бичиж болно. Хялбарчилбал  $r(p - 1)(q - 1) = 0$  болох ба  $r \neq 0$  тул  $p = 1$  эсвэл  $q = 1$  байна.

**Бодлого F5.**  $ABC$  гурвалжны  $BC$  тал дотор  $D, E$  цэгүүдийг  $D$  цэг  $B$  болон  $E$  цэгийн хооронд байхаар авав.  $AD$  хэрчим дээр  $\frac{AF}{FD} = \frac{BE}{EC}$  байх  $F$  цэг авав.  $ABD$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AE$  хэрчимтэй  $A$  цэгээс ялгаатай  $G$  цэгт огтлолцоно.  $EF$  ба  $GC$  шулуунууд параллел бол  $GE = EC$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодолт.**  $FH \parallel BC$  байх  $H$  цэгийг  $AE$  хэрчим дээр авъя.  $\angle BEG = \angle FHA$  биелнэ.  $ABDG$  тойрогт багтах тул  $\angle HAF = \angle GBE$  байна. Эндээс  $\triangle AFH \sim \triangle BGE$  болно.  $\frac{AH}{HE} = \frac{AF}{FD} = \frac{BE}{EC}$  учраас  $\triangle AFE \sim \triangle BGC$  болно. Иймээс  $\angle BCG = \angle FEG = \angle EGC$  болж  $EG = EC$  батлагдана.



**Бодлого F6.** Нэг эгнээ болон жагссан  $n \geq 3$  сурагч байв. Сурагчид санамсаргүйгээр зүүн эсвэл баруун гараа өргөнө. Дараалсан гурван сурагч бүрийн ядаж нэг нь баруун гараа өргөсөн байх магадлалыг  $P_n$  гэвэл

$$P_n < \left(\frac{12}{13}\right)^{n-2}$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.**  $P_0 = P_1 = P_2 = 1$  байна.  $n = 3$  үед  $P_3 = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} < \frac{12}{13}$  ба  $n \geq 4$  үед

$$P_{n-1} - P_n = \frac{1}{2^4} P_{n-4}$$

байна (сүүлийн дөрвөн сурагч баруун, зүүн, зүүн, зүүн гараа өргөх хэрэгтэй). Тухайлбал  $P_4 = \frac{13}{16}$ ,

$P_5 = \frac{3}{4}$ ,  $P_6 = \frac{11}{16}$  байна. Бернулийн тэнцэтгэл бишээс  $\left(\frac{12}{13}\right)^{n-2} > \frac{15-n}{13}$  ба

$$P_4 = \frac{13}{16} < \frac{11}{13}, \quad P_5 = \frac{3}{4} < \frac{10}{13}, \quad P_6 = \frac{11}{16} < \frac{9}{13}$$

болохыг хялбархан шалгаж болох тул  $4 \leq n \leq 6$  үед тэнцэтгэл биш батлагдлаа.

$n \geq 7$  үед  $P_{n-4} - P_n = \frac{1}{16}(P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6} + P_{n-7}) \geq \frac{1}{4}P_{n-4}$  тул  $3P_{n-4} \geq 4P_n$  байна. Эндээс  $P_{n-1} = P_n + \frac{1}{16}P_{n-4} \geq \frac{13}{12}P_n$  буюу  $P_n \leq \frac{12}{13}P_{n-1}$  байна. Индукцээр дурын  $n \geq 7$  хувьд үнэн.

**Нэмэлт.** (1)  $3 \leq n \leq 6$  үед  $P_n = 1 - \frac{n-1}{16}$  ба  $\frac{n-1}{16} - \frac{n-2}{13} = \frac{3(6-n)+1}{208} > 0$  байх тул эхний хэсгийг товчоор

$$P_n = 1 - \frac{n-1}{16} < 1 - \frac{n-2}{13} < \left(\frac{12}{13}\right)^{n-2}$$

гэж бичиж болно.

(2)  $n \geq 3$  үед  $P_n = P_{n-1}/2 + P_{n-2}/4 + P_{n-3}/8$  байх бөгөөд үүнийг ашиглан хялбархан баталж болно.

## S (ББ) ангилал

**Бодлого S1.** Усан санд 4 хоолой байрлуулжээ. Эхний 2 хоолойгоор усан сан руу ус дүүргэдэг, үлдсэн 2 хоолойгоор усан сангаас ус асгадаг. Хэрэв 4 хоолой зэрэг ажиллах үед усан сан 2.5 цагт дүүрдэг, зөвхөн 1, 2, 3-р хоолой ажиллах үед 1.5 цагт дүүрдэг, зөвхөн 1, 3, 4-р хоолой ажиллах үед 15 цагт дүүрдэг бол зөвхөн 1, 3-р хоолой ажиллах үед хэдэн цагт дүүрэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

**Бодолт.** **Хариу: 3 цаг.**

2.5 цаг нь 150 минут, 1.5 цаг нь 90 минут, 15 цаг нь 900 минут болохыг тэмдэглэе.

Усан сангийн хэмжээг 900 хэсэг гэе. Тэгвэл 4 хоолой нийлээд 1 минутанд  $900/150 = 6$  хэсэг ус, 1, 2, 3-р хоолой нийлээд 1 минутанд  $900/90 = 10$  хэсэг ус дүүргэнэ. Иймд 4-р хоолой дангаараа нэг минутанд  $10 - 6 = 4$  хэсэг ус асгана. 4-р хоолой 15 цагт нийт  $900 \cdot 4 = 3600$  хэсэг ус асгах тул 1, 3-р

хоолой нийлээд 15 цагт  $900 + 3600 = 4500$  хэсэг ус дүүргэнэ. Иймд зөвхөн 1, 3-р хоолой ажиллаж байхад цагт  $4500/15 = 300$  хэсэг ус дүүргэх тул усан санг эдгээр хоолойгоор  $900/300 = 3$  цагт дүүргэнэ.

**Бодлого S2.** Аль ч хоёрыг нь авахад нэг нь нөгөөдөө хуваагддаггүй, аль ч хоёрынх нь үржвэр үлдсэн бүх тоондоо хуваагддаг 10 натурал тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. **Хариу: Олдоно.**

$p_1, \dots, p_{10}$  ялгаатай анхны тоонууд ба  $P = p_1 p_2 \cdots p_{10}$  гэе. Тэгвэл  $a_i = P \cdot p_i$ ,  $i = \overline{1, 10}$  тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангах илэрхий юм.

**Бодлого S3.** Батаа самбарт 20-оос хэтэрдэггүй хэдэн ялгаатай натурал тоог, самбарт бичигдсэн аль ч тоо самбарт бичигдсэн бусад тоонуудын нэгээс олонгүйд хуваагддаг байхаар бичихийг хүсжээ.

- (1) Батаа самбарт 14 ширхэг тоо бичиж чадахыг харуул
- (2) Батаа самбарт 15 ширхэг тоо бичиж чадахгүйг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

- (1) 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 тоонууд нөхцөл хангана.
- (2) 1, 3, ..., 17, 19 гэсэн сондгой тоон дугаартай хайрцгууд авъя. Самбарт бичигдсэн тоо бүрийг тэр тоог хуваадаг хамгийн том сондгой тоон дугаартай хайрцагт хийе. Нэг хайрцагт орсон хоёр тооны их нь багадаа хуваагдах тул нэг хайрцагт хоёроос олон тоо орохгүй. Цаашилбал самбарт бичигдсэн тоонууд 20-оос хэтрэхгүй тул 11, 13, 15, 17, 19 дугаартай хайрцгуудад нэгээс олон тоо орох боломжгүй. Иймд нийт  $5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 15$ -аас олонгүй тоо бичигдсэн. 15 тоо бичигдсэн гэвэл 1, 3, 5, 7, 9 дугаартай хайрцгуудад хоёр, хоёр тоо байж таарна. Тухайлбал самбарт 9, 18 бичигдсэн байна. Эндээс 3, 6 бичигдээгүй байх ёстой болох тул 3 дугаартай хайрцагт ганц 12 байх болж зөрчил гарна.

**Бодлого S4.**  $a, b, c$  бодит тоонууд гэе.

- (1)  $a^2 + b^2 = c^2$  ба  $a^3 + b^3 = c^3$  нөхцөл биелдэг бол  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$  болохыг харуул.
- (2)  $a^3 + b^3 = c^3$  ба  $a^4 + b^4 = c^4$  нөхцөл биелдэг бол  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$  болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.

- (1)  $0 = c^6 - c^6 = (a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 = a^2 b^2 (3a^2 - 2ab + 3b^2) \geq 2(a^2 b^4 + a^4 b^2) \geq 0$  гэдгээс  $ab^2 = a^2 b = 0$  байна. Иймд  $a = 0$  эсвэл  $b = 0$ .
- (2)  $c = 0$  үед  $a = b = 0$  тул  $c \neq 0$  гэе.  $(a, b, c) \mapsto (a/c, b/c, 1)$  гэж солих замаар  $c = 1$  гэж үзэж болно.  $a^4 + b^4 = 1$  гэдгээс  $|a| \leq 1$  ба  $|b| \leq 1$  байна.  $a < 0$  бол  $b^3 = 1 - a^3 > 1$  болж зөрчил гарах тул  $a \geq 0$  байна. Мөн ижлээр  $b \geq 0$  байна. Одоо  $0 = a^3(1 - a) + b^3(1 - b) \geq 0$  гэдгээс  $a = 0$  эсвэл  $a = 1$  болно.  $a = 1$  үед  $b = 0$  байна.

**Бодлого S5.** Цифрүүдийнхээ куб зэргүүдийн нийлбэртэй тэнцдэг 37-д хуваагдах бүх гурван оронтой тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 370, 407.**

Бүтэн кубыг 37-д хуваахад гарах үлдэгдлийг тооцвол

|       |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $x$   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $x^3$ | 0 | 1 | 8 | 27 | 27 | 14 | 31 | 10 | 31 | 26 |

(mod 37)

байна. Эндээс  $\overline{abc}$  тоо нөхцөл хангадаг бол  $a, b, c$  дотор нэг ширхэг 0, нэг ширхэг 3 эсвэл 4, нэг ширхэг 7 байх хэрэгтэй. Энд  $0^3 + 3^3 + 7^3 = 370$  ба  $0^3 + 4^3 + 7^3 = 407$  тул 370, 407 тоонууд шийд болно, өөр шийд байхгүй.

**Нэмэлт.** 37-д хуваагддаг 3 оронтой тоо 25 ширхэг байгаа бөгөөд бүгдийг шалгах замаар бодох боломжтой.

**Бодлого S6.** Яг 2000 ширхэг зохиомол тоо агуулсан дэс дараалсан 2023 ширхэг натурал тоо оршин байна гэж батал.

Бодолт.  $n, n + 1, \dots, n + 2022$  дотор байгаа зохиомол тооны тоог  $f(n)$  гэе.

1, 2, ..., 2023 дотор ядаж 24 ширхэг анхны тоо байх тул  $f(1) < 2000$  байна.

$N = 2024!$  гэвэл  $N + 2, N + 3, \dots, N + 2022$  тоонууд бүгд зохиомол тул  $f(N) \geq 2021 > 2000$  байна.

Цаашилбал  $f(n), f(n + 1)$  тоонууд ихдээ нэгээр ялгаатай тул  $f(1), f(2), \dots, f(N)$  дотор  $f(n) = 2000$  байх гишүүн олдоно.

## T (ДБ) ангилал

**Бодлого T1.** 1, 2, ..., 6 буух магадлал нь ижилхэн  $1/6$  байх албагүй далий хэлбэртэй шоог 2 удаа хаяхад тэгш сондгойгоороо ижил нүд буух магадлал тэгш сондгойгоороо ялгаатай нүд буух магадлалаас багагүй гэж батал.

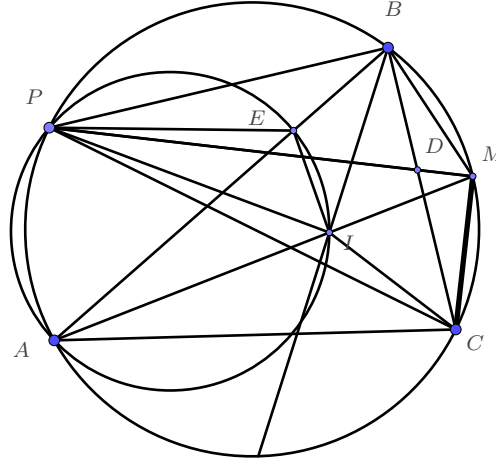
(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.  $1 \leq k \leq 6$  буух магадлалыг  $0 \leq p_k \leq 1$  гэвэл тэгш сондгойгоороо ижил нүд буух магадлал  $P = (p_1 + p_3 + p_5)^2 + (p_2 + p_4 + p_6)^2$ , тэгш сондгойгоороо ялгаатай нүд буух магадлал  $Q = 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6)$  байна. Иймд  $P \geq Q$  байх ба  $p_1 + p_3 + p_5 = p_2 + p_4 + p_6 = 1/2$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Бодлого T2.**  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийн  $C$  оройг агуулаагүй  $AB$  нум дээр  $P$  цэг авав.  $ABC$  гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг  $I$  гээд  $AI$  шулуун  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрогтой  $A$  цэгээс өөр  $M$  цэгт огтлолцдог гэе.  $API$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AB$  хэрчимтэй  $A$  цэгээс өөр  $E$  цэгт огтлолцдог ба  $PM, BC$  хэрчмүүд  $D$  цэгт огтлолцдог бол  $BE = BD$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.



$\angle IPE = \angle IAE = \angle MPB$ ,  $\angle PIE = \angle PAE = \angle PMB$  учраас  $\triangle PEI \sim \triangle PBM$  байна.  $\angle PDB = \angle MBC + \angle BMP = \angle PAM = \angle PCM$  болно. Эндээс  $\triangle PBD \sim \triangle PMC$  гэж мөрдөнө. Мөн  $\angle ABC = \angle AMC$  учир  $\triangle PBE \sim \triangle PMI$  болох ба төсөөгийн харьцаа бичвэл  $1 = \frac{IM}{MC} = \frac{BE}{BD}$  болж батлагдав.

**Бодлого ТЗ.**  $p = 12k + 5$  анхны тоо гэе.  $n \geq 1$  хувьд

$$f_n = (n-1)(n^2-1) \cdots (n^{6k+1}-1)(n^{6k+2}-1)$$

гэж тэмдэглэвэл  $f_2^2 + f_8^2 \equiv 0 \pmod{p}$  болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.  $e = \frac{p-1}{2}$  гэе.  $f_n = \prod_{i=1}^e (n^i - 1)$  байна.

$(2, p) = 1$  тул Фермагийн бага теоремоор  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  байна.  $2^d \equiv 1 \pmod{p}$  байх хамгийн бага натурал тоог  $d$  гэж тэмдэглэе.  $2^{(p-1, d)} \equiv 1 \pmod{p}$  гэдгээс  $d$ -ийн сонголтоос  $(p-1, d) = d$  буюу  $d \mid (p-1)$  гэж мөрдөнө.

$d \neq p-1$  бол  $d \leq e$  ба  $2^d \equiv 8^d \equiv 1 \pmod{p}$  байх тул  $f_2 \equiv f_8 \equiv 0 \pmod{p}$  байна. Тухайлбал  $f_2^2 + f_8^2 \equiv 0 \pmod{p}$  байна.

$d = p-1$  бол  $2e = d$  гэдгээс  $2^e \equiv -1 \pmod{p}$  гэж мөрдөнө. Мөн

$$f_2^2 = \prod_{i=1}^e (2^i - 1)^2 \equiv \prod_{i=1}^e (2^i - 1) 2^i (1 - 2^{p-1-i}) \equiv 2^{\frac{e(e+1)}{2}} (-1)^e (2^e - 1) \prod_{i=1}^{p-2} (2^i - 1) \pmod{p}$$

байна. Үүнтэй адилаар  $f_8^2 \equiv 8^{\frac{e(e+1)}{2}} (-1)^e (8^e - 1) \prod_{i=1}^{p-2} (8^i - 1) \pmod{p}$  байна.

Эхлээд  $2^e \equiv -1 \pmod{p}$  тул  $8^e \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{p}$  байна. Цаашилбал,  $(3, p-1) = 1$  гэдгээс  $\{2^i \pmod{p} \mid 1 \leq i \leq p-2\} = \{8^i \pmod{p} \mid 1 \leq i \leq p-2\}$  байна. Эцэст нь  $e+1$  сондгой гэдгээс  $2^{\frac{e(e+1)}{2}} + 8^{\frac{e(e+1)}{2}} \equiv 2^{\frac{e(e+1)}{2}} (1 + (-1)^{e+1}) \equiv 0 \pmod{p}$  байна. Эмхэтгэвэл  $f_2^2 + f_8^2 \equiv 0 \pmod{p}$  болно.

**Бодлого Т4.** Координатын хавтгайд  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$  цэгүүд авъя.  $C$  цэг  $2xy = 1$  тэгшитгэлтэй гиперболоор гүйх үед  $\angle ACB$  өнцөг хамгийн ихдээ ямар утга авах вэ? (өнцгийг  $[0^\circ, 180^\circ]$  завсарт байхаар бага өнцгөөр хэмжинэ)

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:**  $90^\circ$ .

**Геометр бодолт:**  $2xy = 1$  гиперболыг  $H$  гээд  $x^2 + y^2 = 1$  тойргийг  $T$  гээ.

Дурын  $(x, y) \in H$  цэгийн хувьд  $x^2 + y^2 \geq 2xy = 1$  тул  $H$  гипербол  $T$  тойргийн гадна талд байх ба  $x = y$  үед шүргэлцэнэ.  $AB$  хэрчим  $T$  тойргийн диаметр тул  $\angle ACB \leq 90^\circ$  байх ба  $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  цэг дээр тэнцэтгэл биелнэ.

**Косинус ашигласан бодолт:**  $C(x, y)$  гэвэл

$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{AC \cdot BC} \geq 0$$

гэдгээс  $\angle ACB \leq 90^\circ$  байх ба  $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  цэг дээр тэнцэтгэл биелнэ.

**Синус ашигласан бодолт:**  $ABC$  гурвалжны талбай  $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB$  байна. Эндээс

$$\frac{1}{\sin^2 \angle ACB} = x^2 \left( (x+1)^2 + \frac{1}{4x^2} \right) \left( (x-1)^2 + \frac{1}{4x^2} \right) = 1 + \frac{1}{x^2} \left( x^2 - \frac{1}{2} \right)^4 \geq 1$$

болно. Иймд  $\angle ACB \leq 90^\circ$  байх ба  $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Бодлого Т5.**  $m \geq 1$  ба  $n = 2m - 1$  гээ. Аль ч хоёр сурагч хоорондоо яг нэг удаа таарах, өөрөөр хэлбэл тойргоор тоглох, тэнцэх боломжгүй тэмцээнд  $n$  сурагч оролцов. Хожлын тоогоор байр эзлүүлэхэд (ижил хожилтой сурагчдыг нэрсийн цагаан толгойн дарааллаар жагсаана) тэг дунд буюу  $m$ -р байранд орох сурагч хамгийн ихдээ хэд хожсон байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Н. Ууганбаатар)

Бодолт. **Хариу:**  $\left\lfloor \frac{3(m-1)}{2} \right\rfloor$ .

Сурагчдыг  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , тэдний хожлыг  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$  гээд  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  сурагчдыг 1-р баг,  $\{A_{m+1}, \dots, A_n\}$  сурагчдыг 2-р баг гээ. Сурагчдын нийт хожлын тоо нийт тоглолтын тоотой тэнцүү ба 2-р багийн нийт хожлын тоо тэдний өөр хоорондоо тоглосон тооноос багагүй гэдгээс

$$\sum_{i=1}^n s_i = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{ба} \quad \sum_{i=m+1}^n s_i \geq \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$$

байна. Эндээс

$$ms_m \leq \sum_{i=1}^m s_i \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = \frac{3m(m-1)}{2}$$

болох ба  $s_m$  бүхэл гэдгээс  $s_m \leq \left\lfloor \frac{3(m-1)}{2} \right\rfloor$  байна.

Тэнцэлдээ хүрнэ гэж харуулъя. 1-р багийн гишүүн бүр 2-р багийн гишүүн бүрийг хожсон, 2-р баг өөр хоорондоо дурын байдлаар тоглосон байг. Одоо 1-р багийн гишүүдийг өөр хоорондоо яаж хожилцохыг зааж өгье.

$m = 2k + 1$  гэе.  $1, 2, \dots, m$  тоонуудыг зөв  $m$ -өнцөгтийн орой дээр цагийн зүүний дагуу байрласан гэж үзээд  $i \neq j$  тоонуудын хувьд цагийн зүүний дагуу явахад  $i$ -с  $j$  хүрэх зай  $j$ -с  $i$  хүрэх зайнаас бага байвал  $A_i$  сурагч  $A_j$  сурагчийг хожсон гэе (энд  $m$  сондгой тул тэнцэх боломжгүй). Ингэвэл 1-р багийнхан бүгд өөр хоорондоо  $k$  хожсон байхаар тоглох ба 2-р багт  $2k$  гишүүн байгаа тул  $s_1 = s_2 = \dots = s_m = 3k$  байна.

$m = 2k + 2$  гэе.  $\{A_1, A_2, \dots, A_{2k+1}\}$  сурагчид дээрхтэй ижлээр бүгд өөр хоорондоо  $k$  хожсон байхаар тоглоно.  $A_m$  сурагч  $A_1, \dots, A_{k+1}$  сурагчдад хожигдож,  $A_{k+2}, \dots, A_{2k+1}$  сурагчдыг хожсон гэе. 2-р багт  $2k + 1$  гишүүн байгаа тул  $s_1 = s_2 = \dots = s_{k+1} = 3k + 2$  ба  $s_{k+2} = \dots = s_m = 3k + 1$  байна.

**Бодлого Т6.**  $P_1(X) = 1, P_2(X) = 2X$  гээд  $n \geq 3$  хувьд  $P_n(X)$  олон гишүүнтийг

$$P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - (X^2 + 1)P_{n-2}(X)$$

гэж тодорхойлъя. Дурын натурал  $n$  тоо ба бодит  $x$  тооны хувьд  $|P_n(x)| \leq (1 + x^2)^{\frac{n}{2}}$  тэнцэтгэл биш биелнэ гэж харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.** Эхний гишүүдийг бичвэл

$$\begin{aligned} P_1(X) &= 1 \\ P_2(X) &= 2X \\ P_3(X) &= 3X^2 - 1 \\ P_4(X) &= 4(X^3 - X) \\ P_5(X) &= 5X^4 - 10X^2 + 1 \end{aligned}$$

байна.  $P_0(X) = 0$  гэвэл  $n = 2$  үед адилтгал биелнэ.

**Комплекс тоо ашигласан бодолт:**  $T^2 - (2X)T + (X^2 + 1) = 0$  квадрат олон гишүүнтийн язгууруудыг  $A = X + i$  ба  $B = X - i$  гэвэл  $A + B = 2X$  ба  $AB = X^2 + 1$  байна. Одоо  $P_n(X) = \alpha A^n + \beta B^n$  хэлбэртэй гэвэл  $P_0(X) = 0$  ба  $P_1(X) = 1$  гэдгээс

$$\alpha = -\beta = (A - B)^{-1} = (2i)^{-1}$$

болох ба эндээс дурын  $n \geq 0$  хувьд  $P_n(X) = \frac{A^n - B^n}{2i} = \Im(X + i)^n$  байна. Энд  $\Im$  хуурмаг хэсэг. Иймд  $|P_n(x)| = |\Im(x + i)^n| \leq |x + i|^n = (1 + x^2)^{\frac{n}{2}}$  байна.

$$\Re(x + i)^n = 0 \iff \left( \frac{x - i}{x + i} \right)^n = -1 \iff x = i \frac{\sqrt[n]{-1} + 1}{\sqrt[n]{-1} - 1} \text{ буюу } x = \cot\left(\frac{(2k - 1)\pi}{2n}\right),$$

$1 \leq k \leq n$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

**Тригонометр ашигласан бодолт:** Дурын  $n \geq 0$  хувьд  $\sin t \neq 0$  бол  $P_n(\cot t) = \frac{\sin(nt)}{\sin^n t}$  гэж харуулъя.

$n = 0, 1$  үед илт ба  $n \geq 2$  үед  $\sin(nt) + \sin((n - 2)t) = 2 \cos t \sin((n - 1)t)$  гэдгээс

$$2 \cot t \frac{\sin(n - 1)t}{\sin^{n-1} t} - (1 + \cot^2 t) \frac{\sin(n - 2)t}{\sin^{n-2} t} = \frac{\sin(nt)}{\sin^n t}$$

болж батлагдана. Цаашилбал,  $\cot t$  дурын утга авах ба

$$|P_n(\cot t)| = \frac{|\sin(nt)|}{|\sin^n t|} \leq \frac{1}{|\sin t|^n} = (1 + \cot^2 t)^{\frac{n}{2}}$$

тул бодлого бодогдов.  $\sin(nt) = \pm 1$  буюу  $x = \cot\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$ ,  $1 \leq k \leq n$  үед тэнцэтгэл биелнэ.

# Монголын Математикийн 59-р Олимпиадын III Даваа

## Улсын Олимпиад

Монголын Математикийн 59-р олимпиадын III даваа 2023 оны 4.27-ноос 5.1-ний өдрүүдэд Нийслэлийн 1-р сургуулийн 100 жилийн ойн нэрэмжит болон зохион байгуулагдав.

Нийслэлийн 1 дүгээр сургууль бол МУГБ С. Цагаан тэргүүтэй нэрт сурган хүмүүжүүлэгч багш нар, Ц. Болдсүх, А. Ганбаатар, Б. Батцэнгэл нарын алдарт математикч эрдэмтэд, математикийн олимпиадын түүхэнд тодоор бичигдэх олон аваргуудыг төрүүлсэн, Монголын математикийн хөгжилд үнэлж баршгүй хувь нэмэр оруулсан сургууль билээ.

Олимпиадын ивээн тэтгэгчээр Нийслэлийн нэгдүгээр сургуулийн тооны ангийн төгсөгчид ТББ, Боловсролын Ерөнхий газар, ММОХ, хамтран ажиллагчаар Эрдэнэс Оюу Толгой ХХК, Caffee fonte, Космо групп, Капитрон банк, ONDO, Улаанбаатар дахь Канад сургууль, O'Resh зэрэг байгууллагууд ажиллалаа.

Тус олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан, тусалж дэмжсэн бүхий л байгууллага, хувь хүмүүст ММОХ-ны нэрийн өмнөөс талархал илэрхийлье.

## Олимпиадын мэргэжлийн хороо

ММО-59-ын мэргэжлийн үйл ажиллагааг Б. Батбаясгалан ахлагчтай их, дээд сургуулиудын багш, оюутнуудын баг гүйцэтгэж бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах, дүгнэх аргачлалыг гаргах, бодолт хамгаалах ажлуудыг тус тус гүйцэтгэлээ.

Гишүүд:

1. Бодлогын комиссын ахлагч, ММОХ-ны удирдах зөвлөлийн гишүүн доктор Г. Баярмагнай,
2. Олон Улсын Математикийн 64-р олимпиадад оролцох багийн ахлагч доктор Ү. Отгонбаяр,
3. Д. Даянцолмон (МУИС, доктор, олимпиадын хорооны нарийн бичигийн дарга)
4. Т. Хулан (МУИС, доктор),
5. У. Батзориг (МУИС, доктор),
6. Б. Баяржаргал (МУИС, доктор),
7. Б. Сандагдорж (МУБИС, доктор),
8. Э. Азжаргал (МУБИС, доктор),
9. Л. Буянтогтох (МУБИС, доктор),
10. Ш. Доржсэмбэ (МУБИС, доктор),
11. Э. Оргил-Эрдэнэ (ММОХ)

Бодлого засалтыг доктор Т. Хулан ахлав. Комиссын гишүүдээс гадна Г. Баяржавхлан, Д. Чингүүн, А. Алтансүх, Т. Цэрэнлхам, Ш. Билгүүдэй, Г. Далайцэрэн, Б. Улсболд, Э. Гэрэлхүү нарын МУИС-ийн оюутнууд бодлого засах ажлыг гүйцэтгэлээ. Мөн ахмад багш, академич Р. Гончигдорж бодлого засах ажилд оролцов.

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Е (9–10) ангиллын даамлаар Др. У. Батзориг ажиллалаа.

| Бодлого | Төрөл        | Зохиогч         | Зассан                       |
|---------|--------------|-----------------|------------------------------|
| E1      | Алгебр       | Г. Баярмагнай   | Б. Сандагдорж, Ш. Доржсэмбэ  |
| E2      | Геометр      | У. Батзориг     | Т. Хулан, Б. Улсболд         |
| E3      | Тооны онол   | Г. Баярмагнай   | Г. Баярмагнай , Ш. Билгүүдэй |
| E4      | Геометр      | Т. Хулан        | Т. Хулан, Э. Гэрэлхүү        |
| E5      | Комбинаторик | Б. Батбаясгалан | Б. Улсболд, Г. Далайцэрэн    |
| E6      | Алгебр       | Ү. Отгонбаяр    | А. Алтансүх, Т. Цэрэнлхам    |

F (11–12) ангиллын даамлаар Др. Ү. Отгонбаяр ажиллалаа.

| Бодлого | Төрөл        | Зохиогч       | Зассан                        |
|---------|--------------|---------------|-------------------------------|
| F1      | Алгебр       | У. Батзориг   | Э. Оргил-Эрдэнэ, Т. Цэрэнлхам |
| F2      | Геометр      | Б. Өлзийнасан | Г. Далайцэрэн, Э. Гэрэлхүү    |
| F3      | Комбинаторик | Ү. Отгонбаяр  | Г. Баяржавхлан, У. Батзориг   |
| F4      | Алгебр       | М. Өнөболд    | Ш. Билгүүдэй, Э. Оргил-Эрдэнэ |
| F5      | Комбинаторик | А. Нямдаваа   | Э. Азжаргал, Д. Чингүүн       |
| F6      | Тооны онол   | Г. Баярмагнай | Г. Баярмагнай, Г. Баяржавхлан |

T (ДБ) ангиллын даамлаар Б. Батбаясгалан ажиллалаа.

| Бодлого | Төрөл        | Зохиогч       | Зассан                                  |
|---------|--------------|---------------|-----------------------------------------|
| T1      | Геометр      | А. Нямдаваа   | Э. Азжаргал, А. Алтансүх                |
| T2      | Алгебр       | Ү. Отгонбаяр  | Ү. Отгонбаяр, Д. Чингүүн                |
| T3      | Комбинаторик | М. Өнөболд    | Л. Буянтогтох, Р. Гончигдорж            |
| T4      | Геометр      | У. Батзориг   | Б. Баяржаргал, У. Батзориг, А. Алтансүх |
| T5      | Тооны онол   | Г. Баярмагнай | Л. Буянтогтох, Р. Гончигдорж            |
| T6      | Алгебр       | Ү. Отгонбаяр  | Ү. Отгонбаяр, Ш. Доржсэмбэ              |

Олимпиадын дүн

Монголын Математикийн 59-р олимпиад уламжлал ёсоор дунд, ахлах, багшийн ангиллаар зохион байгуулагдлаа. Олимпиадын Е ангилалд 92 сурагч, F ангилалд 84 сурагч, Т ангилалд 62 багш нийт 244 хүн оролцож оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдсанаас 28 сурагч, 3 багш медальт байрт шалгарлаа.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 59 ДҮГЭЭР ОЛИМПИАДЫН Е АНГИЛАЛ

| Медаль | Овог        | Нэр          | Сургууль                  | Оноо |
|--------|-------------|--------------|---------------------------|------|
| Алт    | Энхболд     | Амаржаргал   | Увс, Эрдмийн-Эхлэл        | 30   |
| Мөнгө  | Мөнхбаяр    | Амин-Эрдэнэ  | Эрхэт-Эрдэм               | 28   |
| Мөнгө  | Шинэбаяр    | Одбаяр       | Сант                      | 28   |
| Мөнгө  | Наранбаатар | Болор        | Эрдмийн хишиг             | 25   |
| Мөнгө  | Амаржаргал  | Төгсцогт     | 11-р сургууль             | 24   |
| Хүрэл  | Эрдэнэбаяр  | Тэнүүн       | Хобби                     | 23   |
| Хүрэл  | Амартүвшин  | Түмэнбаяр    | Хөвсгөл, ЭДЦС             | 22   |
| Хүрэл  | Азжаргал    | Амарсайхан   | 11-р сургууль             | 22   |
| Хүрэл  | Багахүү     | Мөнхбадар    | 11-р сургууль             | 22   |
| Хүрэл  | Цэнд-Аюуш   | Бажнамсрай   | Увс, 2-р цогцолбор        | 22   |
| Хүрэл  | Ерулан      | Нартулга     | Баян-Өлгий, Зайд сургууль | 22   |
| Хүрэл  | Отгонбаяр   | Түвшинбаатар | Эрхэт-Эрдэм               | 21   |
| Хүрэл  | Анхбаяр     | Мишээл       | Орчлон                    | 20   |
| Хүрэл  | Чинбат      | Ирмүүн       | Эрхэт-Эрдэм               | 20   |

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 59 ДҮГЭЭР ОЛИМПИАДЫН F АНГИЛАЛ

| Медаль | Овог         | Нэр           | Сургууль             | Оноо |
|--------|--------------|---------------|----------------------|------|
| Алт    | Дэлгэрдалай  | Энэрэлт       | Сант                 | 41   |
| Мөнгө  | Батлхагва    | Тэнүүнсайхан  | Шинэ-Үе              | 31   |
| Мөнгө  | Цогтгэрэл    | Сайханбилэг   | Сант                 | 28   |
| Мөнгө  | Очирхүү      | Эрхэсболд     | Сант                 | 28   |
| Мөнгө  | Арвис        | Ивээл         | 11-р сургууль        | 27   |
| Мөнгө  | Хаволболат   | Нурсолтан     | 11-р сургууль        | 27   |
| Хүрэл  | Баяртай      | Буяндорж      | Увс, Эрдмийн эхлэл   | 26   |
| Хүрэл  | Баяр         | Бэлгүтэй      | 11-р сургууль        | 26   |
| Хүрэл  | Баттулга     | Дөлгөөнмөрөн  | Хөвсгөл, Дэлгэрмөрөн | 26   |
| Хүрэл  | Одонбаатар   | Тэнгис        | 11-р сургууль        | 24   |
| Хүрэл  | Сонор        | Манлай        | Сант                 | 23   |
| Хүрэл  | Тамир        | Билгүүнгэрэлт | Эрхэт Эрдэм          | 22   |
| Хүрэл  | Батбаясгалан | Ундрал        | 1-р сургууль         | 21   |
| Хүрэл  | Нэргүй       | Мөнх-Оргил    | Олонлог төв          | 20   |

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 59 ДҮГЭЭР ОЛИМПИАДЫН Т АНГИЛАЛ

| Медаль | Овог      | Нэр       | Сургууль    | Оноо |
|--------|-----------|-----------|-------------|------|
| Алт    | Мягмар    | Батбилэг  | Орчлон      | 28   |
| Мөнгө  | Бат-Очир  | Ганбилэг  | Олонлог төв | 21   |
| Мөнгө  | Мөнхтогоо | Гантогтох | Орчлон      | 21   |

**Олон улсын математикийн олимпиад**

Олон Улсын Математикийн 64-р олимпиад 7-р сарын 2-наас 13-ны хооронд Япон улсын Токио хотод зохион байгуулагдана. Энэ хичээлийн жилд ОУМО-д оролцох сурагчдын шалгаруулалт УМО-ын ахлах ангиллын эрх авсан сурагчдын хүрээн 2 шаттайгаар явагдаж дүнгээ гаргалаа. Эцсийн шатны нийлбэр дүнгээр:

1. Д. Энэрэлт, Сант сургууль
2. А. Ивээл, Нийслэлийн 11-р сургууль
3. Б. Тэнүүнсайхан, Шинэ-Үе сургууль
4. Х. Нурсолтан, Нийслэлийн 11-р сургууль
5. Ц. Сайханбилэг, Сант сургууль
6. О. Эрхэсболд, Сант сургууль

нар ОУМО-64-д оролцохоор шалгарлаа. Олон улсын олимпиадад оролцох багтаа өндөр амжилт гаргаж эх орныхоо нэрийг өндөрт өргөхийг хүсье.

ММОХ-ын гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалан

## Бодлогууд

### Е (9-10) ангилал

**Бодлого Е1.**  $(a + b)^2 = a^3 + b^3$  байдаг бүх бүхэл тоон  $a \leq b$  хосыг ол.

**Бодлого Е2.** Элдэв талт  $ABC$  гурвалжны  $BC$  тал дээр  $B$  ба  $C$  цэгээс ялгаатай  $X$  цэг тэмдэглэв.  $ABC$  гурвалжны  $AL$  биссектрисийн хувьд  $AX$  шулуунтай тэгш хэмтэй шулуун  $BC$  шулууныг  $Y$  цэгт огтлоно.  $AL$  хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун  $BC$  талтай  $O$  цэгт огтлолцоно.  $ABX$  ба  $ACY$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд болон  $O$  цэг нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого Е3.**  $k$  натурал тоо гэе. Аль ч хоёрынх нь ялгавар 2023-д хуваагддаггүй, дараах чанартай  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$  бүхэл тоон дараалал оршин байдаг бол  $k$  тоог *сайн тоо* гэж нэрлэе: ямар ч  $a_i$  гишүүний хувьд  $a_i - ka_j$  ялгавар 2023-д хуваагддаг байх  $a_j$  гишүүн олдоно.

100-аас хэтэрдэггүй бөгөөд тэгш хамгийн их сайн тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Е4.**  $ABC$  гурвалжны  $AC$  талын дундаж цэгийг  $M$  гэж тэмдэглэе.  $ABC$  гурвалжны дотор талд  $\angle BAP = \angle BCP$  байх  $P$  цэг авав.  $CP$  шулуун  $AB$  талыг  $R$  цэгт огтолдог гээд  $B$  оройгоос  $CP$  шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг  $Q$  гэе.  $Q$  цэг  $ABC$  гурвалжин дотор орших ба  $QM = PC/2$  бол  $RQ = QP$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

**Бодлого Е5.**  $n \times n$  шатрын хөлгийн нүднүүдэд нүд бүрийн хөршүүдийн яг хоёр нь даамтай байхаар даамууд байрлуулж болдог бүх натурал  $n$  тоог ол. Ерөнхий талтай хоёр нүдийг хөрш гэнэ.

**Бодлого Е6.**  $a, b, c$  тоонуудын хувьд  $0 \leq a \leq b \leq c$  ба  $a + b + c = 1$  байдаг бол

$$ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ca\sqrt{c-a} < \frac{1}{4}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

### Ү (11-12) ангилал

**Бодлого Ү1.** Дурын  $u, v$  эерэг тоонуудын хувьд

$$\min \left\{ u, \frac{100}{v}, v + \frac{2023}{u} \right\} \leq \sqrt{2123}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Энд  $\min X$  гэж  $X$  олонлогийн хамгийн бага гишүүнийг тэмдэглэнэ.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого Ү2.** Хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжны  $BD, CE$  өндрүүдийг татав.  $BD$  хэрчим дээр  $AD = DL$  байх  $L$  цэгийг,  $CE$  хэрчим дээр  $AE = EK$  байх  $K$  цэгийг авав.  $KL$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $M$  гэе.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AL$  шулуунтай дахин  $T$  цэгт,  $AK$  шулуунтай дахин  $S$  цэгт огтлолцоно.  $BS, CT, AM$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

**Бодлого F3.** Тэмцээнд таван охин, таван хөвгүүн оролцов. Дурын  $1 \leq i, j \leq 5$  хувьд  $i$  дугаартай охин ба  $j$  дугаартай хөвгүүн хоёр хоёулаа таньдаг хүүхдийн тоо  $|i - j|$  байдаг байхаар охидыг 1, 2, ..., 5 гэж, хөвгүүдийг мөн адил 1, 2, ..., 5 гэж дугаарлаж болдог байв. Охидын таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр ба хөвгүүдийн таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр хоёрын аль ихийг  $S$  гэвэл  $S$  тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ? Танилын харилцаа чиглэлтэй, өөрөөр хэлбэл  $A$  хүүхэд  $B$  хүүхдийг таньдаг байлаа гээд  $B$  хүүхэд  $A$  хүүхдийг таних албагүй, ба хүүхдийг өөртэй нь танил гэж тооцохгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого F4.** Бүх бодит тооны олонлогийг  $\mathbb{R}$  гэж тэмдэглэе. Дурын  $x, y, z \in \mathbb{R}$  бодит тоонуудын хувьд

$$f(x + y - z)^2 = f(xy) + h(x + y + z, xy + yz + zx)$$

байдаг бүх  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ба  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

**Бодлого F5.** Ангид хэдэн хүүхэд байв. Аль ч зургаан хүүхдийг авахад хоорондоо найз биш хоёр хүүхэд олддог ба дурын ийм найз биш хос сонгоход хоёуланттай нь найз хүүхэд үлдсэн дөрвөн хүүхэд дотор байдаг байв. Ангид хамгийн олондоо хэдэн хүүхэд байгаа вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

**Бодлого F6.**  $m$  натурал тоо өгөгдөв. Тойрог дээр бичигдсэн, аль ч дэс дараалсан  $m$  ширхэг тооны нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байдаг натурал тоон дарааллыг сайн дараалал гэе.

- (1)  $n \geq 2$  хувьд  $mn$  урттай дурын сайн дарааллын  $m$  ширхэг гишүүнийг дарж  $mn - m$  урттай сайн дараалал үүсгэж болно гэж харуул.
- (2)  $m^2$  урттай дурын сайн дарааллын ямар нэгэн гишүүн ядаж  $m$  удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

## Т (ДБ) ангилал

**Бодлого T1.** Огторгуйд бөмбөлөг ба түүнийг шүргэдэг хоёр хавтгай өгөгдөв. Гурвууланг нь шүргэдэг бөмбөлгийн төв бэхлэгдсэн эллипс дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

**Бодлого T2.**  $n$  натурал тоо гэе. Төгсгөлөг  $X$  олонлог дээр тодорхойлогдсон  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ба  $g_1, g_2, \dots, g_n: X \rightarrow [0, 1]$  функцүүд дурын  $1 \leq i, j \leq n$  хувьд

$$\sum_{x \in X} f_i(x) = \sum_{x \in X} g_j(x) = S \quad \text{ба} \quad \sum_{x \in X} f_i(x)g_j(x) = |i - j|$$

нөхцөлийг хангадаг гэе. Энд  $[0, 1] = \{0 \leq t \leq 1\}$  завсар.

- (1)  $S \geq n - 1$  гэж батал.
- (2)  $S = n - 1$  хувьд дээрх нөхцөл хангах төгсгөлөг  $X$  олонлог болон  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ба  $g_1, g_2, \dots, g_n: X \rightarrow [0, 1]$  функцүүдийн жишээ байгуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодлого Т3.**  $n$  натурал тоо гэе.  $n \times n$  шатрын хөлгийн хэдэн нүдийг ногооноор будав. Дурын ногоон нүднээс эхэлсэн тэрэг нүүдэл болгондоо хэвтээ босоо чиглэлээ өөрчлөн, ногоон нүд дамжиж явахад зургаан нүүдлийн дотор анх эхэлсэн байрандаа ирж чаддаггүй байв. Энд байрнаасаа хөдлөхгүй байхыг тооцохгүй. Ногооноор будагдсан нүдний тоо  $2n(1 + \sqrt[3]{n})$  тооноос бага гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

**Бодлого Т4.** Нэг шулуун дээр оршдоггүй аль ч гурван цэг нь мохоо өнцөгт гурвалжин үүсгэдэггүй байхаар хавтгайд хамгийн олондоо хэдэн цэгийг бүгд нэг шулуун дээр оршдоггүй байхаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодлого Т5.**  $n, m \geq 3$  сондгой тоонууд өгөгдөв. Аль ч дэс дараалсан  $m$  ширхэг тооны нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байхаар  $mn - 1$  ширхэг натурал тоог тойрог дээр бичив. Дарааллын ямар нэг гишүүн ядаж  $m + 1$  удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодлого Т6.**  $-1 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1$  бодит тоонуудын нийлбэр  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  бол

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sqrt{1 - x_i^2 x_j^2} \leq 0$$

болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

## Бодолтууд

### Е (9-10) ангилал

**Бодлого Е1.**  $(a + b)^2 = a^3 + b^3$  байдаг бүх бүхэл тоон  $a \leq b$  хосыг ол.

*Бодолт.* **Хариу:**  $(a, b) = (0, 1), (1, 2), (2, 2)$  ба  $(-n, n), n \geq 0$  бүхэл.

Дээрх хариунууд шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$a + b \neq 0$  гэе. Тэгвэл  $a + b = a^2 - ab + b^2$  болох ба эндээс  $(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$  болно. Одоо  $x = a - 1, y = b - 1$  гэвэл  $x \leq y$  ба  $x^2 + y^2 + (x - y)^2 = 2$  гэдгээс  $(x, y) = (\pm 1, \pm 1), (0, 1), (-1, 0)$  буюу  $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2)$  гэсэн шийдүүдтэй.

**Бодлого Е2.** Элдэв талт  $ABC$  гурвалжны  $BC$  тал дээр  $B$  ба  $C$  цэгээс ялгаатай  $X$  цэг тэмдэглэв.  $ABC$  гурвалжны  $AL$  биссектрисийн хувьд  $AX$  шулуунтай тэгш хэмтэй шулуун  $BC$  шулууныг  $Y$  цэгт огтолно.  $AL$  хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун  $BC$  талтай  $O$  цэгт огтлолцоно.  $ABX$  ба  $ACY$  гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд болон  $O$  цэг нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

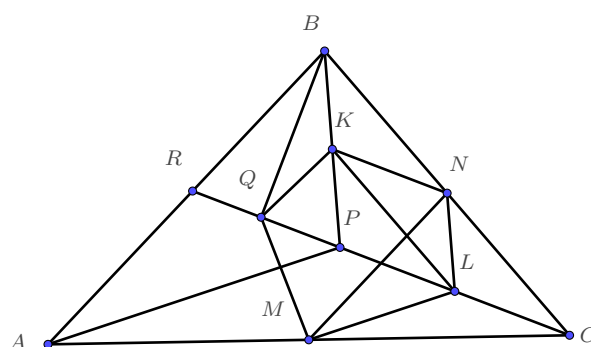


Иймд  $(k, n) = 1 \neq (k^2 - 1, n)$  байдаг хамгийн том тэгш  $k \leq 100$  тоог олоход хангалттай.  $(99 \cdot 101, 2023) = (95 \cdot 97, 2023) = (93 \cdot 95, 2023) = 1$  ба  $(98, 2023) = 7$  тул 100, 98, 96, 94 тоонууд сайн биш.  $(92, 2023) = 1$  ба  $(91 \cdot 93, 2023) = 7$  тул 92 сайн.

**Бодлого Е4.**  $ABC$  гурвалжны  $AC$  талын дундаж цэгийг  $M$  гэж тэмдэглэе.  $ABC$  гурвалжны дотор талд  $\angle BAP = \angle BCP$  байх  $P$  цэг авав.  $CP$  шулуун  $AB$  талыг  $R$  цэгт огтолдог гээд  $B$  оройгоос  $CP$  шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг  $Q$  гээ.  $Q$  цэг  $ABC$  гурвалжин дотор орших ба  $QM = PC/2$  бол  $RQ = QP$  гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт.

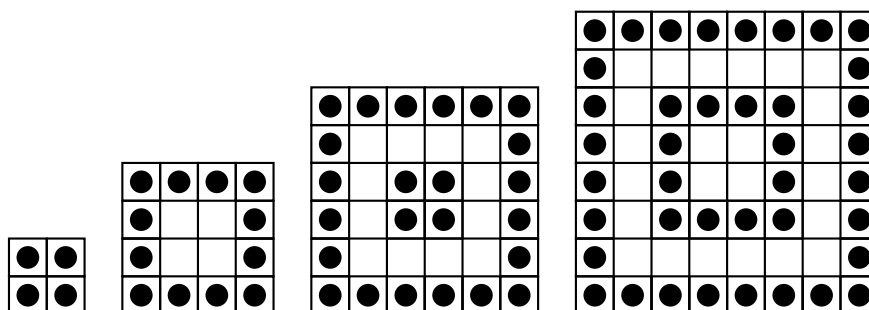


$BP$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $K$ ,  $BC$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $N$ ,  $PC$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $L$  гээ.  $AB \parallel MN$ ,  $AP \parallel ML$  учир  $\angle BAP = \angle NML$  байна.  $KNCL$  параллелграм учраас  $\angle BCP = \angle BCL = \angle NKL$ . Эндээс  $\angle NML = \angle NKL$  болох учир  $K, N, L, M$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.  $\angle BQP = 90^\circ$  учир  $QK = BP/2$  болно.  $QK = NL$  учир  $Q, K, N, L, M$  цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.  $QM = CP/2 = KN$  учир  $QK \parallel AB$  болох ба  $RQ = QP$  гэж мөрдөнө.

**Бодлого Е5.**  $n \times n$  шатрын хөлгийн нүднүүдэд нүд бүрийн хөршүүдийн яг хоёр нь даамтай байхаар даамууд байрлуулж болдог бүх натурал  $n$  тоог ол. Ерөнхий талтай хоёр нүдийг хөрш гэнэ.

Бодолт. **Хариу:**  $n$ -тэгш.

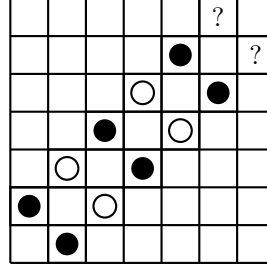
Эхлээд  $n$  тэгш үед сайн тоо болно гэдгийг харуулъя.



$n = 2k$  байх жишээ нь  $2k - 4$  жишээг дотроо агуулсан хүрээний бүх нүдэнд даам байрласан хөлөг байна.

Одоо  $n = 2k + 1$  үед хөлгийн нүд бүр яг хоёр ширхэг даамтай хөрштэй байж болохгүй гэдгийг харуулъя. Эсрэгээс нь болдог гээ. Хүснэгтийн  $i$ -р мөр  $j$ -р баганын огтлолцолыг  $(i, j)$  нүд гээ. Диагоналын дагуу  $(i, i)$ ,  $i \in [n]$  нүднүүдийн хөршүүдийг авч үзье.  $(1, 1)$  нүд яг хоёр хөрштэй тул

хөршүүдэд нь даам байрлана. Өөрөөр хэлбэл  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$  нүднүүдэд даам байрлана. Эдгээр нь  $(2, 2)$  нүдний хөрш тул  $(2, 3)$ ,  $(3, 2)$  нүднүүдэд даам байрлахгүй. Гэх мэтчилэн  $(1 + 2j, 2 + 2j)$ ,  $(2 + 2j, 1 + 2j)$  нүднүүдэд даам байрлах ба  $(2 + 2j, 3 + 2j)$ ,  $(3 + 2j, 2 + 2j)$  нүднүүдэд даам байрлахгүй.



Иймд  $(2k, 2k + 1)$ ,  $(2k + 1, 2k)$  нүднүүдэд даам байрлахгүй. Гэтэл эдгээр нь  $(2k + 1, 2k + 1)$  булангийн нүдний хөршүүд тул заавал даамтай байх ёстой болж зөрчил үүсэв. Иймд  $n = 2k + 1$  тоо сайн тоо биш.

**Бодлого Е6.**  $a, b, c$  тоонуудын хувьд  $0 \leq a \leq b \leq c$  ба  $a + b + c = 1$  байдаг бол

$$ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ca\sqrt{c-a} < \frac{1}{4}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

**Бодолт.** Хоёр бодолт хийе.

**Гүдгэр функц ашигласан бодолт:**  $s = a + b$  гэе. Эрэмбийн нөхцөлөөс  $c \geq 1/3$  тул  $0 \leq s = 1 - c \leq 2/3$  байна. Эхлээд  $ab\sqrt{b-a} \leq ab \leq s^2/4$  болохыг анзааръя. Одоо

$$a\sqrt{c-a} + b\sqrt{c-b} \leq (a+b)\sqrt{c-(a+b)/2} = s\sqrt{1-3s/2}$$

гэж харуулъя. Үнэхээр, квадрат зэрэгт дэвшүүлээд хасвал

$$\begin{aligned} & \left( (a+b)\sqrt{c-(a+b)/2} \right)^2 - \left( a\sqrt{c-a} + b\sqrt{c-b} \right)^2 \\ &= (a+b)(b-a)^2/2 + ab(\sqrt{c-a} - \sqrt{c-b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

байна. Бернулийн тэнцэтгэл бишээр  $\sqrt{1-3s/2} \leq 1 - 3s/4$  тул

$$s^2/4 + (1-s)s(1-3s/4) < 1/4$$

гэж харуулахад хангалттай ба хялбарчилбал  $1 + s - s(4-3s) = 3(s-1/2)^2 + 1/4 > 0$  болж батлагдана.

**Кошийн тэнцэтгэл биш ашигласан бодолт:**  $x \leq y$  үед  $\sqrt{y-x} \leq \frac{y-x+1}{2}$  тул

$$ab(b-a+1) + bc(c-b+1) + ca(c-a+1) = ab(2b+c) + bc(2c+a) + ca(2c+b) < \frac{1}{2}$$

гэж харуулахад хангалттай. Энэ нь  $1 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab^2 + bc^2 + ac^2) + 3(a^2b + b^2c + a^2c) + 6abc$  гэдгээс

$$ab^2 + ac^2 + bc^2 < a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c)$$

гэж батлахтай ижил. Үнэндээ  $ab^2 \leq b^3$  ба  $bc^2 + ac^2 \leq 2bc^2 \leq c^3 + b^2c$  тул  $ab^2 + ac^2 + bc^2 \leq b^3 + c^3 + b^2c$  байна.  $a^3 = b^2c = c^3 = 0$  байх боломжгүй тул тэнцэл биелэхгүй.

**Нэмэлт.** (1)  $ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ca\sqrt{c-a} < 1/5$  гэж харуулъя.

АГ дунджийн тэнцэтгэл бишээр  $3a \cdot 3a \cdot 2b \cdot 2b \cdot (b-a) \leq (a+b)^5$  тул  $ab\sqrt{b-a} \leq s^2\sqrt{s}/6$  байна. Иймд  $s^2/5 + (1-s)s\sqrt{1-3s/2} < 1/5$  буюу  $5s\sqrt{1-3s/2} < 1+s$  гэж харуулахад хангалттай. Квадрат зэрэгт дэвшүүлээд хялбарчилбал

$$2(1+s)^2 - 25s^2(2-3s) = 75s^3 - 48s^2 + 4s + 2 > 0$$

гэж батлахтай ижил ба энэ нь АГ дунджийн тэнцэтгэл бишээр  $25s^3 + 25s^3 + 25s^3 + 4s + 2 \geq 5 \cdot 50^{3/5}s^2 > 50s^2$  байна гэдгээс батлагдана.

(2)  $ab\sqrt{b-a} + bc\sqrt{c-b} + ca\sqrt{c-a} < 1/6$  үнэн, баталгаа хүнд.

## F (11-12) ангилал

**Бодлого F1.** Дурын  $u, v$  эерэг тоонуудын хувьд

$$\min \left\{ u, \frac{100}{v}, v + \frac{2023}{u} \right\} \leq \sqrt{2123}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Энд  $\min X$  гэж  $X$  олонлогийн хамгийн бага гишүүнийг тэмдэглэнэ.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодолт.** Илэрхийллээ  $S$  гэж тэмдэглэе.

$u \leq \sqrt{2123}$  үед  $S \leq u \leq \sqrt{2123}$  байна.  $\frac{100}{v} \leq \sqrt{2123}$  үед  $S \leq v \leq \sqrt{2123}$  байна.

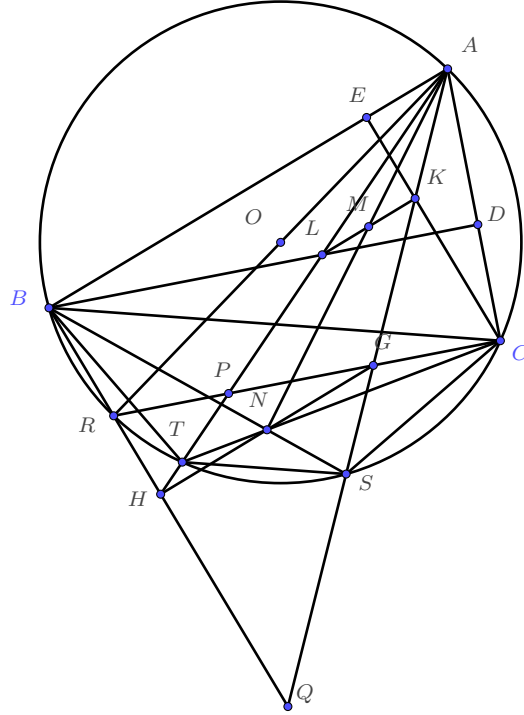
$u \geq \sqrt{2123}$  ба  $\frac{100}{v} \geq \sqrt{2123}$  үед  $S \leq v + \frac{2023}{u} \leq \frac{100}{\sqrt{2123}} + \frac{2023}{\sqrt{2123}} = \sqrt{2123}$  байна.

$u = \sqrt{2123}$  ба  $v = \frac{100}{\sqrt{2123}}$  үед тэнцэл биелнэ.

**Бодлого F2.** Хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжны  $BD, CE$  өндрүүдийг татав.  $BD$  хэрчим дээр  $AD = DL$  байх  $L$  цэгийг,  $CE$  хэрчим дээр  $AE = EK$  байх  $K$  цэгийг авав.  $KL$  хэрчмийн дундаж цэгийг  $M$  гээ.  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог  $AL$  шулуунтай дахин  $T$  цэгт,  $AK$  шулуунтай дахин  $S$  цэгт огтлолцоно.  $BS, CT, AM$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт.



Хоёр бодолт хийе.

Менелайн теорем ашигласан бодолт:  $AR$  диаметр байх  $R$  цэг авъя.  $RC \cap AL = P$ ,  $RC \cap AK = G$ ,  $BR \cap AL = H$ ,  $BR \cap AK = Q$  гээ.  $ADL$ ,  $AEK$  гурвалжнууд адил хажуут тэгш өнцөгт учраас дараах тэнцэл биелнэ.

$$\frac{AL}{AK} = \frac{AD}{AE} = \frac{AB \cos \angle A}{AC \cos \angle A} = \frac{AB}{AC}.$$

$\angle BAH = \angle DAG = \angle A - 45^\circ$  учир эдгээр өнцгүүдийн  $\cos$ -ууд тэнцүү байна:  $\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{AG}$ .

Өмнөх тэнцэл болон энэ харьцаанаас  $\frac{AL}{AK} = \frac{AH}{AG}$  гарах ба эндээс  $LK \parallel HG$  болно.

$HG \cap BS = N$  гээд  $HGQ$  гурвалжин  $B, N, S$  цэгүүдийг дайрсан шулууны хувьд Менелайн теорем бичээд эхний харьцааг олъё:

$$\frac{GN}{NH} \cdot \frac{HB}{BQ} \cdot \frac{QS}{SG} = 1, \quad \frac{GN}{NH} = \frac{SG}{QS} \cdot \frac{BQ}{HB}$$

$BQ = AB$ ,  $SQ = SR$ ,  $\angle CRS = \angle SAC = \angle A - 45^\circ = \angle BAH$  гэдгийг тооцвол:

$$\frac{GN}{NH} = \frac{SG}{QS} \cdot \frac{BQ}{HB} = \frac{SG}{SR} \cdot \frac{AB}{HB} = \tan \angle CRS \cdot \cot \angle BAH = 1.$$

Эндээс  $N$  цэг  $HG$ -ийн дундаж болох ба  $LK \parallel HG$  учир  $N$  цэг  $AM$  шулуун дээр оршино.

Үүнтэй төстэйгээр  $HG \cap TC = N'$  гээд  $HGP$  гурвалжин  $T, N', C$  цэгүүдийг дайрсан шулууны хувьд Менелайн теорем бичвэл  $N'$  цэг  $AM$  шулуун дээр орших болж батлагдана.

Синусын теорем ашигласан бодолт:  $P = (BS) \cap (TC)$  гэе.  $M$  нь  $LK$ -ийн дундаж цэг учраас  $\frac{\sin \angle LAM}{\sin \angle MAK} = \frac{AK}{AL}$  гэж гарна.  $\angle BAL = \angle KAC = \angle BAC - 45^\circ$  гэдгээс  $\angle SBC = \angle TCB$  буюу  $BTSC$  нь адил хажуут трапец болно.  $\triangle ATP$  дээр синусын теорем хэрэглэвэл

$$\frac{TP}{\sin \angle TAP} = \frac{AP}{\sin \angle ATP} \quad (1)$$

$\triangle ASP$  дээр синусын теорем хэрэглэвэл

$$\frac{SP}{\sin \angle SAP} = \frac{AP}{\sin \angle ASP} \quad (2)$$

(1) ба (2)-оос

$$\frac{\sin \angle TAP}{\sin \angle SAP} \cdot \frac{SP}{TP} = \frac{\sin \angle ATP}{\sin \angle ASP} = \frac{ABC}{ACB} = \frac{AC}{AB}.$$

$BTSC$  адил хажуут трапец тул  $SP = TP$ , мөн  $E, D$  цэгүүд өндрийн сууриуд тул  $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$  байна. Иймд  $\frac{\sin \angle TAP}{\sin \angle SAP} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}AD} = \frac{AK}{AL}$  болно.  $\angle LAK = \angle LAM + \angle MAK = \angle TAP + \angle SAP$  ба

$$\frac{\sin \angle LAM}{\sin \angle MAK} = \frac{\sin \angle TAP}{\sin \angle SAP} \text{ тул } \angle LAM = \angle TAP$$

буюу  $TC, BS, AM$  шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно.

**Бодлого F3.** Тэмцээнд таван охин, таван хөвгүүн оролцов. Дурын  $1 \leq i, j \leq 5$  хувьд  $i$  дугаартай охин ба  $j$  дугаартай хөвгүүн хоёр хоёулаа таньдаг хүүхдийн тоо  $|i - j|$  байдаг байхаар охидыг 1, 2, ..., 5 гэж, хөвгүүдийг мөн адил 1, 2, ..., 5 гэж дугаарлаж болдог байв. Охидын таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр ба хөвгүүдийн таньдаг хүүхдийн тооны нийлбэр хоёрын аль ихийг  $S$  гэвэл  $S$  тоо хамгийн багадаа хэд байж болох вэ? Танилын харилцаа чиглэлтэй, өөрөөр хэлбэл  $A$  хүүхэд  $B$  хүүхдийг таньдаг байлаа гээд  $B$  хүүхэд  $A$  хүүхдийг таних албагүй, ба хүүхдийг өөртэй нь танил гэж тооцохгүй.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 19.**

$1 \leq i \leq 5$  хувьд  $i$  дугаартай охиныг  $a_i$  гээд түүний таньдаг хүүхдүүдийн олонлогийг  $A_i$  гэж тэмдэглэе. Мөн ижлээр  $i$  дугаартай хөвгүүнийг  $b_i$  гээд түүний таньдаг хүүхдүүдийн олонлогийг  $B_i$  гэж тэмдэглэе.  $|A_i \cap B_1| = i - 1$ ,  $|A_i \cap B_5| = 5 - i$  гэдгээс

$$|A_1| \geq 4, |A_2| \geq 3, |A_3| \geq 2, |A_4| \geq 3, |A_5| \geq 4$$

байна.  $|B_i|$  хувьд мөн ижил байна.

Эхлээд  $|A_1| = 4$  гэе.  $|A_1 \cap B_5| = 4$  гэдгээс  $A_1 \subseteq B_5$  байх тул  $A_1 \cap A_5 \subseteq B_5 \cap A_5 = \emptyset$  байна. Эндээс  $|B_i| \geq |(A_1 \cup A_5) \cap B_i| = |A_1 \cap B_i| + |A_5 \cap B_i| = 4$  болно. Энэ үед  $\sum |B_i| \geq 20$  байна.  $|A_5| = 4$  үед мөн ижлээр  $\sum |B_i| \geq 20$  байна.

Одоо  $|A_3| = 2$  гэе. Тэгвэл  $|A_3 \cap B_1| = |A_3 \cap B_5| = 2$  тул  $A_3 \subseteq B_1 \cap B_5$  байна. Эндээс  $|B_1| \geq |A_5 \cap B_1| + |B_5 \cap B_1| \geq 6$  байна. Мөн ижлээр  $|B_5| \geq 6$  тул  $\sum |B_i| \geq 6 + 3 + 2 + 3 + 6 = 20$  байна.

Эцэст нь  $|A_1| \geq 5$ ,  $|A_3| \geq 3$ ,  $|A_5| \geq 5$  үед  $\sum |A_i| \geq 5 + 3 + 3 + 3 + 5 = 19$  байна. Иймд  $\sum |A_i| = \sum |B_i| = 19$  байдаг жишээ байгуулахад бодлого бодогдоно:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_2, a_4, b_1, b_2, b_5\} & \{a_1, a_3, a_5, b_3, b_4\} &= B_1 \\ A_2 &= \{a_4, a_5, b_1\} & \{a_1, a_3, b_5\} &= B_2 \\ A_3 &= \{a_1, a_5, b_1\} & \{a_3, a_4, b_5\} &= B_3 \\ A_4 &= \{a_1, a_3, a_5\} & \{a_4, b_1, b_5\} &= B_4 \\ A_5 &= \{a_1, a_3, b_3, b_4, b_5\} & \{a_2, a_4, a_5, b_1, b_2\} &= B_5 \end{aligned}$$

**Нэмэлт.**  $|A_i| = |B_i| = 4$  байдаг жишээ байгуулах хялбар:  $1 \leq i \leq 5$  хувьд

$$A_i = \{a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_4\} \quad B_i = \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_4\}$$

гэхэд нөхцөл хангана. Энэ үед  $S = 20$  байна.

**Бодлого F4.** Бүх бодит тооны олонлогийг  $\mathbb{R}$  гэж тэмдэглэе. Дурын  $x, y, z \in \mathbb{R}$  бодит тоонуудын хувьд

$$f(x + y - z)^2 = f(xy) + h(x + y + z, xy + yz + zx)$$

байдаг бүх  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ба  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

**Бодолт.**  $D = \{(x + y + z, xy + yz + zx) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  ба  $E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \geq 3b\}$  гэвэл  $D = E$  байна. Үнэхээр,  $D \subseteq E$  болох нь илт. Одоо  $E \subseteq D$  гэж харуулъя.  $a^2 \geq 3b$  үед  $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$  олон гишүүнт гурван бодит шийдтэй байх  $c$  олдох нь олон гишүүнтийн хэлбэрээс мөрдөнө.

$h$  функц  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  дээр дурын утга авч болох ба энэ нь бодлогын нөхцөлд нөлөөлөхгүй тул  $h$ -ийн зөвхөн  $D$  дээрх утгыг тодорхойлох хэрэгтэй.

**Хариу:**  $f(x) = c$ ,  $h(a, b) = c^2 - c$  ба  $f(x) = x/4$ ,  $h(a, b) = (a^2 - 4b)/16$ ,  $(a, b) \in D$ .

Дээрх функцүүд нөхцөл хангах нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя.

$(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$  гэвэл

$$f(x - y + z)^2 - f(xz) = h(x + y + z, xy + yz + zx) = f(x + y - z)^2 - f(xy) \quad (*)$$

болно. Энд  $x = 1$  гэвэл  $f(y) - f(z) = f(1 - y + z)^2 - f(1 + y - z)^2$  болно. Одоо  $(y, z) \mapsto (y - z, 0)$  гэвэл  $f(y - z) - f(0) = f(1 - y + z)^2 - f(1 + y - z)^2 = f(y) - f(z)$  болно.  $(y, z) \mapsto (x + y, x)$  гэвэл  $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0)$  болно.

Иймд  $g(x) = f(x) - f(0)$  функц Кошийн функц болно.  $(*)$ -д  $z = 0$  гэвэл  $f(x + y)^2 - f(x - y)^2 = f(xy) - f(0)$  болох ба эндээс  $g(xy) = (g(x + y) - g(x - y))(g(x + y) + g(x - y) + 2f(0)) = 4g(y)(g(x) + f(0))$  болно. Эндээс  $f(0)(g(x) - g(y)) = 0$  байна.

$g(x)$  функц тогтмол биш бол  $f(0) = 0$  байх ба энэ үед  $g(xy) = 4g(x)g(y)$  болно. Эндээс  $g(x)$  өсдөг Кошийн функц тул  $g(x) = ax$  хэлбэртэй ба  $g(1) = 4g(1)^2$  гэдгээс  $a = 1/4$  ба  $f(x) = x/4$  байна. Энэ үед  $D$  дээр  $h(a, b) = (a^2 - 4b)/16$  байхыг шалгах хэцүү биш.

**Бодлого F5.** Ангид хэдэн хүүхэд байв. Аль ч зургаан хүүхдийг авахад хоорондоо найз биш хоёр хүүхэд олддог ба дурын ийм найз биш хос сонгоход хоёулантай нь найз хүүхэд үлдсэн дөрвөн хүүхэд дотор байдаг байв. Ангид хамгийн олондоо хэдэн хүүхэд байгаа вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу: 25.**

Ангийн хүүхдийн тоог  $N$  гэе. Эхлээд  $N = 25$  байх боломжтой гэж харуулъя. Ангийг тав, таван хүүхэдтэй таван бүлэгт хуваагаад ялгаатай бүлгийн хүүхдүүд найз, нэг бүлгийн хүүхдүүд найз биш байдаг гэе. Зургаан хүүхэд сонгоё. Таван бүлэг байгаа тул ядаж хоёр хүүхэд нэг бүлэгт орох ба тэр хоёр найз биш. Бүлэг бүр таван хүүхэдтэй тул энэ хоёрын бүлэгт ордоггүй хүүхэд олдох ба тэр хүүхэд хоёулантай нь найз байна.

Одоо  $N \leq 25$  гэж харуулъя. Эсрэгээс нь  $N \geq 26$  жишээ байдаг гэе. Нэг хүүхэд сонгоод  $a_1$  гэвэл  $a_1$  ядаж  $N - 5$  найзтай. Үгүй бол  $a_1$ -тэй найз биш 5 хүүхэд олдох болж зөрчил гарна. Энэ хүүхдүүд дотроос нэгийг сонгоод  $a_2$  гэвэл  $a_1, a_2$  дундаа ядаж  $N - 10$  найзтай. Энэ мэтчилэн  $a_1, a_2, \dots, a_5$  хүүхдүүдийг дундаа ядаж  $N - 25 \geq 1$  найзтай байхаар сонгож чадна. Энэ нь дурын зургаан хүүхэд дотор найз биш хос олдоно гэдэгт зөрчинө.

**Бодлого F6.**  $m$  натурал тоо өгөгдөв. Тойрог дээр бичигдсэн, аль ч дэс дараалсан  $m$  ширхэг тооны нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байдаг натурал тоон дарааллыг *сайн дараалал* гэе.

- (1)  $n \geq 2$  хувьд  $mn$  урттай дурын сайн дарааллын  $m$  ширхэг гишүүнийг дарж  $mn - m$  урттай сайн дараалал үүсгэж болно гэж харуул.
- (2)  $m^2$  урттай дурын сайн дарааллын ямар нэгэн гишүүн ядаж  $m$  удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.

Тойрог дээр бичигдсэн сайн дарааллаа  $a_0, a_1, \dots, a_{mn-1}$  гэж  $mn$  модулиар дугаарлая. Эхлээд  $a_t = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{mn-1}\}$  бол  $a_{t-m+1} = a_{t+1}, a_{t-m+2} = a_{t+2}, \dots, a_{t-1} = a_{t-1+m}$  байна гэж харуулъя.

$0 \leq i \leq mn - 1$  бүрийн хувьд  $S_i = a_i + \dots + a_{i+m-1}$  нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байх ба  $S_{i+1} - S_i = a_{i+m} - a_i$  биелнэ. Одоо  $S_i > S_j$  байх  $t - m + 1 \leq i, j \leq t$  оршин байдаг гэж үзье. Тэгвэл  $S_i - S_j \geq S_j(m - 1)$  байна. Иймд  $ma_t \geq S_i > S_j > a_t$  гэдгээс

$$ma_t - a_t \geq S_i - S_j \geq S_j(m - 1) > a_t(m - 1)$$

болж зөрчил гарна. Эндээс  $S_{t-m+1} = S_{t-m+2} = \dots = S_t$  гэж мөрдөх тул  $t - m + 1 \leq i \leq t - 1$  бүрийн хувьд  $a_i = a_{m+i}$  болж өгүүлбэр батлагдав.

- (1)  $k \geq 2$  хувьд  $a_0, a_1, \dots, a_{mk-1}$  гэсэн  $mk$  урттай сайн дарааллын хамгийн их гишүүн  $a_t$  бол  $a_t, a_{t+1}, \dots, a_{t+m-1}$  гишүүдийг дарсан

$$a_0, a_1, \dots, a_{t-1}, a_{t+m}, a_{t+m+1}, \dots, a_{mk-1}$$

дараалал  $m(k - 1)$  урттай сайн дараалал болох нь мөрдөнө. Энэ алхмыг  $m$ -ээр цөөлөх гэе.

- (2)  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  тоонууд бүгд ижил бөгөөд аль ч хоёр дэс дараалсан дугаарын ялгавар  $m$  байдаг бол эдгээрийг  $k$ -онц гэе. Одоо  $1 \leq k \leq m$  үед дурын  $mk$  урттай сайн дараалал дор хаяад  $m - k + 1$  ширхэг (үл огтлолцох)  $k$ -онц дэд дараалал агуулахыг  $k$ -р индукцлэн баталъя.

Индукцын суурь  $k = 1$  үнэн болох нь тодорхой.

Индукцын шилжилт:  $k \geq 2$  ба  $a_0, a_1, \dots, a_{mk-1}$  сайн дараалал байг. Эдгээр тоонуудын хамгийн ихийг  $a_t$  гээд  $m$ -ээр цөөлбөл индукцын өмнөх алхамаар ядаж  $m - (k - 1) + 1$  ширхэг  $(k - 1)$ -онц дэд дараалал агуулна.  $a_{t-(m-1)}, a_{t-(m-2)}, \dots, a_{t-1}$  тоонуудын дор хаяад  $m - (k - 1)$  ширхэг нь тэдгээр  $(k - 1)$ -онц дарааллын гишүүн байх ба дурын  $1 \leq i \leq m - 1$  хувьд  $a_{t-m+i} = a_{t+i}$  биелнэ. Иймд өгсөн  $mk$  урттай сайн дараалал дор хаяад  $m - k + 1$  ширхэг  $k$ -онц дэд дараалал агуулна.

Эндээс  $m^2$  урттай сайн дараалал ядаж 1 ширхэг  $m$ -онц дараалал агуулах тул  $m$  ширхэг ижил тоо агуулна.

## Т (ДБ) ангилал

**Бодлого Т1.** Огторгуйд бөмбөлөг ба түүнийг шүргэдэг хоёр хавтгай өгөгдөв. Гурвууланг нь шүргэдэг бөмбөлгийн төв бэхлэгдсэн эллипс дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

*Бодолт.* Өгөгдсөн хоёр хавтгай параллел үед илэрхий тул параллел биш ба  $l$  шулуунаар огтлолцдог гэе. Өгөгдсөн бөмбөлгийн радиусыг  $r$ , төвийг  $O$  гээд  $O$  цэгээс  $l$  шулуун хүртэлх зайг  $a > r$  гэе.  $P$  цэгт төвтэй  $s$  радиустай бөмбөлөг нөхцөл хангадаг гээд  $P$  цэгээс  $l$  шулуун хүртэлх зайг  $b$  гэвэл

$$r + s = OP \quad \text{ба} \quad \frac{r}{a} = \frac{s}{b}$$

байна.

*Директрикс ашигласан бодолт:*  $Ol$  хавтгай дээрх  $l$  шулуунтай параллел бөгөөд  $l$  шулуунаас  $a$  зайтай,  $O$  цэгийг дайрдаггүй шулууныг  $m$  гэвэл  $P$  цэгээс  $m$  шулуун хүртэлх зай  $a + b$  байна. Одоо

$$\frac{r + s}{a + b} = \frac{r}{a} < 1$$

харьцаа тогтмол тул  $P$  цэг  $O$  фокус,  $m$  директрикс,  $r/a$  эссентрисититэй эллипс дээр оршино.

*Координат ашигласан бодолт:*  $r = 1$  гэхэд явцуурах зүйл үгүй. Одоо  $l$  шулуун  $x$ -тэнхлэг болдог бөгөөд  $O(0, a, 0)$  байх координатын системийн хувьд  $P(x, y, z)$  гэвэл  $y = b > 0$  ба  $z = 0$  байх нь илт. Энэ үед  $a > 1$  гэдгээс  $P$  цэгийн хангах

$$x^2 + (y - a)^2 = \left(1 + \frac{y}{a}\right)^2$$

тэгшитгэл эллипс дүрсэлнэ.

**Бодлого Т2.**  $n$  натурал тоо гэе. Төгсгөлөг  $X$  олонлог дээр тодорхойлогдсон  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ба  $g_1, g_2, \dots, g_n: X \rightarrow [0, 1]$  функцүүд дурын  $1 \leq i, j \leq n$  хувьд

$$\sum_{x \in X} f_i(x) = \sum_{x \in X} g_j(x) = S \quad \text{ба} \quad \sum_{x \in X} f_i(x)g_j(x) = |i - j|$$

нөхцөлийг хангадаг гэе. Энд  $[0, 1] = \{0 \leq t \leq 1\}$  завсар.

(1)  $S \geq n - 1$  гэж батал.

(2)  $S = n - 1$  хувьд дээрх нөхцөл хангах төгсгөлөг  $X$  олонлог болон  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ба  $g_1, g_2, \dots, g_n: X \rightarrow [0, 1]$  функцүүдийн жишээ байгуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

$$(1) \quad S = \sum_{x \in X} f_1(x) \geq \sum_{x \in X} f_1(x)g_n(x) = n - 1 \text{ байна.}$$

$$(2) \quad X = \{1, 2, \dots, 2S\} \text{ ба } 1 \leq i \leq n \text{ хувьд}$$

$$f_i = 1_{\{i, i+1, \dots, i+S-1\}} = \begin{cases} 1, & i \leq x \leq i+S-1 \\ 0, & \text{бусад} \end{cases}$$

ба  $g_i = 1 - f_i$  гэе. Тэгвэл  $f_i(X) \subseteq \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$  байна. Мөн  $\sum_{x \in X} f_i(x) = |\{i, i+1, \dots, i+S-1\}| = S$  ба  $\sum_{x \in X} g_i(x) = |\{1, 2, \dots, i-1\} \cup \{i+S, i+S+1, \dots, 2S\}| = S$  байх нь илт. Цаашилбал  $1 \leq i \leq j \leq n$  хувьд

$$\sum_{x \in X} f_i(x)g_j(x) = |\{i, i+1, \dots, j-1\}| = j - i$$

$$\sum_{x \in X} f_j(x)g_i(x) = |\{i+S, i+S+1, \dots, j+S-1\}| = j - i$$

байна.

**Бодлого Т3.**  $n$  натурал тоо гэе.  $n \times n$  шатрын хөлгийн хэдэн нүдийг ногооноор будав. Дурын ногоон нүднээс эхэлсэн тэрэг нүүдэл болгондоо хэвтээ босоо чиглэлээ өөрчлөн, ногоон нүд дамжиж явахад зургаан нүүдлийн дотор анх эхэлсэн байрандаа ирж чаддаггүй байв. Энд байрнаасаа хөдлөхгүй байхыг тооцохгүй. Ногооноор будагдсан нүдний тоо  $2n(1 + \sqrt[3]{n})$  тооноос бага гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолт. Ногооноор будагдсан нүдний тоог  $N$  гэе. Хөлгийн  $n$  мөр болон  $n$  баганаар хоёр туйлт  $G$  граф байгуулж,  $i$  мөр ба  $j$  баганы огтлолцолд орших нүд ногооноор будагдсан тохиолдолд тэднийг ирмэгээр холбоё. Энэ граф  $N$  ирмэгтэй ба зургаагаас хэтрэхгүй урттай цикл агуулахгүй. Одоо  $N < 2n(2 + \sqrt[3]{n})$  гэж баталъя.

$t = \frac{N}{2n}$  гэе.  $G$  графийн оройн зэрэг дунджаар  $2t$  байна. Эхлээд дараах леммийг баталъя.

**Лемм 1.** Дундаж зэрэг нь  $2t$  байх граф бүх оройн зэрэг нь ядаж  $t$  байх дэд граф агуулна.

Баталгаа. Хэрэв зэрэг нь  $t$ -ээс эрс бага байдаг орой олддог бол уг оройг устгая. Энэ үйлдлээр дундаж оройн зэрэг өснө. Хүртвэр ба хуваарь нь бэхлэгдсэн тооноос хэтрэдэггүй рационал тоо төгсгөлөг тул энэ алгоритм зогсох ёстой бөгөөд үлдсэн оройнууд нь бидний хүссэн дэд графийг өгнө.  $\square$

Леммээс  $G$  графийн орой бүрийн зэрэг ядаж  $t$  гэж үзэж болно. Одоо  $u$  гэсэн орой  $u$ -аас яг  $k$  зайд орших оройн олонлогыг  $A_k$  гэвэл  $|A_1| \geq t$  байна. Дөрөв урттай цикл агуулаагүй гэдгээс  $|A_2| \geq |A_1|(t-1)$ , зургаа урттай цикл агуулаагүй гэдгээс  $|A_3| \geq |A_2|(t-1)$  байна. Энд  $A_1, A_3$  оройнууд ижилд туйлд орох тул  $t(t-1)^2 + t \leq n$  байна. Эндээс  $t-1 < \sqrt[3]{n}$  болж батлах зүйл мөрдөнө.

**Бодлого Т4.** Нэг шулуун дээр оршдоггүй аль ч гурван цэг нь мохоо өнцөгт гурвалжин үүсгэдэггүй байхаар хавтгайд хамгийн олондоо хэдэн цэгийг бүгд нэг шулуун дээр оршдоггүй байхаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

**Бодолт.** **Хариу: 5.**

Квадратын оройнууд ба диагоналиудын огтлолцлын цэгийг авбал аль ч гурав нь мохоо өнцөгт гурвалжин үүсгэхгүй тул нөхцөл хангана. Одоо энэ нь 5 цэг байрлуулах цор ганц боломж гэж харуулья. Тэгвэл 6 цэг байрлуулах боломжгүй.

Нэг шулуун дээр оршдоггүй гурван цэгийн үүсгэх гурвалжин ба нэмэлт нэг цэг авъя. Нэмэлт цэг гурвалжны дотор байвал  $2\pi/3 > \pi/2$  тул мохоо өнцөг олдоно. Гурвалжны тал дээр байвал  $\pi/2 = \pi/2$  гэдгээс өндрийн суурь байхаас өөрцгүй. Тухайлбал, нэг шулуун дээр дөрөв болон түүнээс олон цэг байх боломжгүй. Гурвалжны гадна байдаг бол  $2\pi/4 = \pi/2$  гэдгээс дөрвөн цэг маань тэгш өнцөгт үүсгэх хэрэгтэй болно.

Таван цэг авахад нэг гурвалжин, хоёр өндрийн суурь байвал хоёр өндрийн сууриа нэг эсрэг оройтой авахад мохоо өнцөгт гурвалжин үүснэ. Иймд тэгш өнцөгт ба нэг цэг үүсдэг гэе. Тэгш өнцөгтийн гадна талд байвал мохоо өнцөгт гурвалжин үүсэх нь илт. Тал дээр байх боломжгүй ба дотор талд байвал бүх талтай тэгш өнцөг үүсгэх ёстой. Эндээс тэгш өнцөгт маань квадрат, нэмэлт цэг нь диагоналиудын огтлолцол болно.

**Бодлого Т5.**  $n, m \geq 3$  сондгой тоонууд өгөгдөв. Аль ч дэс дараалсан  $m$  ширхэг тооны нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байхаар  $mn - 1$  ширхэг натурал тоог тойрог дээр бичив. Дарааллын ямар нэг гишүүн ядаж  $m + 1$  удаа давтаж бичигдсэн гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

**Бодолт.** Тойрог дээр бичигдсэн аль ч дэс дараалсан  $m$  ширхэг тооны нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт болдог тоонуудыг сайн дараалал гэе.

$k$  урттай сайн дараалал өгөгдсөн гээд  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  гэж  $k$  модулиар дугаарлая. Бүгд  $m$ -д хуваагддаг бол  $a_0/m, a_1/m, \dots, a_{k-1}/m$  тоонууд бодлогын нөхцөл хангана. Иймд  $m \nmid a_0$  гэж үзэхэд явцуурах зүйл үгүй. Хэрэв  $(k, m) = 1$  бол ядаж  $m$  ширхэг дэс дараалсан нэгийн тоо бичигдсэн гэдгийг харуулья.

$0 \leq i \leq k - 1$  хувьд  $S_i := a_i + \dots + a_{i+m-1}$  нийлбэр  $m$ -ийн зэрэгт байна. Хамгийн бага зэрэгтийг  $S_t$  гэе. Дурын  $i$  хувьд  $S_t \mid S_i$  байх тул  $a_{i+m} - a_i = S_{i+1} - S_i \equiv 0 \pmod{S_t}$  байна.  $(k, m) = 1$  гэдгээс  $xk + ym = 1$  байх  $x, y$  бүхэл тоонууд олдох ба эндээс  $a_{i+1} \equiv a_{i+xk+ym} \equiv a_i \pmod{S_t}$  гэж мөрдөх тул  $a_0 \equiv a_1 \equiv \dots \equiv a_{k-1} \pmod{S_t}$  байна.  $ma_0 \equiv ma_t = S_t \equiv 0 \pmod{S_t}$  ба  $m \nmid a_0$  гэдгийг анхаарвал  $S_t = m$  ба  $a_t = a_{t+1} = \dots = a_{t+m-1} = 1$  болно.

Одоо  $k = mn - 1$  урттай сайн дараалал өгөгдсөн ба  $m \nmid a_0$  гэе. Дээрхээс дэс дараалсан  $m$  ширхэг 1 олдоно. Эднээс нэгийг нь дарахад ахиад сайн дараалал болох ба  $m$  сондгой гэдгээс  $(k - 1, m) = 1$  тул ахиад дэс дараалсан  $m$  ширхэг 1 олдоно. Иймд анхны сайн дараалалд ядаж  $m + 1$  ширхэг 1 байгаа.

**Бодлого Т6.**  $-1 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1$  бодит тоонуудын нийлбэр  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  бол

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sqrt{1 - x_i^2 x_j^2} \leq 0$$

болохыг харуулж, тэнцэл биелэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Тэйлорын теоремоор дурын  $-1 < t < 1$  хувьд

$$\sqrt{1-t} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k-1)} t^k$$

байна. Энд  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  тул

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sqrt{1-x_i^2 x_j^2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k-1)} \left( \sum_{i=1}^n x_i^{2k+1} \right)^2 \leq 0$$

байна. Тэнцэл биелэх нөхцөл дурын  $k \geq 1$  хувьд  $\sum_{i=1}^n x_i^{2k+1} = 0$  байна. Эндээс  $x_1, x_2, \dots, x_n$  тоонууд 0 ба нийлбэр нь 0 байдаг хосуудад хуваагдана гэж харуулъя. Энэ үед тэнцэл биелэх нь илт.

Эсрэгээс нь 0 болон нийлбэр нь 0 байдаг хосуудыг хасаад хэдэн тоо үлддэг гээд тэднийг ижил ижлээр нь багцалбал  $x_1, \dots, x_m$  хос хосоороо ялгаатай бодит тоонууд,  $n_1, \dots, n_m$  натурал тоонууд ба дурын  $k$  хувьд  $\sum_{i=1}^m n_i x_i^{2k+1} = 0$  гэж үзэж болно. Вандермондын теоремоор  $x_i^2 = x_j^2$  байх  $i \neq j$  олдоно. Гэтэл дурын  $i \neq j$  хувьд  $x_i + x_j \neq 0$  ба  $x_i - x_j \neq 0$  тул зөрчил гарлаа.



# Олон Улсын Мэдээ

## Европын Охидын Математикийн Олимпиад

Европын Охидын Математикийн 12-р Олимпиад 2023 оны 4-р сарын 13-наас 19-ны өдөр Словени улсын Порторош хотод зохион байгуулагдлаа. Багийн ахлагчаар доктор Т. Хулан, дэд ахлагчаар доктор С. Цогзолмаа нар оролцов. Манай баг нийт 82 оноо авч 55 орноос (38 нь Европынх) 24-р байрт шалгарав.

### Сурагчдын дүн

| Оролцогч       | Сургууль         | Оноо | Амжилт        |
|----------------|------------------|------|---------------|
| Б. Ундрал      | УБ, 1-р сургууль | 26   | Хүрэл медаль  |
| Г. Дөлгөөн     | УБ, 1-р сургууль | 25   | Хүрэл медаль  |
| Н. Болор       | Эрдмийн Хишиг    | 16   | Хүрэл медаль  |
| М. Амин-Эрдэнэ | Эрхэт-Эрдэм      | 15   | Тусгай шагнал |

### Талархал

Европын Охидын Математикийн 12-р Олимпиадад оролцох зардлыг 100% ивээн тэтгэгч нар гаргаж, цаашид тус олимпиадад тогтмол оролцох урам зориг багш, сурагчдад өглөө. Нийт хандивлагч нартаа талархал илэрхийлье.

Бодлогуудыг толилуулж байна.

### Бодлогууд

**Бодлого 1.**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  гэсэн  $n \geq 3$  ширхэг эерэг бодит тоонууд өгөгдөв.  $1 \leq i \leq n$  байх  $i$  дугаар бүрийн хувьд  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  гэж тодорхойлъя ( $a_0$ -ийг  $a_n$ -тэй тэнцүү,  $a_{n+1}$ -ийг  $a_1$  тэй тэнцүү гэе). 1-ээс  $n$  хүртлэх дугааруудаас  $i, j$  дугаар авахад  $a_i \leq a_j$  байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь  $b_i \leq b_j$  байдаг бол  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  гэж батал.

**Бодлого 2.** Хурц өнцөгт  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойрог дээр  $AD$  нь диаметр болдог  $D$  цэг авав.  $AB$  тал дээр  $K$  цэгийг,  $AC$  тал дээр  $L$  цэгийг  $DK, DL$  шулуунууд  $AKL$  гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэдэг байхаар авав.

$KL$  шулуун  $ABC$  гурвалжны ортотөвийг дайрна гэж батал.

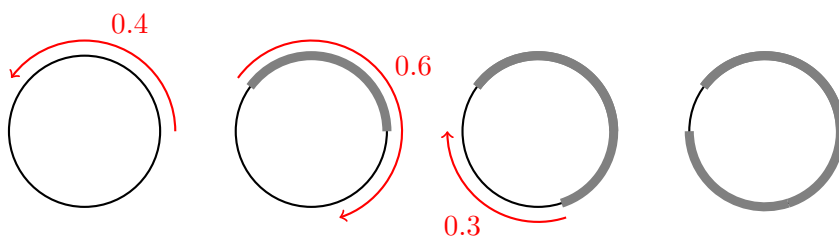
Гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг гурвалжны ортотөв гэдэг.

**Бодлого 3.**  $k$  нь эерэг бүхэл тоо байг. Цэцэгт зөвхөн  $A, B$  үсгүүд оролцсон  $k$ -үсэгтэй үгнүүдийн олонлог байсан ба уг олонлогийг  $\mathcal{D}$  гэе. Цэцэг  $k \times k$  хүснэгтийн нүднүүдэд  $A$  эсвэл  $B$  үсгийг бичих ба багана бүрийг дээрээс доош уншихад  $\mathcal{D}$  олонлогт орсон үг гардаг, мөн мөр бүрийг урдаас арагш уншихад  $\mathcal{D}$  олонлогт орсон үг гардаг байхаар бөглөхийг хүсчээ.

Хэрэв  $\mathcal{D}$  олонлог ядаж  $m$  үг агуулдаг бол  $\mathcal{D}$  олонлогт ямар үг орсноос үл хамааран Цэцэг дээрх нөхцөлийг хангадаг байхаар хүснэгтийг бөглөж чаддаг байх хамгийн бага  $m$  бүхэл тоог ол.

**Бодлого 4.** Турбо нэртэй эмгэн хумс 1 урттай тойрог дээр байв.  $c_1, c_2, c_3, \dots$  гэсэн эерэг бодит тоонуудын төгсгөлгүй дараалал өгөгджээ. Турбо тойргийн дагуу  $c_1, c_2, c_3, \dots$  урттай нумаар сунаж чадах ба явах бүрдээ цагийн зүүний дагуу, эсвэл цагийн зүүний эсрэг чиглэлд явахаа өөрөө сонгоно.

Жишээ нь  $c_1, c_2, c_3, \dots$  нь  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$  дараалал байсан бол Турбо дараах байдлаар явж болно. Үүнд:



Дараах чанартай хамгийн их  $C > 0$  тогтмолыг ол. Үүнд:  $i$  бүрийн хувьд  $c_i < C$  байдаг ямар ч  $c_1, c_2, c_3, \dots$  эерэг бодит тоонуудын дарааллын хувьд (энэ дарааллаас хамааран) Турбо тойргийн ядаж нэг цэгт огт очихгүй, дээгүүр нь гарахгүй байхаар явах чиглэлүүдээ сонгох боломжтой.

**Бодлого 5.**  $s \geq 2$  байх эерэг бүхэл тоо өгөгджээ.  $k$  эерэг бүхэл тоо бүрийн хувьд, түүний мушгилт гэж нэрлэгдэх  $k'$  тоог дараах байдлаар тодорхойлъё. Үүнд:  $k$  тоог  $as + b$ , хэлбэрт бичье. Энд  $a, b$  сөрөг биш бүхэл тоонууд ба  $b < s$  байна. Тэгвэл  $k' = bs + a$  гэе.  $n$  эерэг бүхэл тооны хувьд  $d_1 = n$  ба  $i$  эерэг бүхэл тоо бүрийн хувьд  $d_{i+1}$  нь  $d_i$  тооны мушгилт байдаг  $d_1, d_2, \dots$  дарааллыг тодорхойлъё.

Энэ дараалалд 1 гэсэн тоо орох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь  $n$  тоог  $s^2 - 1$  тоонд хуваахад гарах үлдэгдэл 1 эсвэл  $s$  гарах юм гэж батал.

**Бодлого 6.**  $ABC$  гурвалжныг багтаасан тойргийг  $\Omega$  гэе.  $B$  оройг агуулаагүй  $AC$  нумын дундаж цэгийг  $S_b$ ,  $C$  оройг агуулаагүй  $AB$  нумын дундаж цэгийг  $S_c$  гэе.  $BAC$  нумын ( $A$  оройг агуулсан  $BC$  нум) дундаж цэгийг  $N_a$  гэе.  $ABC$  гурвалжинд багтсан тойргийн төв  $I$  байв.  $AB$  шулуунг шүргэдэг ба  $\Omega$  тойрогтой  $S_b$  цэгт дотоод байдлаар шүргэлцдэг тойргийг  $\omega_b$  гэе. Мөн  $AC$  шулуунг шүргэдэг ба  $\Omega$  тойрогтой  $S_c$  цэгт дотоод байдлаар шүргэлцдэг тойргийг  $\omega_c$  гэе.  $IN_a$  шулуун болон  $\omega_b, \omega_c$  тойргуудын огтлолцолын цэгүүдийг дайрсан шулуун  $\Omega$  тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

## Цинхуагийн Их Сургууль

2022 онд Олон Улсын Математикийн Олимпиадад Монгол улсаа төлөөлж орсон манай багийн гишүүдэд Хятад улсын Цинхуагийн их сургуулийн авьяаслаг математикчдад зориулсан Кизэн сургуулиас тэтгэлэгтэй суралцах урилга ирүүлсэн ба энэ хүрээнд Б. Билэгдэмбэрэл суралцаж байна.

2023 онд Олон Улсын Математикийн Олимпиадад Монгол улсаа төлөөж оролцох багийг тус сургуулийн Бээжингийн Математикийн Ухаан ба Хэрэглээний Хүрээлэн дээр 6 дугаар сарын 18 өдрөөс 7 дугаар сарын 4 өдрийн хооронд явагдах Анхдугаар Олон Улсын Математикийн Зуны Сургалтад оролцож, дэлхийн шилдэг 25 орны сурагчидтай хамт олон улсын олимпиадын бэлтгэл хийх урилга ирсэн. Бид энэ сургалтад хамрагдахаар бэлтгэлээ ханган ажиллаж байна. Хятад талаас 10 багш, 20 туслах багш ажиллана. Хичээлээс гадна Цагаан хэрэм рүү аялах аялал зэрэг бусад үйл ажиллагаанууд зохион байгуулагдана.

## STAR Challenge

Английн Бристолын Их Сургууль дээрх Глобал Талент Лаб судалгааны төвөөс 9 болон 10 дугаар ангийн авьяаслаг сурагчдыг олон улсын олимпиадад оролцоход дэмжлэг үзүүлэх зорилгоор STAR Challenge хөтөлбөрийг энэ жил туршилтын хэлбэрээр Монгол, Малайз, Филиппин улсуудад хэрэгжүүлж байна. Манай хороо энэ хөтөлбөрт хамрагдсанаар хот/бүсийн олимпиадад E, F ангилалд амжилт гаргасан 9, 10-р ангийн 20 сурагч сургалтын материал хүлээн авч, 10 сурагч Art of Problem Solving дээр “Intermediate Counting and Probability” сургалтад хамрагдаж байна. 18 долоо хоногийн сургалтын дараа сорил авах ба сорилд амжилттай оролцсон эхний 1/3 сурагчдад 1000 USD тэтгэлэг олгох болно. Хөтөлбөрт хамрагдсанаар ирээдүйд их дээд сургуульд суралцахад дэмжлэг авах боломжтой болно.

Нийт оролцогчдодоо амжилт хүсье. Бид дараа жил улам олон сурагч хамруулахын төлөө ажиллаж байна.