

Гарчиг

Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын I Даваа	1
Бүс/дүүргийн Олимпиад	1
Бодлогууд	1
Бодолтууд	3
Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын II Даваа	11
Хот/аймгийн Олимпиад	11
Бодлогууд	11
Бодолтууд	14
Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын III Даваа	27
Улсын Олимпиад	27
Бодлогууд	31
Бодолтууд	33
Ц. Баясгалан багшийн товч намтар	47
Бүтээлийн жагсаалт	48
Олон Улсын Математикийн 63-р Олимпиад	53
Олон улсын математикийн 63-р олимпиад	53
Бодлогууд	54
Европын Охидын Математикийн 11-р Олимпиад	57
Монголын баг	57
Бодлогууд	57

Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын I Даваа

Бүс/дүүргийн Олимпиад

Цар тахлын хорио цээрийн дэглэм бүрэн цуцлагдаагүй байсан тул олимпиадын I давааг орон даяар цахим хэлбэрээр зохион байгууллаа. Сурагчдын 5 ангилалд 2573 сурагч, багшийн ангилалд 165 багш нийт 2738 оролцогч оролцов.

Олимпиадын засалтыг олимпиадын хорооны гишүүд, МУИС, МУБИС-ын оюутнууд болон багш нарын төлөөлөл оролцон онлайнаар гүйцэтгэлээ.

Бодлогууд

Дунд 1 ангилал

Бодлого Д1-1. Бүх юмны үнэ анхны тоогоор хэмжигддэг нэг улс байжээ. Энэ улсад 6 алим, 5 чавга, 5 үзэм, 3 лийр авахад 130 зоос төлнө. Харин 3 алим, 3 чавга, 5 үзэм, 6 лийр авахад мөн л 130 зоос төлдөг бол алим, чавга, үзэм, лийр тус бүр хэдэн зоосны үнэтэй вэ?

Бодлого Д1-2. Зөвхөн 0, 1-ийн цифрээр бичигддэг бөгөөд 11111100111-ээс бага хэдэн натурал тоо байх вэ?

Бодлого Д1-3. $AB = 2BC$ байх ABC гурвалжны AB тал дээр P , Q цэгүүдийг $AP : PQ : QB = 1 : 2 : 3$ байхаар авав. Мөн AC тал дээр R цэгийг $AR : RC = 1 : 2$ байхаар авав. Тэгвэл $\angle PRQ = 90^\circ$ гэж батал.

Бодлого Д1-4. Дараах нийлбэрийг ол.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2022}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{2021}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2020}\right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{2021}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2022}{1}\right)^2 + 1}$$

Дунд 2 ангилал

Бодлого Д2-1. $n \geq 5$ натурал тоо өгөгдөв. n -ээс хэтрэхгүй ялгаатай a , b , c натурал тоонуудын хувьд $a(b+1)$, $b(c+1)$ үржвэрүүд n -д хуваагддаг бол $(a+1)c$ үржвэр n -д хуваагдахгүй гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г.Баярмагнай)

Бодлого Д2-2. Зүүн дээд булан нь цагаан өнгөтэй 12×12 хэмжээтэй шатрын хөлгийн цагаан нүднүүд дээр 36 ширхэг хүүг аль ч хүү нэг нүүдлээр өөр хүү идэж чадахгүй байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

Нэг нүдэнд хамгийн олондоо нэг хүү байрлуулж болно. Хүү зурагт үзүүлснээр иднэ.



(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Д2-3. $\angle A = 90^\circ$ ба $AB = 2AC$ байх ABC гурвалжны AC тал дээр M цэг авав. A цэгээс BM шулуунд татсан перпендикулярын суурийг P , C цэгээс BM шулуунд татсан перпендикулярын суурийг Q гэе. $4PQ + 2QC = BP$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

Бодлого Д2-4. $\underbrace{99 \dots 99}_{2997}$ тоо 998001-д хуваагдахыг харуулж, ногдворын эхний дөрвөн оронг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Ахлах ангилал

Бодлого АА-1. Зүүн дээд булан нь цагаан өнгөтэй 58×58 хэмжээтэй шатрын хөлгийн цагаан нүднүүдэд 29^2 ширхэг хүүг аль ч хүү нэг нүүдлээр өөр хүү идэж чадахгүй байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

Нэг нүдэнд хамгийн олондоо нэг хүү байрлуулж болно. Хүү зурагт үзүүлснээр иднэ.



(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого АА-2. ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг $AD = 2BD$ байхаар авч болдог байв. D цэгээс AB шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг E , AC шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг F гэе. D цэгийг дайрсан BC шулуунтай перпендикуляр шулуун EF хэрчимтэй M цэгт огтлолцоно. M цэгийг дайруулан BC шулуунтай параллел шулуун татахад AB талыг K цэгт, AC талыг L цэгт огтолож байв. $DL = 2BK$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

Бодлого АА-3. 1 радиустай тойрог багтаасан тэгш өнцөгт гурвалжны талбай хамгийн багадаа хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодлого АА-4. $\underbrace{99 \dots 99}_{2997}$ тоо 998001-д хуваагдахыг харуулж, ногдворын сүүлийн дөрвөн оронг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Багш ангилал

Бодлого ДБ-1. A, B, C гурван тоо яг 550 ширхэг ерөнхий хуваагчтай, A ба B тоонууд яг 2000 ширхэг ерөнхий хуваагчтай, A ба C тоонууд яг 1440 ширхэг ерөнхий хуваагчтай байхаар A, B, C натурал тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: У.Батзориг)

Бодлого ДБ-2. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд E цэгт огтлолцоно. E цэгийг дайруулан татсан шулуун BCE гурвалжныг багтаасан тойрогтой E цэгээс ялгаатай K цэгт, CDE гурвалжныг багтаасан тойрогтой E цэгээс ялгаатай L цэгт огтлолцоно. KB, LD шулуунууд S цэгт огтлолцох бол AS, KL шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

Бодлого ДБ-3. a, b ялгаатай натурал тоонууд гэе. Хэрэв n, m натурал тоонуудын хувьд

$$(a^n - b^n)^m = (a^m - b^m)^n$$

бол $n = m$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-4. 4×4 хүснэгтийн нүд бүрд 1, 2, 3, 4 тоонуудаас сонгож байрлуулна. Аль ч мөр, аль ч баганад ижил тоо давхцаж орохгүй байхаар нийт 576 янзаар байрлуулж болно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд

Дунд 1 ангилал

Бодлого Д1-1. Бүх юмны үнэ анхны тоогоор хэмжигддэг нэг улс байжээ. Энэ улсад 6 алим, 5 чавга, 5 үзэм, 3 лийр авахад 130 зоос төлнө. Харин 3 алим, 3 чавга, 5 үзэм, 6 лийр авахад мөн л 130 зоос төлдөг бол алим, чавга, үзэм, лийр тус бүр хэдэн зоосны үнэтэй вэ?

Бодолт. **Хариу:** алим 11, чавга 3, үзэм 2, лийр 13 үнэтэй.

Алим, чавга, үзэм, лийрийн үнэ харгалзан p, q, r, s гэсэн анхны тоонууд болог. Өгсөн нөхцөлөөс

$$\begin{cases} 6p + 5q + 5r + 3s = 130 \\ 3p + 3q + 5r + 6s = 130 \end{cases}$$

системийн анхны тоон (p, q, r, s) шийдийг олох ёстой. Хасаад эмхэтгэвэл $2q = 3(s - p)$ болох ба эндээс $q = 3$ ба $s - p = 2$ болно. Буцаагаад орлуулбал $9p + 5r = 109$ болно. Эндээс p, r -ийн аль нэг нь тэгш болох ба $p = 2$ гэвэл $5r = 91$ болж зөрчил гарах тул $r = 2$ байна. Энэ үед $p = 11, s = p + 2 = 13$ анхны тоонууд тул $(p, q, r, s) = (11, 3, 2, 13)$ шийд болно. Өөр шийд байхгүй.

Бодлого Д1-2. Зөвхөн 0, 1-ийн цифрээр бичигддэг бөгөөд 11111100111-ээс бага хэдэн натурал тоо байх вэ?

Бодолт. **Хариу:** 2022. Хоёр бодолт хийе.

Тоолох бодолт Өгөгдсөн тоо 11 оронтой. Зөвхөн 0, 1-ээр бичигддэг бөгөөд 11-ээс ихгүй оронтой натурал тоо нийт $2^{11} - 1 = 2047$ ширхэг бий.

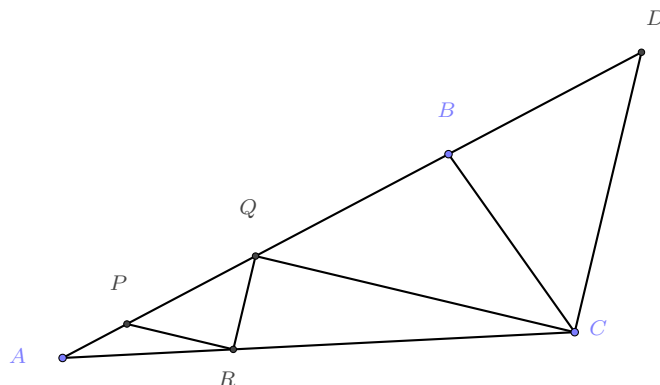
$\overline{111111abcde}$ гэсэн зургаан 1-ээр эхэлсэн тоо нийт $2^5 = 32$ байгаа. Энэ дунд өгөгдсөн тооноос бага 11111100000, 11111100001, 11111100010, 11111100011, 11111100100, 11111100101, 11111100110 гэсэн 7 тоо байгаа. Иймд 11111100111 тооноос бага $2047 - 32 + 7 = 2022$ тоо байна.

Хоёртын тооллын систем ашигласан бодолт 2-тын тооллын системд 11111100111 гэж бичигддэг тооны 10-тын бичлэгийг олъё.

$11111100111 \mapsto 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 1 = 2023$ ба 2023-аас бага натурал тоо 2022 ширхэг бий.

Бодлого Д1-3. $AB = 2BC$ байх ABC гурвалжны AB тал дээр P, Q цэгүүдийг $AP : PQ : QB = 1 : 2 : 3$ байхаар авав. Мөн AC тал дээр R цэгийг $AR : RC = 1 : 2$ байхаар авав. Тэгвэл $\angle PRQ = 90^\circ$ гэж батал.

Бодолт. AB цацраг дээр AB хэрчмийн гадна талд $BC = BD$ байх D цэг авъя. Тэгвэл $\frac{AR}{RC} = \frac{1}{3} = \frac{AQ}{QD}$ учраас $RD \parallel CD$ болно. Мөн $\frac{AP}{PQ} = \frac{AR}{RC} = \frac{1}{3}$ учраас $PR \parallel CQ$ болно. $BC = BD = QB$ гэдгээс $\angle QCD = 90^\circ$ гэж гарна. Эндээс $\angle PQR = 90^\circ$ болно.



Бодлого Д1-4. Дараах нийлбэрийг ол.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2022}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{2021}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2020}\right)^2 + 1} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{2021}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2022}{1}\right)^2 + 1}$$

Бодолт. **Хариу:** 1011.

$x \neq -1, y \neq -1, xy = 1$ бол $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{x+y+2}{xy+x+y+1} = 1$ байна. Иймд

$$\sum_{i=1}^{2022} \frac{1}{\left(\frac{i}{2023-i}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2022} \left(\frac{1}{\left(\frac{i}{2023-i}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2023-i}{i}\right)^2 + 1} \right) = \frac{2022}{2} = 1011$$

байна.

Дунд 2 ангилал

Бодлого Д2-1. $n \geq 5$ натурал тоо өгөгдөв. n -ээс хэтрэхгүй ялгаатай a, b, c натурал тоонуудын хувьд $a(b+1), b(c+1)$ үржвэрүүд n -д хуваагддаг бол $(a+1)c$ үржвэр n -д хуваагдахгүй гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г.Баярмагнай)

Бодолт. Эсрэгээс нь $(a+1)c$ үржвэр n -д хуваагддаг гэе. Тэгвэл n модулиар

$$a \equiv -ab, \quad b \equiv -bc, \quad c \equiv -ac$$

гэдгээс

$$a \equiv -ab \equiv abc, \quad b \equiv -bc \equiv abc, \quad c \equiv -ac \equiv abc$$

болно. $1 \leq a, b, c \leq n$ гэдгээс $a = b = c$ болж зөрчил гарна.

Бодлого Д2-2. Зүүн дээд булан нь цагаан өнгөтэй 12×12 хэмжээтэй шатрын хөлгийн цагаан нүднүүд дээр 36 ширхэг хүүг аль ч хүү нэг нүүдлээр өөр хүү идэж чадахгүй байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

Нэг нүдэнд хамгийн олондоо нэг хүү байрлуулж болно. Хүү зурагт үзүүлснээр иднэ.



(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

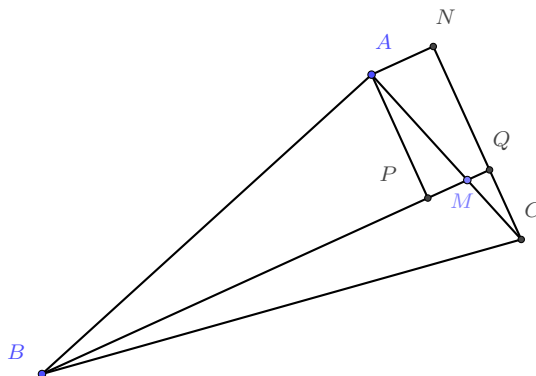
Бодолт. **Хариу:** $C_{12}^6 = 924$.

АА-1 бодолтыг харна уу..

Бодлого Д2-3. $\angle A = 90^\circ$ ба $AB = 2AC$ байх ABC гурвалжны AC тал дээр M цэг авав. A цэгээс BM шулуунд татсан перпендикулярын суурийг P , C цэгээс BM шулуунд татсан перпендикулярын суурийг Q гэе. $4PQ + 2QC = BP$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

Бодолт. CM цацрагийн үргэлжлэл дээр $\angle ANC = 90^\circ$ байх N цэг авбал $AN = PQ$ ба $CN = AP + CQ$ байна. $\angle BAC = \angle BMC = 90^\circ$ учир B, A, M, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle ABM = \angle ACM$ болох ба тэгш өнцгүүдийг тооцвол $\triangle BAP \sim \triangle CAN$ болно. Төсөөгийн харьцаа бичвэл $2 = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CN} = \frac{AP}{AN}$ гарна. Эндээс $AP = 2AN$ ба $BP = 2CN = 2AP + 2CQ = 4AN + 2CQ = 4PQ + 2CQ$ болж батлагдана.



Бодлого Д2-4. $\underbrace{99 \dots 99}_{2997}$ тоо 998001-д хуваагдахыг харуулж, ногдворын эхний дөрвөн оронг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** 1002.

Дурын натурал $n \geq 2$ тооны хувьд $K = \frac{n^{n-1} - 1}{(n-1)^2}$ бүхэл байна. Үнэхээр, $m = n - 1$ гэвэл

$$K = \frac{(1+m)^m - 1}{m^2} = 1 + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} m^{k-2}$$

бүхэл. Одоо $n = 1000$ гэвэл $K = \frac{1000^{999} - 1}{999^2} = \frac{10^{2997} - 1}{998001}$ бүхэл байна.

Цаашилбал, K тооны эхний дөрвөн орон $n + 2 = 1002$ байна. Энд

$$(n + 2)n^{n-4} \leq K < (n + 3)n^{n-4}$$

гэж батлахад хангалттай ба хуваариас чөлөөлбөл

$$n^{n-1} - (3n - 2)n^{n-4} \leq n^{n-1} - 1 < n^{n-1} + (n^2 - 5n + 3)n^{n-4}$$

тул үнэн.

Ахлах ангилал

Бодлого АА-1. Зүүн дээд булан нь цагаан өнгөтэй 58×58 хэмжээтэй шатрын хөлгийн цагаан нүднүүдэд 29^2 ширхэг хүүг аль ч хүү нэг нүүдлээр өөр хүү идэж чадахгүй байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

Нэг нүдэнд хамгийн олондоо нэг хүү байрлуулж болно. Хүү зурагт үзүүлснээр иднэ.



(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу:** C_{58}^{29} .

Зам ашигласан бодолт Бодлогыг $2n \times 2m$ шатрын хөлөг дээр бодолт хийе. Энэ үед байрлуулах хүүгийн тоо mn ба эдгээрийг аль нь ч нэг нүүдлээр нөгөөгөө идэж чадахгүй байхаар байрлуулах боломжийн тоог $f(n, m)$ гэе.

Шатрын хөлгөө mn ширхэг 2×2 жижиг квадратуудад хуваая. Тэгвэл өгсөн нөхцөл ёсоор аль ч 2×2 дотор хамгийн олондоо нэг хүү байж болно. Тэгвэл дотроо хүүтэй 2×2 квадратууд дараах бүлэгт хуваагдана.



Зүүн дээд буландаа хүүтэй квадратыг 1-р төрлийн квадрат, баруун доод буландаа хүүтэй квадратыг 2-р төрлийн квадрат гэж нэрлэе. 1-төрлийн квадратын дээр болон зүүн талд зөвхөн 1-төрлийн квадрат байж болно. Мөн адилаар 2-төрлийн квадратын доор болон баруун талд зөвхөн 2-төрлийн квадрат байж болно. Иймээс 1-төрлийн квадратууд дээрээс болон зүүн тийшээ, 2-төрлийн квадратууд доороос болон баруун тийшээ хэлбэртэй дүрс үүсгэнэ. Энэ 2 дүрсийн хүрээгээр үүсэх муруй нь $2n \times 2m$ шатрын хөлөгийн баруун дээд булан хүртлэх зам болно.

Нөгөө талаас зүүн доороос баруун дээшээ чиглэлтэй зам алхам бүр нь 2 нүднээс тогтох замууд нь 1 ба 2-р төрлийн квадратын хүрээ болж чадна. Иймээс нийт замын тоо C_{n+m}^m байдаг тул манай бодлогын хариу $f(n, m) = C_{n+m}^m$.

Рекуррент харьцаа ашигласан бодолт Бодлогыг $2n \times 2m$ шатрын хөлөг дээр бодолт хийе. Энэ үед байрлуулах хүүгийн тоо mn ба эдгээрийг аль нь ч нэг нүүдлээр нөгөөгөө идэж чадахгүй байхаар байрлуулах боломжийн тоог $f(n, m)$ гэе. $f(0, m) = 1$ Шатрын хөлгөө mn ширхэг

2×2 жижиг квадратуудад хуваая. Тэгвэл өгсөн нөхцөл ёсоор аль ч 2×2 дотор хамгийн олондоо нэг хүү байж болно. 2×2 жижиг квадратуудын цагаан нүдний аль нэгэнд л хүү байрлаж болох тул

$$f(m, n) = f(n - 1, m) + f(n, m - 1)$$

рекуррент томъёо гарна. Энэ рекуррент томъёог бодох замаар $f(m, n) = C_{m+n}^m$ гэж гаргана.

Бодлого АА-2. ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг $AD = 2BD$ байхаар авч болдог байв. D цэгээс AB шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг E , AC шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг F гэе. D цэгийг дайрсан BC шулуунтай перпендикуляр шулуун EF хэрчимтэй M цэгт огтлолцоно. M цэгийг дайруулан BC шулуунтай параллел шулуун татахад AB талыг K цэгт, AC талыг L цэгт огтолж байв. $DL = 2BK$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

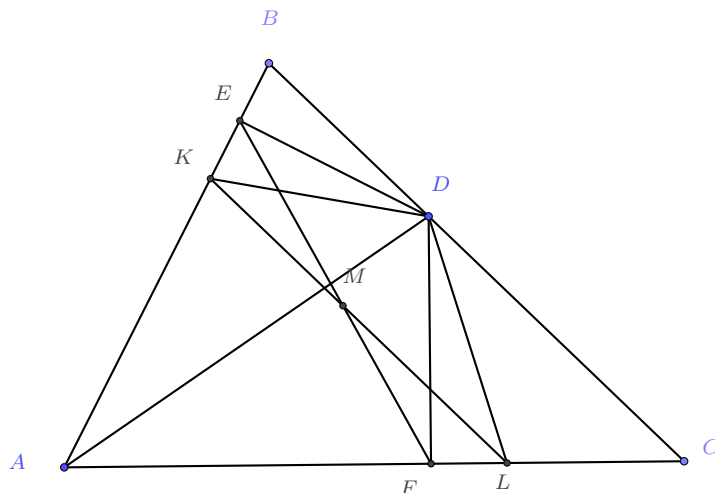
Бодолт. $\angle KED = \angle KMD = 90^\circ$ учраас K, E, D, M цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\angle LMD = \angle LFD = 90^\circ$ учраас M, D, L, F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс

$$\angle BAD = \angle EFD = \angle MFD = \angle MLD = \angle KLD$$

мөрдөж A, K, D, L цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс

$$\angle BKD = \angle ALD, \angle ADL = \angle AKL = \angle ABC$$

болж $\triangle KBD \sim \triangle LDA$ гарна. Төсөөгийн харьцаагаар $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AD} = \frac{BK}{DL}$ болж $DL = 2BK$ батлагдана.



Бодлого АА-3. 1 радиустай тойрог багтаасан тэгш өнцөгт гурвалжны талбай хамгийн багадаа хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $3 + 2\sqrt{2}$.

Гурвалжин a, b, c талуудтай ба $\angle C = 90^\circ$ гэе. Багтсан тойргийн радиус 1 гэдгээс $a \geq 2, b \geq 2$ байх ба $a = 2 + x, b = 2 + y$ гэвэл $c = 2 + x + y$ болно. Энд $c^2 = a^2 + b^2$ гэдгээс $(2 + x + y)^2 = 4 + 4(x + y) + x^2 + y^2 + 2xy = 8 + 4(x + y) + x^2 + y^2$ буюу $xy = 2$ болно. Эндээс гурвалжны талбай

$$S = 3 + x + y \geq 3 + 2\sqrt{xy} = 3 + 2\sqrt{2}$$

байна. $x = y$ буюу адил хажууд тэгш өнцөгт гурвалжин дээр тэнцэлдээ хүрнэ.

Бодлого AA-4. $\underbrace{99 \dots 99}_{2997}$ тоо 998001-д хуваагдахыг харуулж, ногдворын сүүлийн дөрвөн оронг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 7999.**

Дурын натурал $n \geq 2$ тооны хувьд $K = \frac{n^{n-1} - 1}{(n-1)^2}$ бүхэл байна. Үнэхээр, $m = n - 1$ гэвэл

$$K = \frac{(1+m)^m - 1}{m^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \binom{m}{k} m^{k-2}$$

бүхэл. Одоо $n = 1000$ гэвэл $K = \frac{1000^{999} - 1}{999^2} = \frac{10^{2997} - 1}{998001}$ бүхэл байна.

Цаашилбал, K тооны сүүлийн дөрвөн орон $(n-1)^2 - 2 \equiv 7999 \pmod{10^4}$ байна. Үнэхээр,

$$\frac{K + 2n + 1}{n^2} = \frac{n^{n-3} + 2n - 3}{(n-1)^2} = \frac{(1+m)^{m-2} - 1 + 2m}{m^2} = 1 + \sum_{k=2}^{m-2} \binom{m-2}{k} m^{k-2}$$

бүхэл тул $K \equiv -2n - 1 \equiv (n-1)^2 - 2 \pmod{n^2}$ байна.

Багш ангилал

Бодлого ДБ-1. A, B, C гурван тоо яг 550 ширхэг ерөнхий хуваагчтай, A ба B тоонууд яг 2000 ширхэг ерөнхий хуваагчтай, A ба C тоонууд яг 1440 ширхэг ерөнхий хуваагчтай байхаар A, B, C натурал тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Батзориг)

Бодолт. **Хариу: Олдохгүй.**

$A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $B = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, $C = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ байг. Тэгвэл

$$\text{ХИЕХ}(A, B, C) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k},$$

$$\text{ХИЕХ}(A, B) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k},$$

$$\text{ХИЕХ}(A, C) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_k^{c_k}$$

гэж бичигдэх ба энд $a_i = \min\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, $b_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $c_i = \min\{\alpha_i, \gamma_i\}$ ($1 \leq i \leq k$) байна. Иймд i бүрийн хувьд $c_i = a_i$ эсвэл $c_i = b_i$ байна.

Нөгөө талаас $(c_1 + 1) \dots (c_k + 1) = 550$ тул $11 \mid c_i + 1$ байх i олдоно. Энэ үед $11 \mid b_i + 1$ эсвэл $11 \mid c_i + 1$ байна. Гэвч 2000 болон 1440 тоонууд 11-д хуваагдахгүй тул бодлогын нөхцөл хангах A, B, C тоонууд олдохгүй.

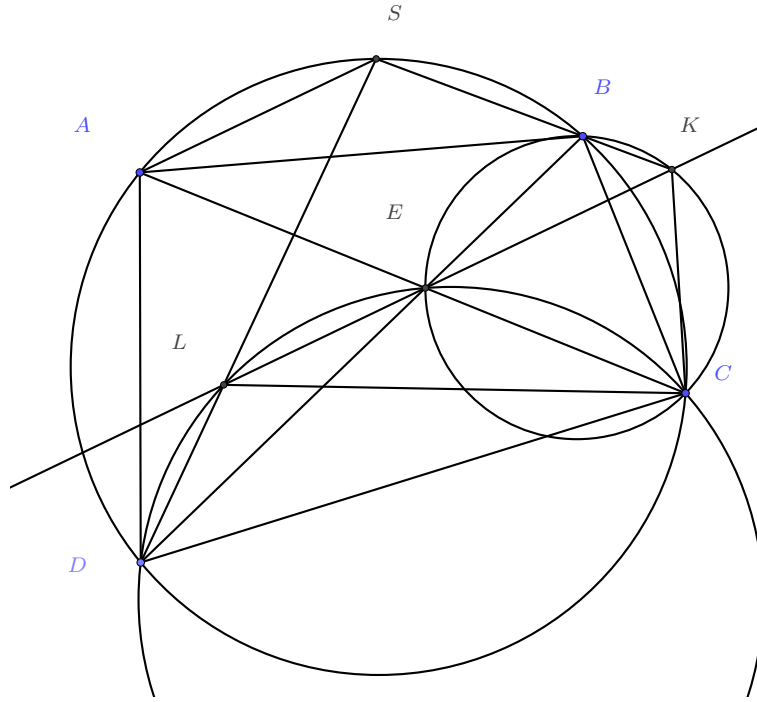
Бодлого ДБ-2. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналууд E цэгт огтлолцоно. E цэгийг дайруулан татсан шулуун BCE гурвалжныг багтаасан тойрогтой E цэгээс ялгаатай K цэгт, CDE гурвалжныг багтаасан тойрогтой E цэгээс ялгаатай L цэгт огтлолцоно. KB, LD шулуунууд S цэгт огтлолцох бол AS, KL шулуунууд параллел гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т.Хулан)

Бодолт. (E, B, K, C) болон (L, E, C, D) цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул

$$\angle KBC = \angle KEC = \angle CDL = \angle CDS$$

болно. Эндээс (S, B, C, D) цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд S цэг $ABCD$ -г багтаасан тойрог дээр оршино. Мөн $ABCD, CEBK$ багтсан дөрвөн өнцөгтүүд учраас $\angle ASB = 180^\circ - \angle ADB$ ба $\angle ADB = \angle ACB = \angle EKB = \angle LKS$ байна. Эндээс $\angle ASK = 180^\circ - \angle LKS$ болох ба $AS \parallel KL$ батлагдана.



Бодлого ДБ-3. a, b ялгаатай натурал тоонууд гэе. Хэрэв n, m натурал тоонуудын хувьд

$$(a^n - b^n)^m = (a^m - b^m)^n$$

бол $n = m$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хоёр бодолт хийе.

Тооны онол ашигласан бодолт $a > b$ гэе. Эсрэгээс нь $n > m$ гээд $d = (n, m)$ гэе. Тэгвэл $(a^n - b^n, a^m - b^m) = (a^d - b^d)$ гэдгээс

$$\left(\frac{a^n - b^n}{a^d - b^d} \right)^m = \left(\frac{a^m - b^m}{a^d - b^d} \right)^n (a^d - b^d)^{n-m}$$

болно. Эндээс $a^m - b^m = a^d - b^d$ болохыг харах төвөггүй ба энэ нь $m = d$ гэсэн үг. Үнэхээр, $\frac{m}{d} \geq 2$ бол $\frac{a^m - b^m}{a^d - b^d} > 1$ байна. Иймд $m \mid n$ ба $n > m$ тул $n = mk$, $k \geq 2$ гэж бичиж болно. Одоо

$$a^n - b^n = ((a^m - b^m) + b^m)^k - b^{mk} > (a^m - b^m)^k$$

гэдгээс $(a^n - b^n)^m > (a^m - b^m)^n$ болж зөрчил гарна. Иймд $n = m$ байна.

Анализ ашигласан бодолт $a > b > 0$ ба $n > m > 0$ бол $(a^n - b^n)^m > (a^m - b^m)^n$ гэж харуулахад хангалттай. $b = 1$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $a > 1$ байна.

$f(t) = \frac{\log t}{\log(t+1)}$ функц $t > 0$ үед өсдөг байна. Үнэхээр

$$f'(t) = \frac{(t+1)\log(t+1) - t\log t}{t(t+1)\log^2(t+1)} > 0$$

байна. Одоо $x = a^n - 1$, $y = a^m - 1$ гэвэл $x > y > 0$ гэдгээс

$$\frac{\log(a^n - 1)}{n \log a} = f(x) > f(y) = \frac{\log(a^m - 1)}{m \log a}$$

байна. Эндээс батлах зүйл мөрдөнө.

Бодлого ДБ-4. 4×4 хүснэгтийн нүд бүрд 1, 2, 3, 4 тоонуудаас сонгож байрлуулна. Аль ч мөр, аль ч баганад ижил тоо давхцаж орохгүй байхаар нийт 576 янзаар байрлуулж болно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Багануудыг $4! = 24$ янзаар сэлгэж болох ба ингэж сэлгэн 1-р мөрийг (1, 2, 3, 4) гэж үзэж болно. 2, 3, 4-р мөрийг $3! = 6$ янзаар сэлгэж болох ба ингэж сэлгэн 2-р мөрийг 2-оор, 3-р мөрийг 3-аар эхэлдэг гэж үзэж болно. Эцэст нь, 2 ба 3-р мөрийг нөхцөл хангахаар сонгоход 4-р мөр нэг утгатай тодорхойлогдох ба нөхцөл хангана. Үнэхээр, 4-р мөрөнд a тоо $k \geq 2$ удаа ордог бол 1-ээс 3-р мөрд a тоо нийт $4 - k < 3$ удаа орох болж зөрчил гарна. Одоо 2, 3-р мөрний 2, 3, 4-р багана дахь тоонуудыг сонгох боломжийг тоолъё. Энд дараах 4 боломж байна.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Иймд нийт $4! \cdot 3! \cdot 4 = 24 \cdot 6 \cdot 4 = 576$ янзаар байрлуулж болно.

Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын II Даваа

Хот/аймгийн Олимпиад

Монголын Математикийн 58-р олимпиадын II даваа 2022 оны 4-р сарын 4, 5-ны өдрүүдэд орон даяар нэгэн зэрэг зохион байгуулагдлаа. Энэ удаагийн олимпиад нь 2019 оноос хойш анх удаагаа танхимаар зохион байгуулагдсан олимпиад болов.

Бодлогууд

Дунд 1 ангилал

Бодлого Д1-1. x, y, z эерэг тоонуудын хувьд $xy + yz + zx = 3$ бол

$$(1 + 2x)(1 + y)^2 + (1 + 2y)(1 + z)^2 + (1 + 2z)(1 + x)^2 \geq 36$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Д1-2. $AB = CD$ бөгөөд $BC < AD$ байдаг $ABCD$ адил хажуут трапецийн $\angle ABC$ өнцгийн биссектрис AD талыг E цэгт огтолно. E цэгийг дайруулан $\angle CDA$ өнцгийн биссектрис-тэй параллел шулуун татахад BC шулуунтай F цэгт огтлолцов.

$\angle AFE = \angle EFB$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д1-3. $4^n - 2^n + 1 = 3^m$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Д1-4. 100-аас хэтрэхгүй 70 ялгаатай натурал тоо өгөгдөв. Эдгээр тоонуудаас $a + b + c = d + e$ байх хос хосоороо ялгаатай a, b, c, d, e тоонууд сонгон авч болно гэж батал.

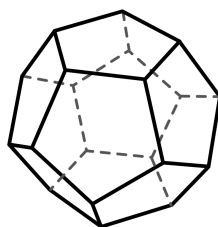
(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Дунд 2 ангилал

Бодлого Д2-1. ABC гурвалжны BC талын дундаж цэгийг E гээ. AC талын дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун D цэгт шүргэдэг, A, B цэгүүдийг дайрсан тойрог AC талтай A цэгээс ялгаатай K цэгт огтлолцоно. KC хэрчмийн дундаж цэгийг F гээ. $DE \perp EF$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д2-2. Зурагт үзүүлсэн (додекаэдр) хэлбэртэй гаригийн талс бүр нэг улс байжээ. Тухайлбал улс бүр зөв таван өнцөгт хэлбэртэй ба нийт 12 улс байна. Хил залгаа улсууд өөр өнгөтэй байхаар улсуудыг улаан, ногоон, цэнхэр, шар дөрвөн өнгөөр будахад өнгө бүр ижил тоотой орно гэж батал.



(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Д2-3. Дараах чанартай натурал k тоо олдох уу?

Ямар ч p, q анхны тоонуудын хувьд $p^{q+k} + q^{p+k}$ тоо зохиомол байна.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Д2-4. Сондгой $N \geq 3$ тооны ялгаатай n, m хуваагчдын хувьд $n > m$ бол

$$\frac{n}{m} \geq 1 + \frac{2m+4}{N}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Д2-5. ABC гурвалжин өгөгдөв. A оройгоос B оройн гадаад биссектрис рүү буулгасан перпендикулярын суурийг A_B гэе. Мөн ижлээр A оройгоос C оройн гадаад биссектрис рүү буулгасан перпендикулярын суурийг A_C гэе. B_A, B_C, C_A, C_B цэгүүдийг мөн ижлээр тодорхойлов. $A_B A_C B_A B_C C_A C_B$ зургаан өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Хантүшиг)

Бодлого Д2-6. 10×8 хэмжээтэй хөлөг дээр хүүнүүдийг аль ч 2×2 квадратад нь яг хоёр ширхэг хүү байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Ахлах ангилал

Бодлого А-1. $a \geq 0, b \geq 0$ тоонуудын хувьд $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ тэгшитгэл дөрвөн ялгаатай бодит шийдтэй бол $2a + b > 14$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого А-2. Хавтгайд бэхлэгдсэн, элдэв талт $n \geq 3$ өнцөгтийн оройнуудыг дараалсан гурван орой бүр гурван өөр өнгөөр будагдсан байхаар улаан, ногоон, цэнхэр, шар дөрвөн өнгөөр будах боломжийн тоог A_n гэе. $A_7 = A_8$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого А-3. $AB = AC$ байх адил хажуут ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэж, ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэж тэмдэглэе. BI шулуун ω тойрогтой дахин P цэгт, CI шулуун ω тойрогтой дахин Q цэгт огтлолцоно.

ω тойргийн A цэгийг агуулаагүй BC нум дээр D цэгийг $D \neq B, D \neq C$ байхаар авав. BI шулуун AD хэрчимтэй M цэгт, DQ хэрчимтэй X цэгт огтлолцдог гэе. Мөн CI шулуун AD хэрчимтэй N цэгт, DP хэрчимтэй Y цэгт огтлолцдог гэе.

BN ба CM шулуунууд XIY гурвалжныг багтаасан тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого А-4. ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг, AB тал дээр F цэгийг $\angle BFD = \angle AFE$ ба $\angle AEF = \angle CED$ байхаар авав. EF шулуун дээр M, N цэгүүдийг $EN = FD, FM = ED$ ба M, F, E, N цэгүүд энэ дарааллаар байрладаг байхаар авав. DN хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун AB шулуунтай P цэгт, DM хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун AC шулуунтай Q цэгт огтлолцдог бол $PQ \perp MN$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого А-5. Сондгой анхны тоо p өгөгдөв. Бүхэл a, b тоонуудын хувьд

$$a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \dots + a^2b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1}$$

нийлбэрийг p^2 -д хуваахад гарах үлдэгдлийн авч болох утгуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого А-6. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ тоонуудын хувьд $xy + yz + zx = 1$ бол

$$(1+x)(1+y)^2(1+z)^3$$

илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Багш ангилал

Бодлого Б-1. Шагай хаяхад морь, тэмээ, хонь, ямаа ижил магадлалтайгаар буудаг гэе. Тоглогч дөрвөн шагай хаяад юу бууснаас хамаарч дараах оноог авна.

Буулт	Оноо
Дөрвөн морь	100
Дөрвөн тэмээ	90
Гурван морь, нэг хонь	75
Гурван тэмээ, нэг ямаа	65
Нэг морь, гурван хонь	25
Нэг тэмээ, гурван ямаа	15
Дөрвөн бэрх	8
Дөрвөн хонь	4
Дөрвөн ямаа	4
Хоёр хонь, хоёр ямаа	2

Энд дөрвөн бэрх гэж морь, тэмээ, хонь, ямаа тус бүр нэг нэг буухыг хэлнэ. Дөрвөн шагайг дунджаар хэдэн удаа хаяхад оноонуудын нийлбэр 100 давах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодлого Б-2. 3, 4, 5 урттай талуудтай гурвалжны 3 урттай талын эсрэг өнцөг 36° -аас их, 38° -аас бага гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодлого Б-3. Ямар нэг натурал тооны гурван зэрэгт хэлбэртэй бичигддэг тоог *куб* тоо гэе. Ямар натурал $n \geq 3$ тооны хувьд n ширхэг куб тооны нийлбэр ахиад куб тоо болж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Б-4. 7 радиустай том улаан бөмбөг, 3 радиустай хоёр ижил ногоон бөмбөг, 2 хүрэхгүй радиустай жижиг шар бөмбөгийг тэгш шалан дээр хос хосоороо шүргэлцдэг байхаар байрлуулж болдог бол шар бөмбөгийн радиусыг ол. Энд дөрвөн бөмбөг дөрвүүлээ шалыг шүргэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Б-5. Дараах ногдвор бүхэл байх бүх натурал тоон (n, a) хосыг ол.

$$\frac{a^{n+1} + 3^{n+1} + 1}{a^n + 3^n + 1}$$

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Б-6. Дараах нөхцөлийг хангадаг сөрөг биш бүхэл тоон $(a_n)_{n \geq 0}$ ба $(b_n)_{n \geq 0}$ дарааллууд олдох уу?

$a_0 = b_0 = 0$ ба дурын $k \geq 1$ хувьд

a_k нь ямар ч $0 \leq i \leq k - 1$ ба ямар ч $j \geq 0$ хувьд $a_i + b_j$ хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн бага натурал тоо,

b_k нь ямар ч $i \geq 0$ ба ямар ч $0 \leq j \leq k - 1$ хувьд $a_i + b_j$ хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн бага натурал тоо.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд

Дунд 1 ангилал

Бодлого Д1-1. x, y, z эерэг тоонуудын хувьд $xy + yz + zx = 3$ бол

$$(1 + 2x)(1 + y)^2 + (1 + 2y)(1 + z)^2 + (1 + 2z)(1 + x)^2 \geq 36$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \geq 9$ байна. Иймд $(1 + t)^2 \geq 4t$ гэдгээс

$$(1 + 2x)(1 + y)^2 + (1 + 2y)(1 + z)^2 + (1 + 2z)(1 + x)^2 \geq 4(x + y + z) + 8(xy + yz + zx) \geq 36$$

байна. $x = y = z = 1$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

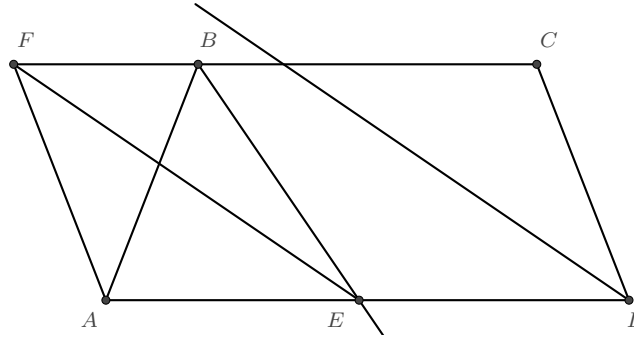
Бодлого Д1-2. $AB = CD$ бөгөөд $BC < AD$ байдаг $ABCD$ адил хажуут трапецийн $\angle ABC$ өнцгийн биссектрис AD талыг E цэгт огтолно. E цэгийг дайруулан $\angle CDA$ өнцгийн биссектрис-тэй параллел шулуун татахад BC шулуунтай F цэгт огтлолцов.

$\angle AFE = \angle EFB$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. BE биссектрис учир $\angle ABE = \angle EBC = \angle AEB$. Эндээс $AB = AE$ болно.

$\angle BAD = \angle CDA = 2\alpha$ гэвэл $\angle BFE = \alpha$. $\angle BAE = 2\alpha$ учраас A төвтэй AB радиустай тойрог дээр F цэг оршино. Иймд $AB = AE = AF$ болох ба $\angle AFE = \angle FEA = \angle BFE$ мөрдөнө.



Бодлого Д1-3. $4^n - 2^n + 1 = 3^m$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $(1, 1)$.

Дээрх хариу нөхцөл хангах тул өөр хариу байхгүй гэж харуулъя.

$m = 1$ үед $4^n - 2^n + 1 = 3$ гэдгээс $2^n(2^n - 1) = 2$ болно. Иймд $n = 1$ байна.

$m \geq 2$ үед $N = 2^n - 1$ гэвэл $N^2 = 4 \cdot 3^m - 3$ тоо 3-т хуваагдах тул N тоо 3-т хуваагдана. Энэ үед $4 \cdot 3^m - 3 = N^2$ тоо 9-д хуваагдах болж зөрчил гарна.

Бодлого Д1-4. 100-аас хэтрэхгүй 70 ялгаатай натурал тоо өгөгдөв. Эдгээр тоонуудаас $a + b + c = d + e$ байх хос хосоороо ялгаатай a, b, c, d, e тоонууд сонгон авч болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Өгөгдсөн тоонуудаа өсөх эрэмбээр $x < y < z < t_1 < t_2 < \dots < t_{67} \leq 100$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $x \leq 100 - 70 + 1 = 31$ байх тул $t_{67} + x \leq 131$ байна. Мөн $1 \leq y \leq t_1 - z + y < t_{67} - z + y \leq t_{67} \leq 100$ байна. Одоо

$$t_1 + x < t_2 + x < \dots < t_{67} + x$$

ба

$$t_1 - z + y < t_2 - z + y < \dots < t_{67} - z + y$$

тоонуудыг авч үзье. Энд 131 -ээс ихгүй нийт $67 + 67 = 134$ ширхэг натурал тоо байна. Иймд эдгээр тоонууд дотор тэнцүү хоёр тоо бий. Иймд

$$t_i + x = t_j - z + y \quad \text{буюу} \quad x + z + t_i = y + t_j$$

байх i, j олдоно. Энд $t_j = t_i + (z - y + x) > t_i$ байх тул эдгээр тоонууд хос хосоороо ялгаатай байна.

Мөн ижлээр ногоон, цэнхэр, шар улсууд тус бүр гурваас олонгүй. Нийт дөрвөн өнгө байгаа тул аль нэг өнгө хоёроос олонгүй орвол бүгд нийлээд 12 улс хүрэхгүй болно. Иймд өнгө бүр яг гурван удаа орно.

Иймд будалт оршин байгаа гэдгийг харуулах хэцүү биш.

Бодлого Д2-3. Дараах чанартай натурал k тоо олдох уу?

Ямар ч p, q анхны тоонуудын хувьд $p^{q+k} + q^{p+k}$ тоо зохиомол байна.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: Олдоно.**

$k = 6$ үед $r = p^{q+6} + q^{p+6}$ үргэлж зохиомол гэж харуулъя. $p \geq q$ гэж үзэж болно.

$p = 2, q = 2$ үед $r = 2^8 + 2^8 = 2^9$ зохиомол.

$p = 3, q = 2$ үед $r = 3^8 + 2^9 = 7073 = 11 \cdot 643$ зохиомол.

$p \geq 5, q = 2$ үед $p = 6s \pm 1$ хэлбэртэй тул $r = (6s \pm 1)^8 + (3 - 1)^{6(s+1) \pm 1}$ тоо 3-т хуваагдана. Иймд $r > 3$ зохиомол.

$p \geq 3, q \geq 3$ үед $r > 2$ тэгш тул зохиомол.

Нэмэлт. $k = 6$ нь ийм чанартай хамгийн бага натурал тоо ба $k = 8, k = 12$ жишээ болно.

Бодлого Д2-4. Сондгой $N \geq 3$ тооны ялгаатай n, m хуваагчдын хувьд $n > m$ бол

$$\frac{n}{m} \geq 1 + \frac{2m+4}{N}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. N сондгой тул n, m сондгой ба $n > m$ гэдгээс $n \geq m + 2$ байна.

Эхлээд $(n, m) = 1$ тохиолдлыг харуулъя. Энэ үед nm үржвэр N тоог хуваах тул $N \geq nm$ байна. Эндээс

$$\frac{n}{m} \geq \frac{m+2}{m} = 1 + \frac{2n}{nm} \geq 1 + \frac{2m+4}{N}$$

болж батлагдав. Одоо $d = (n, m)$ гэвэл n/d ба m/d тоонууд харилцан анхны бөгөөд N/d ногдворыг хуваах тул дээрхийг ашиглан

$$\frac{n}{m} = \frac{n/d}{m/d} \geq 1 + \frac{2m/d+4}{N/d} = 1 + \frac{2m+4d}{N} \geq 1 + \frac{2m+4}{N}$$

болно. Энд m сондгой, $n = m + 2, N = m(m + 2)$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Бодлого Д2-5. ABC гурвалжин өгөгдөв. A оройгоос B оройн гадаад биссектрис рүү буулгасан перпендикулярын суурийг A_B гээ. Мөн ижлээр A оройгоос C оройн гадаад биссектрис рүү буулгасан перпендикулярын суурийг A_C гээ. B_A, B_C, C_A, C_B цэгүүдийг мөн ижлээр тодорхойлов. $A_B A_C B_A B_C C_A C_B$ зургаан өнцөгт тойрогт багтана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Хантүшиг)

Бодолт. AB, BC, CA талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан F, D, E гэе. Тэгвэл F нь AB -ийн дөрвөн өнцөгтийг багтаасаг тойргийн төв болно. $FB_A = FA$; $\angle B_AFA = 180^\circ - 2 \cdot \angle B_AAF$ ба $\angle B_AAF = \angle CAC_A$. Мөн $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle B_AAF = \angle B_AFA$ тул $\angle BAC = \angle BFD = \angle B_AFA$. Иймд B_A, F, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Үүнтэй адилаар, B_C, F, D цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж гарна. Иймээс B_A, F, D, B_C цэгүүд бүгд нэг шулуун дээр орших боллоо. Мөн адилаар, A_B, F, E, A_C цэгүүд нэг шулуун дээр, C_B, D, E, C_A цэгүүд нэг шулуун дээр тус тус оршин байна гэж гарна. $\triangle FED$ -ийн багтсан тойргийн төв I -ийг авч үзье. FI нь $\angle EFD$ болон $\angle B_AFA_B$ -ийн биссектрисс болно. I нь B_AAB -ийн дунджид босгосон перпендикуляр дээр оршино. Адилаар, B_CB_B, C_AA_C -ийн дунджид босгосон перпендикуляр дээр оршино. I цэгээс DF -рүү буулгасан перпендикулярын суурийг E' гэе. Тэгвэл E' нь $\triangle DEF$ -ийн багтсан тойргийн DF -ийг шүргэх цэг болно. Иймд $DE' = \frac{DF+DE-FE}{2}$ ба $FE' = \frac{FD+FE-DE}{2}$ болно. Нөгөө талаас $B_AF = \frac{AB}{2} = DE$ ба $DB_C = \frac{BC}{2} = FE$ болохыг ажиглавал $DE' + DB_C = B_AF + FE'$ болно. Иймд $B_AE' = B_CE'$ болох тул $IB_A = IB_C$. Эндээс I нь $A_BB_AAC_CAB_CCB$ гурвалжны багтаасан тойргийн төв болж батлагдав.

Бодлого Д2-6. 10×8 хэмжээтэй хөлөг дээр хүүнүүдийг аль ч 2×2 квадратад нь яг хоёр ширхэг хүү байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 1278.**

$n \times m$ хөлөг аваад нүднүүдэд хүүтэй бол 1, хоосон бол 0 тавья.

Аль нэг баганад дараалсан 1 байдаг бол тэднийг агуулсан мөрөнд 0, 1 сөөлжилж орно. Мөн ижлээр аль нэг мөрөнд дараалсан 1 байдаг бол тэднийг агуулсан баганад 0, 1 сөөлжилж орно. Эндээс мөр ба баганад аль алинд нь дараалсан 1 ордог байх боломжгүй. Иймд мөр эсвэл баганад дараалсан 1 ороогүй байна.

(i) Эхлээд аль ч баганад дараалсан 1 ороогүй байрлалыг тоолъё. Энэ үед аль ч баганад дараалсан 0 байхгүй (байвал зэргэлдээ баганад дараалсан 1 орно) тул багана бүрд 0, 1 сөөлжилж орно. Эхний мөр дурын байж болох ба байрлал эхний мөрөөр нэг утгатай тодорхойлогдох тул нийт 2^m байрлал байна.

(ii) Мөн ижлээр аль ч мөрөнд дараалсан 1 ороогүй байрлал 2^n ширхэг байна.

(iii) Аль ч мөр, аль ч баганад дараалсан 1 ороогүй байрлал 2 ширхэг байна.

Оруулах-гаргах зарчмаар нийт $2^n + 2^m - 2$ байрлал байна. Иймд $n = 10, m = 8$ үед $2^{10} + 2^8 - 2 = 1278$ байрлал байна.

Ахлах ангилал

Бодлого А-1. $a \geq 0, b \geq 0$ тоонуудын хувьд $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ тэгшитгэл дөрвөн ялгаатай бодит шийдтэй бол $2a + b > 14$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ гэе. Юуны өмнө $x \leq 0$ үед $P(x) \geq 1 > 0$ байх тул $P(x)$ олон гишүүнтийн язгуурууд эерэг байна. Мөн $P(\alpha) = 0$ бол $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ байна. Эндээс $\alpha > 0, \beta > 0$ язгууруудын хувьд

$$P(x) = (x - \alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)(x - \beta)\left(x - \frac{1}{\beta}\right)$$

гэж бичигдэх тул $P(-1) = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \cdot \frac{(\beta+1)^2}{\beta} \geq 4 \cdot 4 = 16$ байна. Энд $\alpha \neq \beta$ тул тэнцэтгэл биелэхгүй, иймд $2a + b = P(-1) - 2 > 14$ байна.

Бодлого А-2. Хавтгайд бэхлэгдсэн, элдэв талт $n \geq 3$ өнцөгтийн оройнуудыг дараалсан гурван орой бүр гурван өөр өнгөөр будагдсан байхаар улаан, ногоон, цэнхэр, шар дөрвөн өнгөөр будах боломжийн тоог A_n гэе. $A_7 = A_8$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. A_n нь 1, 2, 3, 4 тоонуудын аль ч дараалсан гурав нь ялгаатай n үетэй дарааллын тоо байна.

Өнгөнүүдийг сэлгэх замаар 1, 2, 3 гэж эхэлсэн гэж үзэж болно. Ингэж эхэлсэн, дараалсан гурав нь ялгаатай, n урттай, ab гэж төгссөн дарааллын тоог $f_{ab}(n)$ гэе. Тэгвэл

$$f_{12}(n) = f_{31}(n-1) + f_{41}(n-1), \quad \dots, \quad f_{43}(n) = f_{14}(n-1) + f_{24}(n-1)$$

гэсэн 12 ширхэг рекуррент томьёо биелнэ. Эдгээрийг ашиглаж дараах хүснэгтийг байгуулъя.

$n-1$	n	3	4	5	6	7	8
$f_{31} + f_{41}$	f_{12}	0	0	1	1	0	4
$f_{21} + f_{41}$	f_{13}	0	0	0	1	1	2
$f_{21} + f_{31}$	f_{14}	0	0	1	0	1	4
$f_{32} + f_{42}$	f_{21}	0	0	0	1	1	2
$f_{12} + f_{42}$	f_{23}	1	0	0	2	2	0
$f_{12} + f_{32}$	f_{24}	0	0	0	1	1	2
$f_{23} + f_{43}$	f_{31}	0	1	0	0	3	3
$f_{13} + f_{43}$	f_{32}	0	0	0	0	2	2
$f_{13} + f_{23}$	f_{34}	0	1	0	0	3	3
$f_{24} + f_{34}$	f_{41}	0	0	1	0	1	4
$f_{14} + f_{34}$	f_{42}	0	0	1	1	0	4
$f_{14} + f_{24}$	f_{43}	0	0	0	1	1	2
Нийт		1	2	4	8	16	32

Энд 23, 24, 34, 43 гэж төгсөх дарааллуудыг нөхцөл хангах тул

$$\frac{A_7}{4!} = f_{23}(7) + f_{24}(7) + f_{34}(7) + f_{43}(7) = 7 = f_{23}(8) + f_{24}(8) + f_{34}(8) + f_{43}(8) = \frac{A_8}{4!}$$

байна.

Бодлого А-3. $AB = AC$ байх адил хажуут ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэж, ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэж тэмдэглэе. BI шулуун ω тойрогтой дахин P цэгт, CI шулуун ω тойрогтой дахин Q цэгт огтлолцоно.

ω тойргийн A цэгийг агуулаагүй BC нум дээр D цэгийг $D \neq B, D \neq C$ байхаар авав. BI шулуун AD хэрчимтэй M цэгт, DQ хэрчимтэй X цэгт огтлолцдог гэе. Мөн CI шулуун AD хэрчимтэй N цэгт, DP хэрчимтэй Y цэгт огтлолцдог гэе.

BN ба CM шулуунууд XIY гурвалжныг багтаасан тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $\angle ABC = \beta$, $BN \cap CM = R$ гэе. Тэгвэл бид $\angle IRD = \angle IYD$ гэж батлахад хангалттай.

$\angle BIN = \angle BIC = 180^\circ - \beta$. $\angle XIY = \angle BIC = 180^\circ - \angle ICB - \angle CBI = 180^\circ - \beta$. Нөгөө талаас, $\angle YDX = \angle PDA + \angle ADQ = \angle PBA + \angle ACQ = \beta$. Иймд X, I, Y, D цэгүүд нэг тойраг дээр оршино.

$\angle BIN = \angle BIC = 180^\circ - \beta$ ба $\angle NDB = \angle ADB = \angle ACB = \beta$ тул B, I, N, D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\angle BCD = \angle BPD$; $\angle ICB = \beta/2 = \angle PBA = \angle PDA = \angle PDN$. Нөгөө талаас,

$$\begin{aligned}\angle IMD &= \angle PDM + \angle MPD \\ &= \angle ICB + \angle BCD \\ &= \angle ICD\end{aligned}$$

тул I, M, C, D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймээс, $\angle MCI = \angle MDI$ ба $BIND$ багтсан дөрвөн өнцөгтөөс, $\angle NDI = \angle NBI$ тул I, R, C, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle MRI = 180^\circ - \angle IRC = \angle CBI = \beta/2$. Нөгөө талаас $\angle BRC = \angle BIC = 180^\circ - \beta$ ба $\angle CDN = \beta$ тул $DNRC$ тойрогт багтана. Иймд $\angle DNC = \angle DRC$. DNY гурвалжнаас

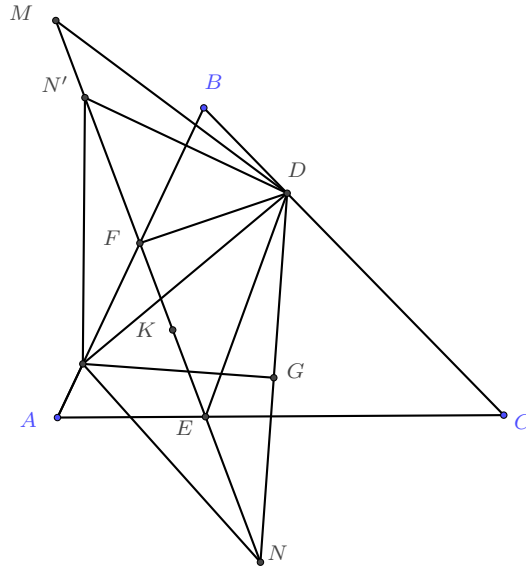
$$\begin{aligned}\angle IYD &= 180^\circ - \angle YDN - \angle DNC \\ &= 180^\circ - \beta/2 - \angle DRC \\ &= 180^\circ - \angle MRI - \angle DRC = \angle IRD\end{aligned}$$

болж батлах зүйл бүрэн батлагдав.

Бодлого А-4. ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг, AB тал дээр F цэгийг $\angle BFD = \angle AFE$ ба $\angle AEF = \angle CED$ байхаар авав. EF шулуун дээр M, N цэгүүдийг $EN = FD$, $FM = ED$ ба M, F, E, N цэгүүд энэ дарааллаар байрладаг байхаар авав. DN хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун AB шулуунтай P цэгт, DM хэрчмийн дундаж цэгт татсан перпендикуляр шулуун AC шулуунтай Q цэгт огтлолцдог бол $PQ \perp MN$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. EF хэрчмийн дундаж цэгийг K гэе. Мөн EF шулуун дээр $FD = FN'$ байх N' цэгийг зурагт үзүүлснээр авъя. $\angle DFB = \angle AFE = \angle BFN'$ учраас $ND \perp AD$ байна. Мөн $PN' = PD = PN$ байна. $N'F = EN$ учраас NN' хэрчмийн дундаж мөн K болно. Эндээс $PK \perp MN$ болно.



Бодлого А-5. Сондгой анхны тоо p өгөгдөв. Бүхэл a, b тоонуудын хувьд

$$a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \dots + a^2b^{p-3} + ab^{p-2} + b^{p-1}$$

нийлбэрийг p^2 -д хуваахад гарах үлдэгдлийн авч болох утгуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $0, 1, p, p+1, 2p+1, \dots, (p-1)p+1$.

Нийлбэрийг $S = S(a, b)$ гэж тэмдэглэе. Фермагийн бага теоремоор $a^p \equiv a \pmod{p}$ ба $b^p \equiv b \pmod{p}$ байх тул $(a-b)S = a^p - b^p \equiv a - b \pmod{p}$ байна. Эндээс $(a-b)(S-1) \equiv 0 \pmod{p}$ болно.

Эхлээд $d = a - b \equiv 0 \pmod{p}$ гэе. Энд $(b+d)^p \equiv b^p + pb^{p-1}d + \frac{p(p-1)}{2}b^{p-2}d^2 \pmod{d^3}$ гэдгээс

$$\frac{S}{p} = \frac{(b+d)^p - b^p}{pd} \equiv b^{p-1} \equiv 0, 1 \pmod{p}$$

байна. Иймд $S \equiv 0, p \pmod{p^2}$ байх ба $S(0, 0) = 0$ ба $S(1, 1) = p$ тул эдгээр утгуудыг авна.

Одоо $S \equiv 1 \pmod{p}$ гэе. Энэ үед $S \equiv 1 + kp \pmod{p^2}$ хэлбэртэй байх ба $S(1 - kp, 0) = (1 - kp)^{p-1} \equiv 1 - kp(p-1) \equiv 1 + kp \pmod{p^2}$ тул эдгээр утгуудыг авч чадна.

Бодлого А-6. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ тоонуудын хувьд $xy + yz + zx = 1$ бол

$$(1+x)(1+y)^2(1+z)^3$$

илэрхийллийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{27}{4}$.

Чебишевийн тэнцэтгэл бишээр $x \geq y \geq z \geq 0$ гэж үзэж болно. Энэ үед $3x^2 \geq xy + yz + zx = 1$ гэдгээс $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$ байна. Иймд

$$\frac{1}{2}xz + \frac{3}{2}xyz \geq \frac{1}{2}yz + \frac{1}{2}yz = yz$$

байх ба эндээс

$$x(1+y)\left(1 + \frac{3}{2}z\right) = x + xy + \frac{3}{2}xz + \frac{3}{2}xyz \geq x + xy + yz + zx = x + 1$$

болно. Мөн $(1+z)^3 \geq \left(1 + \frac{3}{2}z\right)^2$ болохыг анзаарвал

$$(1+x)(1+y)^2(1+z)^3 \geq (1+x)(1+y)^2\left(1 + \frac{3}{2}z\right)^2 \geq \frac{(1+x)^3}{x^2}$$

болно. Энд $x = 2t$ гэвэл

$$\frac{(1+x)^3}{x^2} = \frac{(1+t+t)^3}{4t^2} \geq \frac{27}{4}$$

болж тэнцэтгэл биш батлагдах ба $x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 0$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Багш ангилал

Бодлого Б-1. Шагай хаяхад морь, тэмээ, хонь, ямаа ижил магадлалтайгаар буудаг гэе. Тоглогч дөрвөн шагай хаяад юу бууснаас хамаарч дараах оноог авна.

Буулт	Оноо
Дөрвөн морь	100
Дөрвөн тэмээ	90
Гурван морь, нэг хонь	75
Гурван тэмээ, нэг ямаа	65
Нэг морь, гурван хонь	25
Нэг тэмээ, гурван ямаа	15
Дөрвөн бэрх	8
Дөрвөн хонь	4
Дөрвөн ямаа	4
Хоёр хонь, хоёр ямаа	2

Энд дөрвөн бэрх гэж морь, тэмээ, хонь, ямаа тус бүр нэг нэг буухыг хэлнэ. Дөрвөн шагайг дунджаар хэдэн удаа хаяхад оноонуудын нийлбэр 100 давах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. Нэг удаа дөрвөн шагай хаяхад дунджаар

$$\frac{1 \cdot 100 + 1 \cdot 90 + 4 \cdot 75 + 4 \cdot 65 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 15 + 4! \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{256} = \frac{561}{128}$$

оноо авна. Энд $\frac{561}{128} \cdot 22 < 100 < \frac{561}{128} \cdot 23$ тул дунджаар 23 удаа хаяхад онооны нийлбэр 100 давна.

Бодлого Б-2. 3, 4, 5 урттай талуудтай гурвалжны 3 урттай талын эсрэг өнцөг 36° -аас их, 38° -аас бага гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү.Отгонбаяр)

Бодолт. $3^2 + 4^2 = 5^2$ тул тэгш өнцөгт гурвалжин байна. Өнцгөө θ гэж тэмдэглэвэл $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$ байна. Иймд

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{3} \quad \text{ба} \quad \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{24}{7}$$

байна.

Эхлээд $\alpha = 18^\circ$ ба $u = \tan \alpha$ гэвэл $0 < u < 1$ ба $\tan 3\alpha \tan 2\alpha = 1$ гэдгээс $5u^4 - 10u^2 + 1 = 0$ байна. Эндээс $u^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ болох ба $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ тул $u < \frac{1}{3}$ байна. Иймд $\theta > 2\alpha = 36^\circ$ байна.

Одоо $\beta = 75^\circ$ ба $v = \tan \beta$ гэвэл $v > 1$ ба $\tan 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ гэдгээс $v^2 - 2\sqrt{3}v - 1 = 0$ байна. Эндээс $v = 2 + \sqrt{3}$ болох ба $\sqrt{3} > \frac{12}{7}$ тул $v > \frac{24}{7}$ байна. Иймд $\theta < \frac{\beta}{2} < 38^\circ$ байна.

Нэмэлт. $\theta \approx 36.9^\circ$ байна.

Бодлого Б-3. Ямар нэг натурал тооны гурван зэрэгт хэлбэртэй бичигддэг тоог куб тоо гээ. Ямар натурал $n \geq 3$ тооны хувьд n ширхэг куб тооны нийлбэр ахиад куб тоо болж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** Бүх $n \geq 3$.

$n = 3$ үед $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ жишээ болох ба $n = 4$ үед $7^3 = 6^3 + 5^3 + 1^3 + 1^3$ жишээ болно. Индукцээр $b^3 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 + a_n^3$ гэвэл

$$(6b)^3 = (6a_1)^3 + (6a_2)^3 + \dots + (6a_{n-1})^3 + (5a_n)^3 + (4a_n)^3 + (3a_n)^3$$

тул $n + 2$ үед шийд олдоно.

Жич: Дейвенпорт-Ландаугийн теоремоор дурын натурал N тооны хувьд $a^3 + b^3 + c^3 = Nd^3$ байх натурал a, b, c, d тоонууд олддог ба $N = n^3 - n + 3$ гэж авбал

$$a^3 + b^3 + c^3 + \underbrace{d^3 + \dots + d^3}_{n-3} = (nd)^3$$

болно.

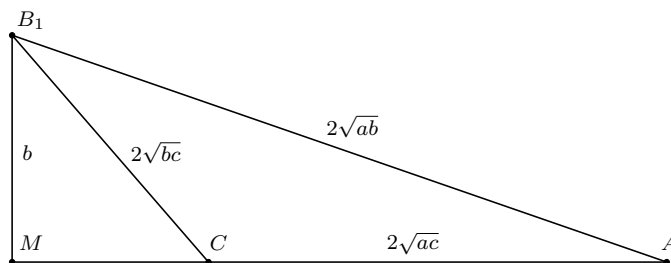
Бодлого Б-4. 7 радиустай том улаан бөмбөг, 3 радиустай хоёр ижил ногоон бөмбөг, 2 хүрэхгүй радиустай жижиг шар бөмбөгийг тэгш шалан дээр хос хосоороо шүргэлцдэг байхаар байрлуулж болдог бол шар бөмбөгийн радиусыг ол. Энд дөрвөн бөмбөг дөрвүүлээ шалыг шүргэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{21}{16}$.

Шалан дээр тавьсан x, y радиустай бөмбөгүүд хоорондоо шүргэлцдэг бол шалыг шүргэх цэгүүдийн хоорондох зай $\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = 2\sqrt{xy}$ байна.

$a = 7, b = 3$ гээд шар бөмбөгийн радиусыг c гээ. Улаан бөмбөг шалыг A цэгт, ногоон бөмбөгүүд B_1, B_2 цэгт, шар бөмбөг C цэгт шүргэдэг гээд B_1, B_2 цэгүүдийн дундаж цэгийг M гээ.



Тэгвэл $MA = MC + CA$ ба $B_1M \perp MA$ гэдгээс

$$\sqrt{4ab - b^2} = \sqrt{4bc - b^2} + 2\sqrt{ac}$$

болно. Хялбарчилбал $(a-b)^2c^2 - ab(2a+b)c + a^2b^2 = 0$ болох ба эндээс

$$c = \frac{ab}{2(a-b)^2} \left((2a+b) - \sqrt{3b(4a-b)} \right) = \frac{21}{16}$$

байна.

Бодлого Б-5. Дараах ногдвор бүхэл байх бүх натурал тоон (n, a) хосыг ол.

$$\frac{a^{n+1} + 3^{n+1} + 1}{a^n + 3^n + 1}$$

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $(n, a) = (1, 9), (1, 22)$.

Дээрх хариунууд нөхцөл хангах нь илт тул өөр хариу байхгүй гэж харуулъя.

$$n = 1 \text{ үед } \frac{a^2 + 10}{a + 4} = a - 4 + \frac{26}{a + 4} \text{ бүхэл гэдгээс } a = 9, a = 22 \text{ байна.}$$

$$n \geq 2 \text{ гээд } b = \frac{a^{n+1} + 3^{n+1} + 1}{a^n + 3^n + 1} \text{ бүхэл гээ.}$$

$1 \leq a \leq 2$ үед $2 < b < 3$ байхыг шалгах хэцүү биш. Иймд боломжгүй.

$$a \geq 3 \text{ гээ. Энэ үед } d = a - b \text{ бүхэл ба } d = \frac{3^n(a - 3) + (a - 1)}{a^n + 3^n + 1} > 0 \text{ байна.}$$

Хялбарчилбал

$$da^n = (3^n + 1)(a - 3 - d) + 2$$

болно. Энд d сондгой бол a тэгш болох ба $n \geq 2$ гэдгээс $0 \equiv 2 \pmod{4}$ болж зөрчил гарна. Иймд d тэгш байна. Эндээс $d \geq 2$ ба $a \geq 3 + d \geq 5$ болох бөгөөд $n \geq 2$ гэдгээс

$$da^n \geq 10a^{n-1} = 9a^{n-2}a + a^{n-2}a > 3^n a + a > 3^n(a - 3 - d) + (a - 1 - d)$$

болж зөрчил гарна.

Иймд өөр шийдгүй.

Бодлого Б-6. Дараах нөхцөлийг хангадаг сөрөг биш бүхэл тоон $(a_n)_{n \geq 0}$ ба $(b_n)_{n \geq 0}$ дарааллууд олдох уу?

$$a_0 = b_0 = 0 \text{ ба дурын } k \geq 1 \text{ хувьд}$$

a_k нь ямар ч $0 \leq i \leq k - 1$ ба ямар ч $j \geq 0$ хувьд $a_i + b_j$ хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн бага натурал тоо,

b_k нь ямар ч $i \geq 0$ ба ямар ч $0 \leq j \leq k - 1$ хувьд $a_i + b_j$ хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн бага натурал тоо.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** Олдоно.

Үлдэгдэл ашигласан бодолт: $k \geq 1$ хувьд $a_k = 3k - 2$ ба $b_k = 3k - 1$ гэвэл эдгээр дарааллууд бодлогын нөхцөл хангахыг шалгах хэцүү биш.

Хоёртын тоолол ашигласан бодолт: Хоёрын ялгаатай, сондгой зэрэгтүүдийн нийлбэрт бичигддэг натурал тоог *улаан*, хоёрын ялгаатай, тэгш зэрэгтүүдийн нийлбэрт бичигддэг натурал тоог *цэнхэр* гээ.

Одоо дарааллуудаа байгуулъя. Эхлээд $a_0 = b_0 = 0$ гээ. Тэгээд

$a_1, a_2, \dots$ нь улаан тоонуудыг өсөх эрэмбээр жагсаан бичсэн,
 $b_1, b_2, \dots$ нь цэнхэр тоонуудыг өсөх эрэмбээр жагсаан бичсэн

гэе. Зүүн дээд булангаас $(0, 0)$ гэж дугаарлаж эхэлсэн төгсгөлгүй хэмжээтэй хүснэгт авч (n, m) нүдэнд $a_n + b_m$ тоог бичье.

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	
a_0	0	1	4	5	16	17	20	21	64	...
a_1	2	3	6	7	18	19	22	23	66	...
a_2	8	9	12	13	24	25	28	29	72	...
a_3	10	11	14	15	26	27	30	31	74	...
a_4	32	33	36	37	48	49	52	53	96	...
a_5	34	35	38	39	50					
a_6	40	41	44	45	56					
a_7	42	43	46	47	58					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					

Дурын натурал тоог улаан ба цэнхэр тоонуудын нийлбэр хэлбэрээр нэг утгатай бичиж болох тул энэ хүснэгтэд натурал тоо бүр яг нэг удаа орох ба 0 зөвхөн зүүн дээд буланд байна.

$k \geq 1$ хувьд a_k тоо k -мөр 0-баганад байх ба a_k -аас баруун тийшээ эсвэл доошоо a_k -аас бага тоо байхгүй. Иймд a_k -аас бага тоонууд бүгд 0-ээс $k - 1$ хүртэлх мөрөнд байна. Эндээс a_k нь $i < k$ хувьд $a_i + b_j$ хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн бага тоо байна.

b_k хувьд мөн ижил.

Монголын Математикийн 58-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Олимпиад

Монголын Математикийн 58-р олимпиад (ММО-58) 2022 оны 5-р сарын 6-наас 10-ны өдрүүдэд “Улсын математикийн анхдугаар олимпиадын аварга ШУ-ны доктор, профессор Цэмбэлцогтын Баясгалангийн нэрэмжит” болон нийслэлийн физик математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 11-р дунд сургууль дээр зохион байгуулагдлаа.

Олимпиадын ивээн тэтгэгчээр Ц. Баясгалан багшийн гэр бүл, шавь нар, Космо групп, Боловсролын Ерөнхий газар, Эрдэнэс Оюу толгой компани, ММОХ ажиллалаа.

Ц. Баясгалан багш маань улсын математикийн анхдугаар олимпиадын аварга төдийгүй анхны хос аваргын нэг юм. Гэтэл түүний нэрэмжит олимпиадын дунд, ахлах ангиллуудад мөн л хос аваргууд төрсөн нь онцгой сонин тохиол байлаа. Космо группын ерөнхийлөгч ноён Б. Батбаасан Математикийн Олимпиадын Хорооны тугийг хүлээн авах үедээ Олон Улсын Математикийн 60, 61 дугаар олимпиадад амжилттай оролцож алтан медал хүртсэн сурагчдад тус бүр 10 сая төгрөгийн шагнал олгохоор амлалт өгч амлалтаа хоёр жил дараалан давуулан биелүүлсэн, мөн 2021 онд зохион байгуулагдсан Олон Улсын Математикийн 62 дугаар олимпиадад Монгол улсын баг түүхэндээ анх удаа хос алтан медал, хос мөнгөн медал, хос хүрэл медал хүртэж дэлхийн 107 орноос 11 ($1 + 1 = 2$) дүгээр байрт шалгарсан гэх мэтчилэн энэ удаагийн олимпиад ер нь л хос билэгдэлтэй маш сайхан олимпиад болж өнгөрлөө.

Тус олимпиадыг амжилттай зохион байгуулсан, тусалж дэмжсэн бүхий л байгууллага, хувь хүмүүст ММОХ-ны нэрийн өмнөөс дахин талархал илэрхийлье.

Олимпиадын мэргэжлийн хороо

ММО-58-ын мэргэжлийн үйл ажиллагааг Ү. Отгонбаяр ахлагчтай их, дээд сургуулиудын багш, оюутнууд бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах, аргачлалыг гаргаж, бодолт хамгаалах ажлуудыг үе шаттайгаар гүйцэтгэж ажиллаа.

Гишүүд:

1. Ахлагч Ү. Отгонбаяр (ММОХ, доктор),
2. Дэд ахлагч У. Батзориг (МУИС, доктор),
3. Б. Сандагдорж (МУБИС, доктор),
4. Б. Батбаясгалан (МУИС, магистр),
5. Д. Даянцолмон (МУИС, доктор).
6. Г. Баярмагнай (МУИС, доктор),
7. Б. Баяржаргал (МУИС, доктор),

8. Ш. Доржсэмбэ (МУБИС, доктор),
9. Т. Хулан (МУБИС, доктор),
10. Э. Азжаргал (МУБИС, доктор),
11. Л. Буянтогтох (МУБИС, доктор),
12. Г. Батзаяа (МУИС, доктор)

Х. Санжаахүү (МУИС), Г. Баяржавлан (МУИС), Э. Мягмарсүрэн (МУИС), Б. Хантүшиг (МУИС), Т. Цэрэнлхам (МУИС), Д. Чингүүн (МУИС), В. Маралгүн (МУИС), А. Алтансүх (МУИС), Ж. Султан (МУБИС), Б. Сүхбат (МУБИС) нарын оюутнууд бодлого засах ажилд оролцлоо.

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Дунд ангиллын даамлаар Др. Т. Хулан ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
Д1	Геометр	Т. Хулан	Ш. Доржсэмбэ, Э. Мягмарсүрэн
Д2	Тооны онол	Б. Батбаясгалан	Х. Санжаахүү, В. Маралгүн
Д3	Комбинаторик	Э. Азжаргал Ш. Доржсэмбэ Л. Буянтогтох	Л. Буянтогтох, Г. Баяржавхлан
Д4	Комбинаторик	Э. Азжаргал	Б. Сандагдорж, Р. Гончигдорж, Б. Сүхбат
Д5	Геометр	Т. Хулан	Т. Хулан, Э. Мягмарсүрэн
Д6	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	А. Алтансүх, Т. Цэрэнлхам

Ахлах ангиллын даамлаар Др. У. Батзориг ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
А1	Геометр	У. Батзориг	Э. Азжаргал, Ж. Султан
А2	Комбинаторик	А. Нямдаваа	У. Батзориг, Б. Хантүшиг
А3	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Ү. Отгонбаяр, Д. Чингүүн
А4	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Ш. Доржсэмбэ, В. Маралгүн
А5	Геометр	М. Өнөболд	У. Батзориг, Б. Хантүшиг
А6	Комбинаторик	Ү. Отгонбаяр	Ү. Отгонбаяр, Г. Баяржавхлан

Дундын багшийн даамлаар Др. Г. Баярмагнай ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
Б1	Алгебр	У. Батзориг	Б. Баяржаргал, Т. Цэрэнлхам
Б2	Комбинаторик	Б. Батбаясгалан	Б. Сандагдорж, Р. Гончигдорж, Б. Сүхбат
Б3	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Г. Баярмагнай, А. Алтансүх
Б4	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Л. Буянтогтох, Д. Чингүүн
Б5	Геометр	У. Батзориг	Б. Баяржаргал, Э. Азжаргал
Б6	Комбинаторик	М. Өнөболд	Г. Баярмагнай, Х. Санжаахүү

Олимпиадын дүн

Монголын Математикийн 58-р олимпиад уламжлал ёсоор дунд, ахлах, багшийн ангиллаар зохион байгуулагдлаа. Олимпиадад дунд ангилалд 88 сурагч, ахлах ангилалд 81 сурагч, 62 багш нийт 231 хүн оролцож оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдсанаас 29 сурагч, 4 багш медальт байрт шалгарлаа.

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 58 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН ДУНД АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Гансүх	Дөлгөөн	1-р сургууль	30
Алт	Чинбат	Ирмүүн	Эрхэт Эрдэм	30
Мөнгө	Батлхагва	Тэнүүнсайхан	Шинэ-Үе	28
Мөнгө	Мандах	Түвшинбаяр	Сант	28
Мөнгө	Сонор	Манлай	Сант	27
Мөнгө	Наранбаатар	Сувд	11	27
Хүрэл	Цэгц	Цэнгэл	Сант	25
Хүрэл	Баяртулга	Гүр-Аранз	Орхон, Эрдмийн сан	24
Хүрэл	Баттулга	Дөлгөөнмөрөн	Хөвсгөл, Дэлгэрмөрөн	23
Хүрэл	Баяр	Бэлгүтэй	11-р сургууль	22
Хүрэл	Мөнхбаяр	Амин-Эрдэнэ	Эрхэт-Эрдэм	22
Хүрэл	Соёлхүү	Атархүү	Сант	21
Хүрэл	Амаржаргал	Төгсцогт	11-р сургууль	21
Хүрэл	Самданмятав	Дэлгэрбат	Архангай, 2-р сургууль	20

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 58 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН АХЛАХ АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Бат-Амгалан	Билэгдэмбэрэл	11-р сургууль	28
Алт	Дэлгэрдалай	Энэрэлт	Сант	28
Мөнгө	Цогтгэрэл	Сайханбилэг	Сант	27
Мөнгө	Пүрэв-Очир	Билгүүнтөгөлдөр	11-р сургууль	27
Мөнгө	Очирхүү	Эрхэсболд	Сант	27
Хүрэл	Батцэнгэл	Мөнхцэлмэг	1-р сургууль	26
Хүрэл	Эрдэнэтөгс	Гэрэлхүү	Орхон, Эрдмийн сан	22
Хүрэл	Шинэзул	Билгүүдэй	Сант	21
Хүрэл	Мандал	Энхбаяр	1-р сургууль	21
Хүрэл	Ганболд	Далайцэрэн	МУИС	21
Хүрэл	Тамир	Билгүүнгэрэлт	Эрхэт Эрдэм	20
Хүрэл	Билгүүн	Дугаржанцан	Хөвсгөл, ЭДЦС	19
Хүрэл	Батбаясгалан	Ундрал	1-р сургууль	18
Хүрэл	Баасанхүү	Улсболд	Хөвсгөл, ДМЦС	18
Хүрэл	Мөнх-Эрдэнэ	Энхтөр	Хөвсгөл, ЭДЦС	18

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 58 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН БАГШИЙН АНГИЛАЛ

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Батмөнх	Ганбат	Эрдмийн Хишиг	29
Мөнгө	Банзрагч	Зоригтбаатар	Дэлгэрмөрөн	28.5
Хүрэл	Раднаабазар	Доржзовд	Эрдмийн сан	28
Хүрэл	Дамбадорж	Хосбаяр	11-р сургууль	28

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 55 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН ДУНД АНГИЛАЛ (ЗАЛРУУЛГА)

Техник алдаанаас болж зарим сурагчдын дүн 55 дугаар олимпиадын цувралд оролгүй орхигдсоныг залруулж байна.

Медаль	Овог	Нэр	Сургууль	Оноо
Алт	Батжаргал	Адьяатөмөр	1-р сургууль	35
Мөнгө	Лувсандорж	Оргилболд	Орчлон	34
Мөнгө	Болдбаатар	Хантүшиг	11-р сургууль	34
Мөнгө	Дэлгэрдалай	Энэрэлт	Сант	31
Мөнгө	Батбилэгт	Баясгалан	1-р сургууль	28
Мөнгө	Батболд	Батсамбуу	Хөвсгөл, Дэлгэрмөрөн	28
Хүрэл	Батбаяр	Билгүүн	Сант	26
Хүрэл	Очирхүү	Эрхэсболд	Сант	26
Хүрэл	Баасанхүү	Улсболд	Хөвсгөл, Дэлгэрмөрөн	22
Хүрэл	Шинэзул	Билгүүдэй	Сант	21
Хүрэл	Ялалт	Түвшинсанаа	Сант	21
Хүрэл	Бат-Амгалан	Билэгдэмбэрэл	11-р сургууль	19
Хүрэл	Отгонбаяр	Ундрал	Орчлон БСБ	19
Хүрэл	Батлхагва	Тэнүүнсайхан	Шинэ үе	17
Хүрэл	Амгалан	Далайзаяа	Орчлон БСБ	17
Хүрэл	Болдбаатар	Мөнх-Оргил	1-р сургууль	17

Олон улсын математикийн олимпиад

Олон Улсын Математикийн 63-р олимпиад 7-р сарын 6-наас 16-ны хооронд Норвег улсын Осло хотод зохион байгуулагдана. Энэ хичээлийн жилд ОУМО-д оролцох сурагчдын шалгаруулалт орон даяр ЕБС-ийн сурагчдын дунд 3 шаттайгаар явагдаж дүнгээ гаргалаа. Эцсийн шатны нийлбэр дүнгээр:

- 1. Ц. Сайханбилэг, Сант сургууль
- 2. Д. Энэрэлт, Сант сургууль
- 3. Б. Мөнхцэлмэг, Нийслэлийн 1-р сургууль
- 4. Ш. Билгүүдэй, Сант сургууль
- 5. Б. Билэгдэмбэрэл, Нийслэлийн 11-р сургууль
- 6. Г. Далайцэрэн, Хөвсгөл ЭДЦС

нар ОУМО-63-д оролцохоор шалгарлаа. Олон улсын олимпиадад эх орноо төлөөлөн оролцох сурагчдадаа өндөр амжилт хүсье.

Санхүүгийн тайлан

Олимпиадын ерөнхий ивээн тэтгэгчээр “Космо” групп ажиллаж нээлт, хаалтын ажиллагаа болон оролцогчдод зориулсан үзвэр, гарын бэлэг, медал, хүндэтгэлийн хүлээн авалт зохион байгуулах зардлыг бүрэн хариуцав. Ивээн тэтгэгчээр ММОХ, Боловсролын Ерөнхий Газар (БЕГ), Эрдэнэс Оюу Толгой ХХК нар тус тус ажиллав.

ММОХ-ны зүгээс дараах ажлуудыг хийж гүйцэтгэв.

№	Ажлын нэр	Санхүүжилт	Дүн (төг.)	Тайлбар
1	Бодлого зохиох, засах, бодлогын заавар	ММОХ	4,100,000	ММОХ-ны жилийн төсөв
2	Орон нутгаас оролцогчдын томилолт	БЕГ	11,592,000	ММОХ-оор дамжин багийн ахлагч нарт дансаар шилжүүлсэн.
3	Хоолны зардал	БЕГ, ММОХ	1,806,935	БЕГ-аас олгосон зардлаас илүү гарсныг ММОХ-оос гаргав.
4	Мөнгөн шагналын дүн	БЕГ, ивээн тэтгэгч	9,800,000	БЕГ 4 сая төгрөг.
5	Диплом, батламж	БЕГ	921,600	Медалын зардлыг ивээн тэтгэгч Космо групп тусд нь гаргасан.
Нийт			28,220,535	

Эрдэнэс Оюу Толгой ХХК 10 сая төгрөгөөр ивээн тэтгэснийг олимпиадын цуврал, эмхэтгэл хэвлүүлж оролцогчдод тараахад зарцуулав.

ММОХ-ын гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалан

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. ABC гурвалжны AC тал дээр F цэг авав. F цэгийг дайруулан AB талтай параллел шулуун татахад BC талыг D цэгт огтолно. Мөн F цэгийг дайруулан BC талтай параллел шулуун татахад AB талыг E цэгт огтолно. EDF гурвалжныг багтаасан тойрог AC талыг шүргэж байв. $AB : BC = k$ бол $AF : FC = k^2$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д2. $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+2} + \frac{a}{a+3} + \frac{a}{a+4}$ илэрхийлэл бүхэл тоо байх эерэг рационал a тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б.Батбаясгалан)

Бодлого Д3. Математикийн олимпиадад 66 сурагч оролцов. Бие биеэ таньдаг хоёр сурагчийг танил гээ.

Сурагч бүр ядаж нэг танилтай ба сурагч бүрийн хувьд түүний танилуудын танилын тооны арифметик дундаж ба өөрийнх нь танилын тоо нийлээд 11 байсан бол нэг танхимд танил хоёр сурагч ороогүй байхаар сурагчдыг хоёр танхимд хуваан суулгаж чадна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал, Ш. Доржсэмбэ, Л. Буянтогтох)

Бодлого Д4. Тойргийг нэгж урттай 21 ширхэг тэнцүү нумд хуваадаг 21 цэг тойрог дээр байрлуулав. Аль ч хоёр цэгийн хоорондох нумын урт нь 3 нэгж эсвэл 7 нэгжтэй тэнцдэггүй байхаар 7 цэгийг хэдэн янзаар сонгон авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого Д5. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $BCED$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байхаар авав. ADC гурвалжныг багтаасан тойрог BE хэрчимтэй F цэгт, ABE гурвалжныг багтаасан тойрог CD хэрчимтэй G цэгт огтлолцоно. BG, CF хэрчмүүд S цэгт огтлолцох бол $\angle FAS = \angle GAS$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д6. $-1 \leq a, b, c \leq 1$ тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ бол

$$\frac{3}{2 - abc} \leq \frac{1}{2 - a^2} + \frac{1}{2 - b^2} + \frac{1}{2 - c^2} \leq 1 + \frac{2}{2 - abc}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Ахлах ангилал

Бодлого А1. Хос хосоороо ялгаатай X, Y, Z цэгүүд ω тойрог дээр цагийн зүүний дагуу энэ дарааллаараа байрлана. ω тойрогт цагийн зүүний дагуу хоорондоо тэнцүү урттай XA, YB, ZC гурван шүргэгч татав. XY шулуун AB хэрчмийг M цэгт, YZ шулуун BC хэрчмийг N цэгт огтолдог бол MN хэрчим ABC гурвалжны дундаж шугам болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого А2. $n \geq 2$ гэе. Уран зургийн галерейн үзэсгэлэнгийн танхимд $2n$ хүн тойрог болон зогссон ба бүгд нэг нэг зураг барьсан байв. Хүн болгоны толгойд тэнд байгаа $2n$ зургийг аль дуртай гаасаа дургүй рүүгээ эрэмбэлэн жагсаасан жагсаалт бий. Зэрэгцэн зогссон хоёр хүн хоёулаа өөрийнхөө барьж байгаа зургаас илүү нөгөөгийнхөө барьсан зурагт дуртай байвал зургуудаа солилцоно. Хамгийн олондоо хэдэн удаа солилцоо хийж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодлого А3. Бүхэл коэффициенттой, гурван зэргийн олон гишүүнтийг гурван бодит язгууртай ба язгуурууд нь бүгд 0-ээс их 1-ээс бага иррационал тоо байдаг бол сайн гэе.

- Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 10-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?
- Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 13-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого А4. a, b бүхэл тоонууд ба $|a| \geq 2$ гэе. $a^1 + b, a^2 + b, \dots, a^n + b, \dots$ дараалал бүгд зохиомол тоо байх дараалсан 2022 гишүүнтэй болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого А5. Адил хажуут биш ABC гурвалжны BC тал дээр A_1 цэгийг, CA тал дээр B_1 цэгийг, AB тал дээр C_1 цэгийг $\angle B_1AC_1 = \angle B_1A_1C_1, \angle C_1BA_1 = \angle C_1B_1A_1$ болон $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$ байхаар авав. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг багтаасан тойрог BC талыг A_2 цэгт, CA талыг B_2 цэгт, AB талыг C_2 цэгт дахин огтолдог байв.

AA_2, BB_2, CC_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle BC_1A_1 = \angle A_1B_1C$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодлого А6. 30 сурагчтай ангийн сурагчид 10, 10, 10-аараа гурван эгнээ болон сууна. Сар болгоны эхний өдөр багш сурагчдын байрыг сэлгэж суулгадаг. Хамгийн багадаа хэдэн сарын дотор аль ч хоёр сурагч ядаж нэг сар нэг эгнээнд суусан байхаар сэлгэн суулгаж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Дунд ангийн багш

Бодлого Б1. $4z^2(2z^2 + 1) = 4xy - 2x - y$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Б2. Өгөгдсөн $a_1, a_2, \dots, a_n$ дарааллын гишүүд дээр дараах үйлдлүүдийг хийж болно. Аливаа $1 \leq k \leq n - 2$ дугаарын хувьд

1) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр ихэсгээд, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр багасгаж, эсвэл

2) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр багасгаад, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр ихэсгэж

болно. Анх 1, 2, ..., 2022 гэсэн дараалал өгөгдсөн бол дээрх үйлдлүүдийг давтан хийх замаар дарааллын бүх гишүүдийг тэнцүү болгож чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого Б3. Дараах чанартай хамгийн бага натурал N тоог ол.

Дурын бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $|P(x)| > \frac{1}{N}$ байх $0 \leq x \leq 1$ тоо олдоно.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Б4. $n \geq 1$ гэе. Ялгаатай $a_1, \dots, a_{2n+2}$ бүхэл тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $|i - j| \leq n$ байх i, j дугаар бүрийн хувьд $|a_i - a_j| \leq n$ байдаг бол $a_{2n+2} - a_1$ ялгавар $(2n + 1)$ -д хуваагдахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Б5. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I цэгийг дайруулан BI хэрчимд перпендикуляр байхаар татсан шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн AB ба BC бага нумуудтай харгалзан X ба Y цэгүүдэд огтлолцоно. $AI \parallel PY$ ба $CI \parallel XP$ байхаар P цэгийг сонгоё. Хэрэв XA ба YC шулуунууд Q цэгт огтлолцдог бол I, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого Б6. Дараах чанартай хамгийн бага эерэг бодит $0 < c < 1$ тоог ол.

$n \geq 3$ оройтой, гурвалжин агуулаагүй, орой бүрийн зэрэг нь cn тооноос эрс их байдаг энгийн граф бүр хоёр туйлт байна.

Тайлбар: гогцоогүй, өөрөөр хэлбэл нэг оройгоос эхлээд тэр орой дээрээ дуусдаг ирмэггүй, ямар ч хоёр оройг нэгээс олон ирмэг холбодоггүй, чиглэлгүй графыг энгийн граф гэнэ. Оройгоос гарсан ирмэгийн тоог тус оройн зэрэг гэнэ. Аль ч хоёр нь ирмэгээр холбогдсон гурван оройтой графыг гурвалжин гэнэ. Ижил өнгөтэй оройнууд ирмэгээр холбогдоогүй байхаар оройнуудыг нь хоёр өнгөөр будаж болдог графыг хоёр туйлт гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолтууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. ABC гурвалжны AC тал дээр F цэг авав. F цэгийг дайруулан AB талтай параллел шулуун татахад BC талыг D цэгт огтолно. Мөн F цэгийг дайруулан BC талтай параллел шулуун татахад AB талыг E цэгт огтолно. EDF гурвалжныг багтаасан тойрог AC талыг шүргэж байв. $AB : BC = k$ бол $AF : FC = k^2$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

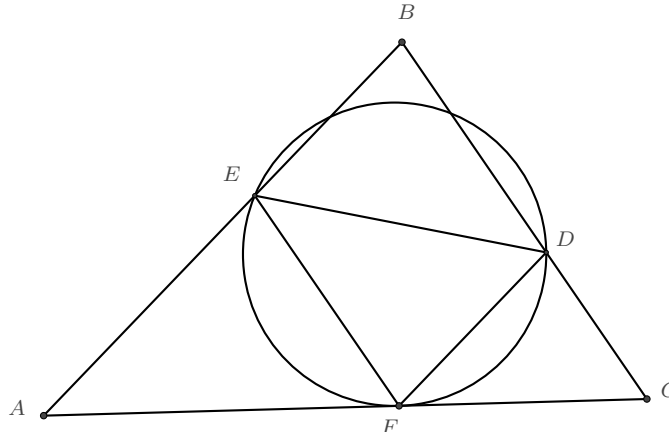
Бодолт. $\angle A = \alpha, B = \beta, C = \gamma$ гэе. $EF \parallel BC$ учир $\angle EFA = \gamma$. AC шүргэгч учир $\angle EDF = \angle EFA = \gamma$.

Үүнтэй төстэйгээр $\angle DEF = \angle DFC = \alpha$. Эндээс $\triangle EFD \sim \triangle ABC$ болно.

Мөн $\triangle AEF \sim \triangle FDC \sim \triangle ABC$. Эндээс $k = \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FD} = \frac{AE}{EF}$ гэж гарах ба $FD = EF/k$. Үүнийг $\triangle EFD \sim \triangle ABC$ төсөөгийн харьцаан дээр оруулвал

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{FD} = \frac{AE}{EF/k} = k \frac{AE}{EF} = k^2$$

болж батлагдав.



Бодлого Д2. $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+2} + \frac{a}{a+3} + \frac{a}{a+4}$ илэрхийлэл бүхэл тоо байх эерэг рационал a тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б.Батбаясгалан)

Бодолт.

ХИЕХ ашигласан бодолт: Харилцан анхны p, q натурал тоонуудын хувьд $a = \frac{p}{q}$ гээд, $A =$

$\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+2} + \frac{a}{a+3} + \frac{a}{a+4}$ тоо бүхэл гэе. Тэгвэл

$$A = \frac{p}{p+q} + \frac{p}{p+2q} + \frac{p}{p+3q} + \frac{p}{p+4q} = \frac{2p(2p+5q)(p^2+5pq+5q^2)}{(p+q)(p+2q)(p+3q)(p+4q)}$$

байна. $(a, b) = (a-b, b)$ ба $(a, k) = 1$ бол $(a, bk) = (a, b)$ чанаруудыг ашиглая. $(p, q) = 1$ тул

$$(p^2 + 5pq + 4q^2, q) = (p^2 + 5pq + 5q^2, q) = 1$$

байна. Иймд

$$\begin{aligned} ((p+q)(p+4q), p^2 + 5pq + 5q^2) &= (p^2 + 5pq + 4q^2, p^2 + 5pq + 5q^2) \\ &= (p^2 + 5pq + 4q^2, q^2) = 1 \end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned} ((p+2q)(p+3q), p^2 + 5pq + 5q^2) &= (p^2 + 5pq + 6q^2, p^2 + 5pq + 5q^2) \\ &= (q^2, p^2 + 5pq + 5q^2) = 1 \end{aligned}$$

болно. Хэрвээ $(a, k) = 1$ ба $b \mid ak$ бол $b \mid a$ байдаг чанарыг ашиглавал

$$\frac{2p(2p+5q)}{(p+q)(p+2q)(p+3q)(p+4q)} = \frac{A}{(p^2+5pq+5q^2)}$$

тоо натурал болно. Гэтэл $A < 4$ ба $p^2 + 5pq + 5q^2 > 4$ тул энэ нь боломжгүй юм.

Олон гишүүнт ашигласан бодолт: $A = 1, 2, 3$ хувьд

$$\begin{aligned} f_A(x) &= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+3} + \frac{x}{x+4} - A \right) \\ &= (4-A)x^4 + 30(3-A)x^3 + 35(2-A)x^2 + 50(1-A)x - 24A \end{aligned}$$

ГЭВЭЛ

$$f_1(x) = 3x^4 + 60x^3 + 35x^2 - 24$$

$$f_2(x) = 2(x^4 + 15x^3 - 25x - 24)$$

$$f_3(x) = x^4 - 35x^2 - 100x - 72$$

байна. Рационал язгуурын лемм ашиглан эдгээр олон гишүүнтүүд рационал язгуургүй болохыг шалгах хэцүү биш.

Бодлого Д3. Математикийн олимпиадад 66 сурагч оролцов. Бие биеэ таньдаг хоёр сурагчийг танил гье.

Сурагч бүр ядаж нэг танилтай ба сурагч бүрийн хувьд түүний танилуудын танилын тооны арифметик дундаж ба өөрийнх нь танилын тоо нийлээд 11 байсан бол нэг танхимд танил хоёр сурагч ороогүй байхаар сурагчдыг хоёр танхимд хуваан суулгаж чадна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал, Ш. Доржсэмбэ, Л. Буянтогтох)

Бодолт. X сурагчийн танилын тоог d_X , түүний танилуудын танилын тооны дунджийг m_X гэж тэмдэглэе.

Одоо хамгийн цөөн танилтай A гэдэг, хамгийн олон танилтай B гэдэг сурагч сонгоё (одоогоор ялгаатай гэж мэдэхгүй). Тэгвэл $d_A \leq m_B$ ба $m_A \leq d_B$ байх нь илт ба $d_A + m_A = d_B + m_B = 11$ гэдгээс $d_A = m_B$ ба $m_A = d_B$ байна. Эндээс $d_A + d_B = 11$ болох тул $d_A < d_B$ байна. Тухайлбал $A \neq B$ байна.

A -тай танил C гэдэг сурагч авъя. Хэрэв $d_C < d_B$ бол $m_A < d_B$ болж зөрчил үүсэх тул $d_C = d_B$ байна. Өөрөөр хэлбэл A -тай танил сурагчид бүгд d_B танилтай. Мөн ижлээр B -тэй танил сурагчид бүгд d_A танилтай.

Иймд d_A танилтай сурагчдыг I танхимд, d_B танилтай сурагчдыг II танхимд оруулбал нэг танхимд хоорондоо танил хоёр сурагч орохгүй.

Үлдсэн сурагчид дотор танхимд орсон сурагчдыг таних сурагч байхгүй тул үүнийг давтан хийсээр бүх сурагчдыг хоёр танхимд хувааж чадна.

Бодлого Д4. Тойргийг нэгж урттай 21 ширхэг тэнцүү нумд хуваадаг 21 цэг тойрог дээр байрлуулав. Аль ч хоёр цэгийн хоорондох нумын урт нь 3 нэгж эсвэл 7 нэгжтэй тэнцдэггүй байхаар 7 цэгийг хэдэн янзаар сонгон авч болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. **Хариу: 126.**

Тойрог дээр орших цэгүүдийг цагийн зүүний дагуу $1, 2, 3, \dots, 21$ гэж дугаарлан,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 8, & a_3 &= 15 \\ b_1 &= 4, & b_2 &= 11, & b_3 &= 18 \\ c_1 &= 7, & c_2 &= 14, & c_3 &= 21 \\ d_1 &= 10, & d_2 &= 17, & d_3 &= 3 \\ e_1 &= 13, & e_2 &= 20, & e_3 &= 6 \\ f_1 &= 16, & f_2 &= 2, & f_3 &= 9 \\ g_1 &= 19, & g_2 &= 5, & g_3 &= 12 \end{aligned}$$

гэж тэмдэглэе. Тэгвэл бид 7 цэгтээ a_i -үүдээс зөвхөн нэгийг нь авч болно. Гэх мэтчилэн $a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_n, g_t$ нараас нэг нэгийг сонгоно гэсэн үг. 3 нэгжийн зөрөөтэй цэгүүд байлгахгүйн тулд

$$i \neq j, j \neq k, k \neq l, l \neq m, m \neq n, n \neq t, t \neq i$$

байна. Энд $a_i, b_j, c_k, d_l, e_m, f_n, g_t$ -г сонгох нийт боломжийн тоо 3^7 . Одоо ядаж нэг зэрэгцээ индекс ижил байдаг тохиолдлын тоог нэгтгэн зайлуулах зарчимаар тоолъё.

A_1 олонлогт $i = j$ байдаг бүх боломжуудыг оруулъя.

A_2 олонлогт $j = k$ байдаг бүх боломжуудыг оруулъя.

$\vdots$

A_7 олонлогт $t = i$ байдаг бүх боломжуудыг оруулъя.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_7| &= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \dots - |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7| \\ \sum |A_i| &= C_7^1 \cdot 3^6 \\ \sum |A_i \cap A_j| &= C_7^2 \cdot 3^5 \\ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| &= C_7^3 \cdot 3^4 \\ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| &= C_7^4 \cdot 3^3 \\ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| &= C_7^5 \cdot 3^2 \\ \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n| &= C_7^6 \cdot 3 \\ |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7| &= 3 \end{aligned}$$

тул

$$3^7 - C_7^1 \cdot 3^6 + C_7^2 \cdot 3^5 - C_7^3 \cdot 3^4 + C_7^4 \cdot 3^3 - C_7^5 \cdot 3^2 + C_7^6 \cdot 3 - 3 = (3 - 1)^7 - 2 = 126$$

байна.

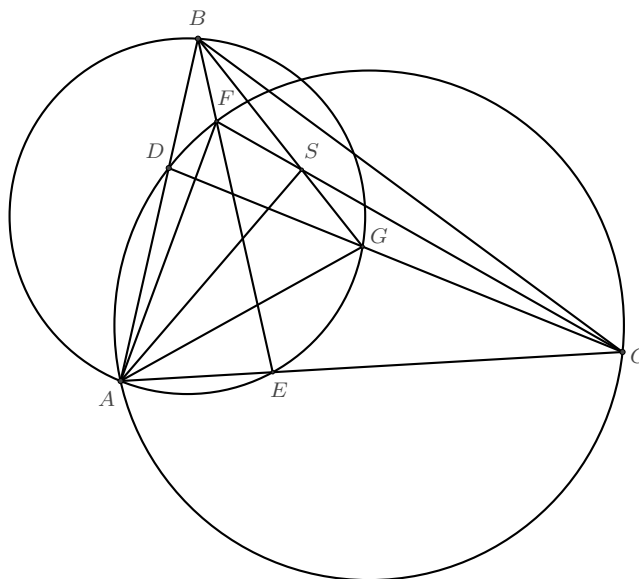
Бодлого Д5. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $BCED$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтаж байхаар авав. ADC гурвалжныг багтаасан тойрог BE хэрчимтэй F цэгт, ABE гурвалжныг багтаасан тойрог CD хэрчимтэй G цэгт огтлолцоно. BG, CF хэрчмүүд S цэгт огтлолцох бол $\angle FAS = \angle GAS$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. $ADFC, DBCE, AEGB$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс

$$\angle ADC = \angle AFC = \angle ADB = \angle AEB = \angle AGB.$$

$\angle AEF = \angle AFC$ гэдгээс $\triangle AEF \sim \triangle ACF$ болох тул $AF^2 = AE \cdot AC$. Үүнтэй төстэйгээр $AG^2 = AD \cdot AB$. Эндээс $DBCE$ тойрогт багтана гэдгээс $AF = AG$ болно. $AF = AG$, AS ерөнхий $\angle AFS = \angle AGS$ гэдгээс $\triangle AFS = \triangle AGS$ болж $\angle FAS = \angle GAS$ гарна.



Бодлого Д6. $-1 \leq a, b, c \leq 1$ тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ бол

$$\frac{3}{2-abc} \leq \frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \leq 1 + \frac{2}{2-abc}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Эхлээд $\frac{3}{2-abc} \leq \frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2}$ гэж баталъя. Арифметик-гармоник дунжийн теоремоос

$$\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \geq \frac{9}{6-(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{5-2abc}$$

болно. Цаашилбал $\frac{9}{5-2abc} \geq \frac{3}{2-abc}$ болох нь $abc \leq 1$ гэдгээс мөрдөнө. Тэнцэтгэл $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ үед биелнэ.

Одоо $\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \leq 1 + \frac{2}{2-abc}$ гэж баталъя. Энд $abc = x$ ба $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = y$ гэж тэмдэглээд ижил хуваарь өгч $a^2 + b^2 + c^2 = 2x + 1$ болохыг ашиглан эмхтгэвэл

$$(4-x)(4-8x+2y-x^2) \geq (2-x)(8-8x+y)$$

болох ба хялбарчилбал

$$x(x^2 - 4x - 12) + (6-x)y = (6-x)(y - 2x - x^2) \geq 0$$

болно. Энэ нь $6-x \geq 5 > 0$ ба

$$y - 2x - x^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc - a^2b^2c^2 = (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \geq 0$$

гэдгээс мөрдөнө. Тэнцэтгэл $-1 \leq t \leq 1$ хувьд $(a, b, c) = (1, t, t), (-1, t, -t)$ болон эдний сэлгэмэл үед биелнэ.

Ахлах ангилал

Бодлого А1. Хос хосоороо ялгаатай X, Y, Z цэгүүд ω тойрог дээр цагийн зүүний дагуу энэ дарааллаараа байрлана. ω тойрогт цагийн зүүний дагуу хоорондоо тэнцүү урттай XA, YB, ZC гурван шүргэгч татав. XY шулуун AB хэрчмийг M цэгт, YZ шулуун BC хэрчмийг N цэгт огтолдог бол MN хэрчим ABC гурвалжны дундаж шугам болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Эхлээд $AM = MB$ болохыг баталъя. Үүний тулд BY шүргэгчийг Y цэгээс цааш үргэлжлүүлэн татаж түүн дээр $BY = YT$ байх T цэгийг сонгоё. Өгсөн нөхцөл ёсоор, $XA = YB$ ба TA, TY шүргэгчүүд тулд $TA \parallel XY$ болно. Y цэг TB хэрчмийн дундаж тул YM хэрчим TAB гурвалжны дундаж шугам болно. Иймд $AM = MB$ болох нь батлагдав. Үүнтэй адилаар $BN = NC$ болох нь батлагдана. Иймд MN хэрчим ABC гурвалжны дундаж шугам болох нь батлагдав.

Бодлого А2. $n \geq 2$ гэе. Уран зургийн галерейн үзэсгэлэнгийн танхимд $2n$ хүн тойрог болон зогссон ба бүгд нэг нэг зураг барьсан байв. Хүн болгоны толгойд тэнд байгаа $2n$ зургийг аль дуртай гаасаа дургүй рүүгээ эрэмбэлэн жагсаасан жагсаалт бий. Зэрэгцэн зогссон хоёр хүн хоёулаа өөрийнхөө барьж байгаа зургаас илүү нөгөөгийнхөө барьсан зурагт дуртай байвал зургуудаа солилцоно. Хамгийн олондоо хэдэн удаа солилцоо хийж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Нямдаваа)

Бодолт. **Хариу:** $2n^2 - n$.

Хүн болгонд барьсан зураг нь түүний толгойд байгаа жагсаалтад хэдэд жагсаж байгааг харгалзуулаад нийлбэрийг нь S гэе. Тэгвэл S хамгийн ихдээ $2n \cdot 2n = 4n^2$, хамгийн багадаа $2n \cdot 1 = 2n$ байна. Солилцоо бүрд S хамгийн багадаа 2-оор буурна. Иймд хамгийн ихдээ $n(2n - 1)$ солилцоо байж болно.

Одоо $n(2n - 1)$ солилцоо хийж болно гэж харуулъя. Зурагнуудаа цагийн зүүний дагуу 1, 2, ..., $2n$ гэж дугаарлая. Одоо сондгой дугаартай зургууд цагийн зүүний дагуу, тэгш дугаартай зургууд цагийн зүүний эсрэг тойрохоор солилцоо хийе. n солилцоогоор бүх сондгой дугаартай зургууд цагийн зүүний дагуу нэг, бүх тэгш дугаартай зургууд цагийн зүүний эсрэг нэг гүйсэн байрлалд хүргэж чадна. Үүнийг $2n$ удаа давтал бүх зураг байрандаа ирнэ. Иймд $2n - 1$ удаа давтан $n(2n - 1)$ солилцоо хийж чадна. Эндээс хүн болгоны зургийн эрэмбэ тодорхойлогдоно.

Бодлого А3. Бүхэл коэффициенттой, гурван зэргийн олон гишүүнтийг гурван бодит язгууртай ба язгуурууд нь бүгд 0-ээс их 1-ээс бага иррационал тоо байдаг бол сайн гэе.

а) Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 10-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?

б) Ахлах гишүүнийх нь коэффициент 13-тай тэнцүү байдаг сайн олон гишүүнт олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** а) Олдохгүй, б) Олдоно.

а) a, b, c ба $d > 0$ бүхэл тоонуудын хувьд

$$F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = d(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

ба $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ гэе. Тэгвэл нөхцөлөөс

$$F(0) = a = -d\alpha\beta\gamma$$

$$F(1) = a + b + c + d = d(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

$$8F\left(\frac{1}{2}\right) = 8a + 4b + 2c + d = -d(2\alpha - 1)(2\beta - 1)(2\gamma - 1)$$

бүхэл, тэгээс ялгаатай байна. Иймд $Q(x) = x(1-x)(2x-1)$ гэвэл

$$d^3 Q(\alpha)Q(\beta)Q(\gamma) = 8F(0)F\left(\frac{1}{2}\right)F(1) \neq 0$$

бүхэл ба дурын $0 \leq x \leq 1$ хувьд $|Q(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$ байх тул $d \geq 6\sqrt{3} > 10$ байна. Иймд сайн олон гишүүнтийн ахлах гишүүний коэффициент 10 байх боломжгүй.

б) a, b, c бүхэл тоонуудын хувьд $F(x) = 13x^3 - ax^2 + bx - c$ гэе. Эхлээд $F(0) = -1, F(1) = 1$ байна гэвэл $c = 1, a = 11 + b$ болно. Одоо $F\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ ба $F\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ гэвэл $\frac{47}{6} < b < \frac{55}{6}$ болох ба энэ үед $F(x)$ сайн байх нь илт.

Иймд $b = 8$ үед $F(x) = 13x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ ба $b = 9$ үед $F(x) = 13x^3 - 20x^2 + 9x - 1$ олон гишүүнтүүд сайн байна.

Нэмэлт. (i) $1 \leq |F(0)F(1)| = d^2\alpha\beta\gamma(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \leq \frac{d^2}{4^3}$ гэдгээс $d \geq 8$ байна.

(ii) $d = 13$ боломжит хамгийн бага утга (хүнд!) ба энэ үед дээрх хоёр олон гишүүнтээс өөр жишээ байхгүй.

Бодлого А4. a, b бүхэл тоонууд ба $|a| \geq 2$ гэе. $a^1 + b, a^2 + b, \dots, a^n + b, \dots$ дараалал бүгд зохиомол тоо байх дараалсан 2022 гишүүнтэй болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. a, b харилцан анхны биш үед илэрхий тул a, b харилцан анхны гэе.

$n \geq 1$ хувьд $a_n = a^n + b$ гэе. Эхлээд $l \geq 1$ тоог $2^{l-1} > |b|$ байхаар сонговол дурын $n \geq l$ хувьд $|a_n| < |a_{n+1}|$ байна. Үнэхээр, $|a| \geq 2$ гэдгээс $|a_n| < |a|^n + 2^{l-1} \leq 2|a|^n - 2^{l-1} < |a_{n+1}|$ байна. Тухайлбал $m = l + 2$ гэвэл дурын $n \geq m$ хувьд $|a_n| \geq 2$ байна.

Одоо $N = 2022$ гэе. $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+N}$ дарааллын гишүүн бүр ядаж нэг анхны хуваагчтай тул гишүүн бүрийн хувьд нэг анхны хуваагч сонгож $p_1, p_2, \dots, p_N$ гэж тэмдэглэе. $k = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_N - 1)$ гэвэл $k \geq 1$ байна.

$1 \leq i \leq N$ гэе. a, b харилцан анхны гэдгээс a тоо p_i -тай харилцан анхны ба Фермагийн бага теоремоос

$$a_{m+k+i} = a^{m+i}(a^k - 1) + a_{m+i}$$

гишүүн p_i -д хуваагдана. Цаашилбал $|a_{m+k+i}| > |a_{m+i}|$ гэдгээс a_{m+k+i} зохиомол байна. Иймд $a_{m+k+1}, a_{m+k+2}, \dots, a_{m+k+N}$ тоонууд бүгд зохиомол.

Бодлого А5. Адил хажуут биш ABC гурвалжны BC тал дээр A_1 цэгийг, CA тал дээр B_1 цэгийг, AB тал дээр C_1 цэгийг $\angle B_1AC_1 = \angle B_1A_1C_1, \angle C_1BA_1 = \angle C_1B_1A_1$ болон $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$ байхаар авав. $A_1B_1C_1$ гурвалжныг багтаасан тойрог BC талыг A_2 цэгт, CA талыг B_2 цэгт, AB талыг C_2 цэгт дахин огтлодог байв.

AA_2, BB_2, CC_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\angle BC_1A_1 = \angle A_1B_1C$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолт. Дараах хоёр өгүүлбэрээс бодлого мөрдөн гарна.

Лемм. AA_2, BB_2, CC_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл AA_1, BB_1, CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох юм.

Баталгаа. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ болон $\angle ACB = \gamma$ гэе. Тэгвэл өнцөг хөөх замаар $\angle C_1B_2A = \angle C_1A_1B_1 = \alpha$ гэж гарах бөгөөд $\angle C_1AB_2 = \alpha$ тул $C_1A = C_1B_2$ болно. Мөн эндээс $AB_2 = 2C_1A \cos \alpha$ гэж гарна. Адилхнаар $CB_2 = 2CA_1 \cos \gamma$ тул

$$\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{C_1A}{A_1C} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$$

Адилхнаар $\frac{CA_2}{BA_2}$ болон $\frac{BC_2}{AC_2}$ олоод үржүүлбэл

$$\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} = \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1}$$

Иймд Чевийн теоремоор AA_2 , BB_2 , CC_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гэж гарна. $\square$

Лемм. AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл $\angle BC_1A_1 = \angle A_1B_1C$ юм.

Баталгаа. Эхлээд AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцдог гэж үзье, уг огтлолцлын цэг нь K байг.

T цэг нь A цэгийг A_1 цэгт буулгадаг, B цэгийг B_1 цэгт буулгадаг ϕ спирал төсөөгийн төв цэг байг, тэгвэл $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ гэдгээс ϕ буулгалт C цэгийг мөн C_1 цэг рүү буулгана гэж гарна. T цэг AB хэрчмийг A_1B_1 хэрчимд буулгана гэдгээс $T \in (ABK)$ ба $T \in (A_1B_1K)$ болно, учир нь $AA_1 \cap BB_1 = K$ бөгөөд уг тойргуудын огтлолцол дээр спирал төсөөгийн цэг оршдог билээ. Адилхнаар $T \in (BCK)$ ба $T \in (CAK)$ болно, тэгэхээр заавал $T = K$ байхад хүрч байна. Тэгэхээр K цэг AA_1 , BB_1 , CC_1 хэрчмүүд дээр оршино гэдгээс ϕ гомотет гэж гарах бөгөөд иймд $\frac{AK}{KA_1} = \frac{BK}{KB_1} = \frac{CK}{KC_1}$ болно. Тэгэхээр $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ ба $CA \parallel C_1A_1$ болох тул $\angle BC_1A_1 = \angle BAC = \angle A_1B_1C$.

Одоо $\angle BC_1A_1 = \angle A_1B_1C$ гэж үзье. Тэгвэл $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$ гэдгийг ашиглавал $\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1A_1 - \angle A_1C_1B_1 = 180^\circ - \angle A_1B_1C - \angle A_1CB_1 = \angle B_1A_1C$ гэж гарна, адилхнаар $\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A$. Эндээс синусийн теоремоор

$$\begin{aligned} \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} &= \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB_1} \\ &= \frac{\sin \angle AC_1B_1}{\sin \angle AB_1C_1} \cdot \frac{\sin \angle BA_1C_1}{\sin \angle BC_1A_1} \cdot \frac{\sin \angle CB_1A_1}{\sin \angle CA_1B_1} \\ &= \frac{\sin \angle AC_1B_1}{\sin \angle B_1A_1C} \cdot \frac{\sin \angle BA_1C_1}{\sin \angle C_1B_1A} \cdot \frac{\sin \angle CB_1A_1}{\sin \angle A_1C_1B} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Иймд Чевийн теоремоор AA_1 , BB_1 , CC_1 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж гарна. $\square$

Бодлого А6. 30 сурагчтай ангийн сурагчид 10, 10, 10-аараа гурван эгнээ болон сууна. Сар болгоны эхний өдөр багш сурагчдын байрыг сэлгэж суулгадаг. Хамгийн багадаа хэдэн сарын дотор аль ч хоёр сурагч ядаж нэг сар нэг эгнээнд суусан байхаар сэлгэн суулгаж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу: 5.**

Ядаж нэг сар нэг эгнээнд суусан хоёр сурагчийг найз гэе. Эхлээд дөрвөн сарын дотор бүх сурагчид найз болсон байхаар сэлгэн суулгаж чадахгүй гэж харуулъя.

Үүний тулд $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ бүхэл тоонуудын хувьд $x + y + z = 10$ бол

$$f(x, y, z) = \binom{x}{2} + \binom{y}{2} + \binom{z}{2} \geq 12$$

болохыг анзааръя. Үнэхээр, арифметик-квадратлаг дунджийн тэнцэтгэл бишээр

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x + y + z) \geq \frac{1}{6}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x + y + z) = 11 + \frac{2}{3}$$

байх ба $f(x, y, z)$ бүхэл тул $f(x, y, z) \geq 12$ байна.

Нийт сурагчдын олонлогоо S гэвэл $|S| = 30$ байна. Эхний сард X, Y, Z гэж суулгасан гэе. Энд $X, Y, Z \subseteq S$ ба $|X| = |Y| = |Z| = 10$ байна. Дараагийн гурван сард

$$T_1, T_2, T_3 \quad T_4, T_5, T_6 \quad T_7, T_8, T_9$$

гэж суулгасан гэе. Дурын $T \subseteq S$ эгнээний хувьд $X \cap T, Y \cap T, Z \cap T$ олонлогууд шинэ найз үүсгэхгүй. Иймд T эгнээг авч үзэхэд хамгийн ихдээ

$$\binom{|T|}{2} - \binom{|X \cap T|}{2} - \binom{|Y \cap T|}{2} - \binom{|Z \cap T|}{2} \leq 45 - 12 = 33$$

шинэ найз үүснэ. Энд $|T| = 10$ ба $\binom{10}{2} = 45$ болохыг ашиглав. Иймд дөрвөн сарын дараа хамгийн олондоо $3 \cdot 45 + 9 \cdot 33 = 432$ найз үүснэ. Гэтэл нийт $\binom{30}{2} = 435$ хос байгаа. Иймд дөрвөн сарын дотор бүх сурагч найз болох боломжгүй.

Одоо таван сар хангалттай гэж харуулъя. Сурагчдаа тус бүр таван сурагчтай A, B, C, D, E, F гэсэн зургаан бүлэгт хуваагаад

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & AB & CD & EF \\ 2 & AC & BE & DF \\ 3 & AD & BF & CE \\ 4 & AE & BD & CF \\ 5 & AF & BC & DE \end{array}$$

гэж суулгавал таван сарын дотор бүгд найз болно.

Дунд ангийн багш

Бодлого Б1. $4z^2(2z^2 + 1) = 4xy - 2x - y$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: Шийдгүй.**

Өгсөн тэгшитгэлийг 2-оор үржүүлж хоёр тал дээр нь 1-ийг нэмбэл

$$(4z^2 + 1)^2 = (4x - 1)(2y - 1)$$

болно. Энд $4x - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ тул $4x - 1$ тоо $p \equiv 3 \pmod{4}$ байх $p \geq 3$ анхны тоон хуваагчтай ба энэ үед $p \mid 4z^2 + 1$ буюу $4z^2 \equiv -1 \pmod{p}$ байна. Нөгөө талаас Фермагийн бага теоремоор

$$1 \equiv (2z)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

тул зөрчилд хүрлээ. Иймд тэгшитгэл натурал тоон шийдгүй.

Бодлого Б2. Өгөгдсөн $a_1, a_2, \dots, a_n$ дарааллын гишүүд дээр дараах үйлдлүүдийг хийж болно. Аливаа $1 \leq k \leq n - 2$ дугаарын хувьд

- 1) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр ихэсгээд, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр багасгаж, эсвэл
- 2) a_k, a_{k+2} гишүүдийг 1-ээр багасгаад, a_{k+1} гишүүнийг 1-ээр ихэсгэж

болно. Анх 1, 2, ..., 2022 гэсэн дараалал өгөгдсөн бол дээрх үйлдлүүдийг давтан хийх замаар дарааллын бүх гишүүдийг тэнцүү болгож чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Хариу: Чадахгүй.

Үлдэгдэл ашигласан бодолт: $a_1, a_2, \dots, a_n$ дараалалд

$$S = \sum_{k=1}^n 3^k a_k \pmod{7}$$

үлдэгдлийг харгалзуулъя.

c бүхэл тооны хувьд $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) \rightarrow (a_k + c, a_{k+1} - c, a_{k+2} + c)$ үйлдлээр $S \rightarrow S + 3^k 7c \equiv S \pmod{7}$ тул бодлогын үйлдлүүдээр S өөрчлөгдөхгүй.

Одоо $N = 2022$ ба $S = S(1, 2, \dots, N)$ гэвэл $4S = 2(3S - S) = 3((2N - 1)3^N + 1) \equiv 6N = 1 \pmod{7}$ гэдгээс $S \equiv 2 \pmod{7}$ болно. Нөгөө талаас N урттай тогтмол $c, \dots, c$ дарааллын хувьд $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \equiv 0 \pmod{7}$ ба $6 \mid N$ гэдгээс $S(c, \dots, c) \equiv 0 \pmod{7}$ байна. Иймд шилжүүлж чадахгүй.

Комплекс тоо ашигласан бодолт: $\varepsilon = e^{\frac{\pi}{3}i}$ гэвэл $\varepsilon^3 = -1$ болно. Иймд $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ байна. Одоо $a_1, a_2, \dots, a_n$ дараалалд $S = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon^k$ комплекс тоог харгалзуулъя. Тэгвэл $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}) \rightarrow (a_k + c, a_{k+1} - c, a_{k+2} + c)$ үйлдлээр $S \rightarrow S + c\varepsilon^k(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) = S$ хадгалагдана. Эндээс S инвариант болно.

Цаашилбал, $N = 2022$ гэвэл 1, 2, ..., N дараалалд

$$S = \sum_{k=1}^N k\varepsilon^k = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} (N\varepsilon^{N+1} - (N + 1)\varepsilon^N + 1) = N(1 - i\sqrt{3})/2$$

харгалзах ба $c, c, \dots, c$ гэсэн N урттай тогтмол дараалалд

$$S = c \sum_{k=1}^N \varepsilon^k = \frac{1}{1 - \varepsilon} (\varepsilon - \varepsilon^{N+1}) = 0$$

харгалзах тул шилжүүлэх боломжгүй.

Олон гишүүнт ашигласан бодолт: $a_1, \dots, a_n$ дараалалд $a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ олон гишүүнтийг $x^2 - x + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарсан үлдэгдлийг харгалзуулбал инвариант болох ба өгөгдсөн дарааллууд дээр өөр өөр утга авна. Энэ зохиогчийн бодолт бөгөөд дээрх бодолтууд нь энэ бодолтын дүрслэлүүд гэж ойлгож болно.

Бодлого Б3. Дараах чанартай хамгийн бага натурал N тоог ол.

Дурын бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $|P(x)| > \frac{1}{N}$ байх $0 \leq x \leq 1$ тоо олдоно.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $N = 56$.

Эхлээд $N = 56$ нөхцөл хангана гэж харуулъя. Эсрэгээс нь бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд дурын $0 \leq x \leq 1$ дээр $|P(x)| \leq \frac{1}{56}$ байдаг гэе.

Тэгвэл $|P(0)|, |P(1)|, 32|P(1/2)|$ сөрөг биш бүхэл тоонууд 1-ээс эрс бага болох тул 0 байна. Иймд $Q(x) = x(1-x)(2x-1)$ гэвэл Гауссын леммээс бүхэл коэффициенттой, квадрат $D(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $P(x) = Q(x)D(x)$ гэж бичиж болно. Одоо

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \quad \text{ба} \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

гэвэл $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = \frac{1}{5}$ бөгөөд $Q(\alpha) = -\frac{1}{5\sqrt{5}}$, $Q(\beta) = \frac{1}{5\sqrt{5}}$ байна. Мөн $25D(\alpha)D(\beta)$ тоо $5\alpha\beta$, $\alpha + \beta$ тоонуудын бүхэл коэффициенттой илэрхийлэл болох тул бүхэл байна. Иймд

$$3125P(\alpha)P(\beta) = -25D(\alpha)D(\beta)$$

бүхэл байна. Энд $|3125P(\alpha)P(\beta)| \leq \frac{3125}{3136} < 1$ гэдгээс $D(\alpha)D(\beta) = 0$ байна. Өөрөөр хэлбэл $(5x^2 - 5x + 1) \mid D(x)$ болох тул $D(x) = 5x^2 - 5x + 1$ гэж үзэж болно. Энэ үед

$$P(0.9) = 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.55 > 0.036 > 0.02 > \frac{1}{56}$$

болж зөрчил гарна. Иймд бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн $P(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $P(x) > \frac{1}{56}$ байх $0 \leq x \leq 1$ олдоно.

Эцэст нь $S(x) = x^2(1-x)^2(2x-1)$ гэе. Энэ үед дурын $0 \leq x \leq 1$ хувьд

$$|S(x)| \leq S(\beta) = \frac{Q(\beta)^2}{2\beta-1} = \frac{1}{25\sqrt{5}} < \frac{1}{55}$$

болохыг шалгах хэцүү биш. Иймд $N = 56$ хамгийн бага байна.

Нэмэлт. (i) $\int_0^1 P(x)^2 dx > 0$ интегралийг авч үзэн $N \leq 167$ гэж баталж болно.

(ii) $D(x)$ олон гишүүнтийн оронд $Q'(x) = 6x^2 - 6x + 1$ олон гишүүнтийг авч үзэн $N \leq 63$ гэж баталж болно.

(iii) Бүхэл коэффициенттой, таван зэргийн P олон гишүүнтийн хувьд дурын $0 \leq x \leq 1$ дээр $|P(x)| < \frac{1}{50}$ байдаг бол $P = S$ байна гэж баталж болно.

Бодлого Б4. $n \geq 1$ гэе. Ялгаатай $a_1, \dots, a_{2n+2}$ бүхэл тоонууд өгөгдөв. Хэрэв $|i-j| \leq n$ байх i, j дугаар бүрийн хувьд $|a_i - a_j| \leq n$ байдаг бол $a_{2n+2} - a_1$ ялгавар $(2n+1)$ -д хуваагдахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Ямар нэг $1 \leq k \leq 2n+2$ хувьд a_k хамгийн бага гэе. Тэгвэл дарааллын бүх гишүүдийг тогтмол тоогоор зөөх замаар $a_k = 1$ гэж үзэж болох ба шаардлагатай бол (a_{2n+3-k}) дарааллыг авч үзэх замаар $1 \leq k \leq n+1$ гэж үзэж болно. Энэ үед $2 \leq a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n} \leq n+1$ тоонууд ялгаатай тул $2, 3, \dots, n+1$ тоонуудын сэлгэмэл болно. Хэрэв $k \geq 2$ бол $n+2 \leq a_{k-1} \leq n+a_k = n+1$ болж зөрчил гарах тул $k = 1$ байна. Мөн ижлээр a_{2n+2} хамгийн их утга байх ба бүгд ялгаатай гэдгээс $a_{2n+2} \geq 2n+2$ байна. Цаашилбал $2 \leq l \leq n+1$ хувьд $a_l = 2$ гэвэл $a_{2n+2} \leq n+a_{n+l} \leq 2n+a_l = 2n+2$ тул $a_{2n+2} = 2n+2$ байна. Бодлого бодогдов.

Бодлого Б5. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I цэгийг дайруулан BI хэрчимд перпендикуляр байхаар татсан шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн AB ба BC бага нумуудтай харгалзан X ба Y цэгүүдэд огтлолцоно. $AI \parallel PY$ ба $CI \parallel XP$ байхаар P цэгийг сонгоё. Хэрэв XA ба YC шулуунууд Q цэгт огтлолцдог бол I, P, Q цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $XP \cap AC = D, PY \cap AC = E$ гэе. Тэгвэл

$$\angle IXD = \angle YIC = \angle BIC - 90^\circ = \frac{180^\circ - \angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \angle YEC$$

болохыг анзаарвал $XADI$; $YCEI$ ба $XDEY$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана. ($XADI$) ба ($YCEI$) тойргуудын дахин огтлолцох цэгийг R гэе. $PD \cdot PX = PE \cdot PY$ тул радикал тэнхлэгийн чанараар $P \in IR$. Мөн гурван тойргийн радикалын чанараас $Q \in IR$. Иймд I, P, Q цэгүүд IR шулуун дээр орших болж батлагдав.

Бодлого Б6. Дараах чанартай хамгийн бага эерэг бодит $0 < c < 1$ тоог ол.

$n \geq 3$ оройтой, гурвалжин агуулаагүй, орой бүрийн зэрэг нь cn тооноос эрс их байдаг энгийн граф бүр хоёр туйлт байна.

Тайлбар: гогцоогүй, өөрөөр хэлбэл нэг оройгоос эхлээд тэр орой дээрээ дуусдаг ирмэггүй, ямар ч хоёр оройг нэгээс олон ирмэг холбодоггүй, чиглэлгүй графыг энгийн граф гэнэ. Оройгоос гарсан ирмэгийн тоог тус оройн зэрэг гэнэ. Аль ч хоёр нь ирмэгээр холбогдсон гурван оройтой графыг гурвалжин гэнэ. Ижил өнгөтэй оройнууд ирмэгээр холбогдоогүй байхаар оройнуудыг нь хоёр өнгөөр будаж болдог графыг хоёр туйлт гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: М. Өнөболд)

Бодолт. **Хариу:** $c = \frac{2}{5}$.

$n \geq 3$ оройтой, гурвалжин агуулаагүй, орой бүрийн зэрэг нь cn тооноос эрс их байдаг энгийн графыг сайн гэе. $n = 5$ урттай цикл нь гурвалжин агуулаагүй ба орой бүрийн зэрэг нь 2 байна. $c < \frac{2}{5}$ үед энэ граф сайн боловч хоёр туйлт биш.

Одоо $c = \frac{2}{5}$ үед сайн граф бүр хоёр туйлт гэж харуулъя. Эйлерийн теоремоор сондгой урттай цикл агуулахгүй гэж харуулахад хангалттай.

k -аар индукцлэн дурын $k \geq 1$ хувьд $2k + 1$ урттай цикл агуулахгүй гэж баталъя.

$k = 1$ үед өгсөн нөхцөл ёсоор гурвалжин агуулахгүй. $k \geq 2$ үед $3, \dots, 2k - 1$ урттай циклүүд агуулахгүй гэж үзье. Эсрэгээс нь $2k + 1$ урттай цикл агуулдаг гээд

$$C = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$$

оройнууд энэ дарааллаараа $2k + 1$ урттай цикл үүсгэдэг гэе. Тэгвэл энэ цикл дотор орой бүр зөвхөн өөрийнхөө хөрш оройтой л ирмэгээр холбогдсон байна. Учир нь хэрэв v_i, v_j оройнууд хөрш биш бөгөөд ирмэгээр холбогдсон байвал энэ нь манай циклийг нийт урт нь $2k + 3$ байх хоёр циклд хуваана. Энэ үед аль нэг цикл нь сондгой, $2k - 1$ -ээс хэтрэхгүй урттай байхад хүрч зөрчил үүснэ. Тэгэхээр, графын u оройгоос C циклийн оройтой холбогдсон ирмэгийн тоог $d(u, C)$ гэж тэмдэглэвэл дурын $u \in C$ хувьд $d(u, C) \leq 2$ байна.

Одоо дурын $u \notin C$ хувьд $d(u, C) \leq 2$ гэж харуулъя. Хэрэв u орой v_r, v_s, v_t оройнуудтай ирмэгээр холбогддог бөгөөд $1 \leq r < s < t \leq 2k+1$ гэвэл энэ нь C циклийг нийт урт нь $2k+7$ байх дараах гурван циклд хуваана:

$$\{u, v_r, v_{r+1}, \dots, v_s\}, \quad \{u, v_s, v_{s+1}, \dots, v_t\}, \quad \{u, v_t, v_{t+1}, \dots, v_r\}.$$

Энэ гурван циклийн ядаж нэг нь сондгой урттай байх нь илт. Тэгвэл, нөгөө хоёр цикл нь ядаж 4 урттайг санавал (учир нь манай графт гурвалжин байхгүй) уг сондгой урттай циклийн урт $2k+7-4-4=2k-1$ -ээс хэтрэхгүйд хүрч зөрчил үүснэ.

Иймд дурын u оройн хувьд $d(u, C) \leq 2$ байна. Цаашилбал, графын дурын v оройн зэргийг $d(v)$ гэж тэмдэглэвэл $d(v) > \frac{2}{5}n$ гэдгээс

$$2n \geq \sum_u d(u, C) = \sum_{v_i \in C} d(v_i) > (2k+1)\frac{2}{5}n \geq 2n$$

болж зөрчил үүснэ. Иймээс уг граф сондгой урттай цикл агуулахгүй бөгөөд улмаар хоёр туйлт гэдэг нь батлагдана.

Ц. Баясгалан багшийн товч намтар

Монголын Математикийн шинжлэх ухааны тэргүүлэгч эрдэмтний нэг шинжлэх ухааны доктор Ц.Баясгалан 1947 оны 5 сарын 20 өдөр Улаанбаатар хотод төрсөн.

Ахлах ангийн сурагч байхдаа 23-р сургуулийн математикийн багш Янжмаагийн удирдлаган дор олимпиадад бэлдэж “Улсын математикийн анхдугаар олимпиад”-ын аварга болсон. Тэр жилдээ МУИС-ын багш Санжмятавын удирдлаганд бэлтгэл хийснээр Германы Дрезден хотод болсон Олон улсын олимпиадад Монгол улсаа төлөөлөн Ц. Баясгалан, Д. Агваанцэрэн нарын 8 сурагч оролцож байжээ.

1965 онд Улаанбаатар хотын 23-р сургуулийг “Онц суралцсаны төлөө” “Алтан медаль”-тай төгссөн.

1965-1970 онд Ломоносовын нэрэмжит Москвагийн Их Сургуульд суралцан математикч мэргэжлээр төгссөн.

1976-1979 онд Унгар улсын шинжлэх ухааны академийн математикийн хүрээлэнгийн аспирантурт 3 жил суралцан 1980 онд Унгар улсад “Тодорхой бус метриктэй огторгуй” сэдвээр дэд докторын зэрэг, 2001 онд Монголд “Тодорхой бус метриктэй огторгуй дахь шугаман операторын спектрал анализ” сэдвээр математикийн шинжлэх ухааны докторын зэрэг тус тус хамгаалсан. Эрдмийн зэрэг хамгаалсан бүтээлүүд нь Германы сонгодог математикч Ф.Хаусдорф, оросын алдарт математикч М.Г.Крейний бүтээлүүдийг цаашид гүнзгийрүүлэн өргөтгөсөн тодорхой бус метриктэй огторгуйн геометр болон анализын цаашдын хөгжилд чухал түлхэц болсон юм.

1970 оноос хойш Монгол улсын боловсролын салбарт тасралтгүй 36 жил ажиллахдаа МУИС-ын математик анализын тэнхимын багш, тэнхимын эрхлэгч, тэргүүлэх профессор зэрэг албан тушаалд ажиллахын зэрэгцээ 1996 оноос “Функционал анализ ба түүний хэрэглээ”, “Шугаман ба дифференциал оператор” сэдэвт улсын захиалгат шинжлэх ухааны төслийн удирдагчаар ажиллаж байсан.

Багшлахын зэрэгцээ өөрийн бүх амьдралаа математикийн шинжлэх ухаанд зориулж, шавь нараа үлгэрлэн, багш нараа хошуучлан 60 гаруй эрдэм шинжилгээний өгүүллийг гадаадын болон дотоодын нэр хүндтэй сэтгүүлүүдэд хэвлүүлсэн. Унгар/1986/, Гонг-Конг /1990/, Герман, /1992/, Тайланд /1995/, Хятад/ 1999/, Герман /2002/ онуудад ОУ-ын математикийн эрдэм шинжилгээний хуралд биечлэн оролцож илтгэл тавьж, Америкт болсон Олон улсын математикийн их хуралд эрдэм шинжилгээний бүтээлээ явуулж хэлэлцүүлж байлаа. Түүний эрдэм шинжилгээний бүтээлүүдээс Америкийн математикийн нийгэмлэгийн санд (American Mathematical Society, Math Sci Net) 18 ажил нь бүртгэгдсэн байдаг.

Түүний бүтээлээс АНУ, ХБНГУ, ОХУ зэрэг орны 10 гаруй эрдэмтдийн бүтээлд ишлэл авсан байдаг бөгөөд тухайлбал Т.Я Азизов, И.С.Иохвидов нарын “Основы теорий линейных операторов в пространствах с инфинитной метрикой” монографт, “О существовании положительного квадратного корня относительно инфинитной метрики” ажил нь ишлэгдсэн байдаг.

Мөн эх орондоо Герман-Монголын математикчдын анхдугаар бага хурлыг санаачлан зохион байгуулсан олон улсад нэр хүндтэй эрдэмтэн хүн байлаа.

1998 онд Их дээд сургуулиудын консорциумын шилдэг бүтээлийн уралдаанд МУИС-аас шалгаран оролцож байжээ. Мөн тэр жилдээ МУИС-ын эрдэм шинжилгээний шилдэг бүтээлд өгдөг Крияамагийн шагналыг “Fundamental Reducibility of normal Operators on Krein spaces” өгүүлэлгээр хүртсэн ба мөн 1999 онд Монголын шинжлэх ухааны академийн бага чуулганы шилдэг бүтээлийн шагналыг тус тус хүртсэн. 2004 онд Монгол улсын шинжлэх ухааны шилдэг бүтээлийн уралдаанд “Анализ 0–9” цуврал номоороо тэргүүн байр эзлэсэн. Энэ бүтээл нь их эрдэмтэний оюутан сурагчид, математик сонирхогчидод зориулан бичсэн хамтын бүтээл юм. Уг цуврал сурах бичиг нь их сургуулийн математикийн ангийн оюутнуудын хувьд анализийн бүтэн курс билээ. /Уг бүтээлийн талаархи 2004-12-13 өдрийн “Өдрийн сонины ярилцлага бий/

Багшлах хугацаандаа 2 анги дааж, анализын тусгай мэргэжлийг олон арван шавьдаа өвлүүлж 4 дэд доктор, 1 шинжлэх ухааны докторын ажлыг удирдаж, 11 магистрыг хамгаалуулжээ. Ажиллах хугацаандаа

1. “Ардын боловсролын тэргүүний ажилтан” цол тэмдэг, 1992 он,
2. “Шинжлэх ухааны тэргүүний ажилтан” цол тэмдэг, 1997 он,
3. “Алтан гадас” одон, 2002 он

шагнуулсан. Шинжлэх ухааны нөр их ажлын зэрэгцээ Монгол орныхоо тусгаар тогтнол, хөгжил, дэвшил, боловсрол, газар нутгаа хайрлан хамгаалах талаар улс төрийн томоохон нийтлэл бичсэн.

Бүтээлийн жагсаалт

Эрдэм шинжилгээ

- [1] Псевдотопологические пространства. Тезис докладов научной конференции. МГУ, 1970г.
- [2] Об одной операторной алгебре. Тезис докладов научной конференции. МонГУ, 1974г.
- [3] Fundamental reducibility of positive operators in spaces with an indefinite metric. Studia Sciens. Math. Hungarica.13.1978.143-150.
- [4] The neutral cone and its maximal subspaces. Colloqua Math.Soc.Janos Bolyni.International Conference Of mathematicians Budapest Hungary Functions series and operators 1980.183–189.
- [5] Осуществования положительного квадратного корня из оператора, по положительного относительно индифинитной метрики. Studia Sciens. Math. Hungarica 15.1980.367-379.
- [6] Vizagalatok indefinit metrikaju terekben. Budapest, 1980.
- [7] Kandidatusi ertekezes. Budapest, 1980.
- [8] О фундаментальной приводимости самосопряженных и унитарных операторов в пространствах с индифинитной метрикой Studia Sciens. Math. Hungarica 20.1985.313–321
- [9] О фундаментальной разложимости пространства с индифинитной метрикой. Annales.Univer. Scien. Budapest. Sec.Math. 29, 35-40, 1986. Abstracts of the International conferenceon Algebra Ulaanbaatar August 6–13, 1990.
- [10] The numerical range of linear operators in spaces with an indefinite metric. Pros.Inter.Congres of Math.Berkerly.USA.Real and Functional Analysis. 1986.171–172. Studia Sciens. Math. Hungarica 24.1989.67–69.

- [11] Контпримеры к общей теорий пространства с индифинитной метрикой. МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг 1986.1.2. 41–48 The Asian Mathematical conference. HongKong August 15–20.1990.
- [12] The numerical range of linear operators. Acta Math. Hungarica 57.1–2.1991.7–9.
- [13] Some problems connect with orientations of differentiable manifolds. Scientific journal Mongolian State University, Ulaanbaatar, 1992.1.106.30–38. Humboldt University. Institute of Mathematics R.20 Berlin, 1993.
- [14] Some classical problems of mathematical analysis. Scientific journal. Mongolian State University. Ulaanbaatar 1992.1.106.27–30. Technical University Department of Mathematics 3.R.84 Berlin, 1994.
- [15] The measure generated by differential form. Scientific journal. Mongolian State University. Ulaanbaatar, 1992.1.106.39–43.
- [16] Of the quadratic form of inner product .The second Asian Mathematical conference. Tailand, Bangkok, 17-20 October 1995.
- [17] Fundamental reducibility of expansive and dissipative operators on finite dimensional Krein spaces, МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг, 1997, 1, 10–17 . The second European Congress of Mathematics, Hungary, Budapest, 15-22 July, 1996.
- [18] On the growth conditions on the resolvent of selfadjoint operators in Krein spaces, МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг, 1, 1997, 5–9. The first German Mongolian Conference on Mathematics, 7-10 July , 1997.
- [19] On strongly stable normal operators in Krein spaces, I, Acta Math. Hungar. 81–, 3, 1998, 275–278.
- [20] On strongly stable normal operators in Krein spaces, II, Integral equations and Operator theory, 1998, 155–158, Birkhauser Verlag, Basel.
- [21] Fundamental reducibility on normal operators on Krein space, Studia scient. Math. Hungarica, 35, 1999, 147–150.
- [22] Fundamental reducibility of expansive and dissipative operators in Pontryagin spaces, Journal of the Mongolian mathematical society, 3, 199, 1–12, International congress of Mathematicians, Berlin, Germany, August 18–27, 1998. International Seminar-school in interdisciplinary Natural Sciences Problems, Terelj, Mongolia.
- [23] Development of Mathematical Science in Mongolia in XX century (with Prof A. Mekei, Prof T. Zhanlav, Prof D. Bayambajav), МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг, 154, 3, 1999.
- [24] Remarks on functional equations , Journal of the Mongolian Mathematical Society, 1999, 3, 13–19. Institute of Mathematics, University of Munich, Germany, 1999, R, 25.
- [25] О фундаментальной разложимости пространств с индифинитной метрикой, МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг 168. 49–58 2000. Международная конференция по математике. Тезис докладов 118–119, 28–30 июня 2000, Улаан-Үд Байгал.
- [26] Remarks on geometry of spaces with an indefinite metric, Journal of the Mongolian Mathematical Society, 2000, 4, 4–10.
- [27] The numerical range of linear relations spaces with an indefinite metric математическая физика, анализа, геометрия /Украин/ 7 по 1p 115–118, 2000.

- [28] A study of the geometry of spaces with an indefinite metric and their linear operators (Resume), 2001.
- [29] Исследования индифинитных пространств и их операторов /Докторская диссертация/ 2001.
- [30] Some problems of the theory of spaces with an indefinite metric, International Conference on Mathematics, 28 August-2 September, 2001, Ulaanbaatar, Mongolia.
- [31] Fundamental reducibility of contravtive operators in Krein spaces, Math. Nachr, Germany.
- [32] “Функционал анализ ба түүний хэрэглээ” эрдэм шинжилгээний төслийн тайлан 1996–1998
- [33] “Шугаман ба дифференциал оператор” эрдэм шинжилгээний төслийн тайлан 1999–2001.
- [34] Инвариант огторгуйн зарим асуудалд. МУИС Эрдэм шинжилгээний бичиг 2002.
- [35] Dissipative and contractive operators / spectral properties/ Institute of Mathematics, University of Munich, Germany, 2002.R.30
- [36] σ -алгебрын чадал МУИС Эрдэм шинжилгээний бага хурал 2003 он, Д. Даянцолмонгийн хамт.
- [37] Интегралд хувьсагчийг солих нь . МУИС Эрдэм шинжилгээний бага хурал 2003 он, С. Батсүрэнгийн хамт.
- [38] Шугаман огторгуй ба геометр. МУИС Эрдэм шинжилгээний бага хурал 2003 он.
- [39] Функционал анализ ба түүний хэрэглээ. Төслийн тайлан 2003 он.

Сурах бичиг

- [1] Анализ I, 2000 он
- [2] Анализ II, 2001 он
- [3] АнализIII, 2003 он
- [4] Анализ IV, 2003 он
- [5] Анализ V, 2003 он
- [6] Анализ VI, 2003 он
- [7] Анализ VII, 2004 он
- [8] Анализ 0, 2006 он

Гарын авлага

- [1] Бодит ба элементар функц, 1988 он
- [2] Функцийн хязгаар тасралтгүй чанар, 1988 он
- [3] Дифференциал тоолол, 1988 он
- [4] R -Огторгуй, 1989 он
- [5] Интеграл тоолол, 1990 он
- [6] Цувааны онол, 1990 он

[7] Олон хувьсагчтай функцийн дифференциал тоолол, 1991 он

[8] Олон хувьсагчтай функцийн интеграл тоолол, 1991 он

Шавь доктор Д. Даянцолмон

Олон Улсын Математикийн 63-р Олимпиад

Олон улсын математикийн 63-р олимпиад

Зохион байгуулалт

Олон Улсын Математикийн 63-р Олимпиад 2022 оны 7-р сарын 6-наас 16-ны өдөр Норвег улсын Осло хотод зохион байгуулагдлаа. Монгол улсын багийн хувьд БНХАУ дахь Норвегийн элчин сайдын яамнаас виз авах байсан ч БНХАУ-д тавигдсан хөл хорионы улсаас виз авч чадалгүй Улаанбаатар хотоос дахин цахимаар оролцлоо. Энэ жилийн хувьд БНХАУ, Хонконг, Макао, Монгол улсын багууд онлайнаар оролцсон бол бусад улсын багууд Норвег улсад очиж оролцлоо. ОХУ-аас сурагчид оролцсон боловч багийн дүнд оролцуулаагүй. ОУМО-ыг зохион байгуулах хоороны итгэмжлэгдсэн төлөөлөгчөөр Канад улсын иргэн Матюш Фаро ажиллав. Багийн ахлагчаар Ү. Отгонбаяр, дэд ахлагчаар У. Батзориг нар оролцлоо.

Монголын баг

Энэ жилийн олимпиадад 104 орны 589 сурагч оролцов. Монгол улсын баг 162 оноогоор 29-р байрт шалгарлаа. Манай сурагчдын ихэнхи нь 3–4 бодлого бүтэн бодож 6 сурагчийн нийлбэр онооны шинэ дээд амжилт тогтоолоо. Өмнөх дээд амжилт нь 1984 онд багаараа 146 оноо авч байсан. Харин 1964 онд багаараа 169 оноо авсан боловч тухайн үед улс бүрээс 8 сурагч оролцдог байжээ.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Ш. Билгүүдэй	Сант	30	Мөнгөн медаль
Б. Билэгдэмбэрэл	УБ, 11-р сургууль	29	Мөнгөн медаль
Ц. Сайханбилэг	Сант	28	Хүрэл медаль
Б. Мөнхцэлмэг	УБ, 1-р сургууль	28	Хүрэл медаль
Д. Энэрэлт	Сант	28	Хүрэл медаль
Г. Далайцэрэн	Хөвсгөл, ЭДЦС	19	Тусгай шагнал

Сонгон шалгаруулалт

ОУМО-ын сонгон шалгаруулалт 2 шаттайгаар зохион байгуулагдлаа. I шатны I сорилго 2022 оны 3-р сарын 12, 13-нд онлайн тест хэлбэрээр зохион байгуулагдаж 188 сурагч оролцов. I шатны II сорилго 3-р сарын 19, 20-ны өдрүүдэд МУИС дээр зохион байгуулагдаж I сорилгоос шалгарсан 90 сурагч оролцов. II шат буюу IMO сорилгод 30 сурагч оролцож 2 удаагийн сорилго (нийт 4 өдрийн бодолт) болон УМО-ын ахлах ангиллын онооны нийлбэрээр хамгийн өндөр оноо авсан 6 сурагч IMO багт шалгарлаа.

Бэлтгэл

ОУМО-ын бэлтгэлийг 4 сарын 18-ны өдрөөс 7 сарын 2-ны өдөр хүртэл (улсын олимпиадын долоо хоногийг хасаад нийт 10 долоо хоног) зохион байгуулав.

Олимпиадын бэлтгэлд Др. У. Батзориг, Др. Ү. Отгонбаяр, Маг. Б. Батбаясгалан, Др Т. Хулан, Др. Г. Баярмагнай нар болон R3 сургалтын төвийн багш нар оролцлоо.

Зардал

ОУМО-63-д оролцох багийн бэлтгэл болон бусад зардлыг ММОХ, БШУЯ хариуцаж ажиллалаа.

Олон Улсын Математикийн 63-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлогууд

Бодлого 1. Осло хотын банк хоёр төрлийн зоос гаргадаг: хөнгөн цагаан (A гэж тэмдэглэе) ба зэс (B гэж тэмдэглэе). Мариана n ширхэг хөнгөн цагаан, n ширхэг зэс зоостой ба зооснуудаа анх ямар нэг санамсаргүй дарааллаар нэг мөрөнд эгнүүлэн байрлуулжээ. Дэс дараалсан нэг ижил төрлийн зоосны дэд дарааллыг *гинж* гэж нэрлэе. Бэхлэгдсэн $k \leq 2n$ тооны хувьд Мариана дараах үйлдлийг давтан хийнэ: зүүн талаасаа k дахь зоосыг агуулсан хамгийн урт гинжийг олж, тус гинжний бүх зоосыг мөрний хамгийн зүүн тал руу зөөнө. Жишээлбэл, $n = 4$ ба $k = 4$ үед анх $AABBBABA$ гэсэн байрлалаас эхлэхэд

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

болно. Анх ямар ч байрлалаас эхэлсэн хэдэн үйлдэл хийсний дараа зүүн талаасаа n ширхэг зоос нь бүгд ижил төрлийн байх байрлал руу шилждэг $1 \leq k \leq 2n$ байх бүх (n, k) хосыг ол.

Бодлого 2. Бүх эерэг бодит тооны олонлогийг $\mathbb{R}^+$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$xf(y) + yf(x) \leq 2$$

байх яг нэг $y \in \mathbb{R}^+$ оршин байдаг байх бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

Бодлого 3. k эерэг бүхэл тоо ба S сондгой анхны тоонуудаас тогтох төгсгөлөг олонлог байг. S олонлогийн гишүүдийг тойрог дээр дурын хөрш хоёр тооны үржвэр нь ямар нэг эерэг бүхэл x тооны хувьд $x^2 + x + k$ хэлбэртэй байхаар (эргүүлэлт болон толин тэгш хэмийг эс тооцвол) хамгийн олондоо нэг янзаар байрлуулж болно гэж батал.

Бодлого 4. $ABCDE$ гүдгэр таван өнцөгтийн хувьд $BC = DE$ байв. $ABCDE$ дотор T цэг $TB = TD$, $TC = TE$ ба $\angle ABT = \angle TEA$ байхаар өгөгдсөн гэе. AB шулуун CD ба CT шулуунуудыг харгалзан P ба Q цэгт огтолно. P , B , A , Q цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. AE шулуун CD ба CT шулуунуудыг харгалзан R ба S цэгт огтолдог гэе. R , E , A , S цэгүүд энэ дарааллаараа байрладаг гэе. P , S , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлого 5. Дараах нөхцөлийг хангах эерэг бүхэл тоон бүх (a, b, p) гурвалыг ол. Энд p анхны тоо ба

$$a^p = b! + p.$$

Бодлого 6. n эерэг бүхэл тоо гэе. Нүд бүр нь яг нэг тоо агуулдаг байхаар 1-ээс n^2 хүртэлх бүх тоог агуулдаг $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийг *Нордик квадрат* гэе. Ялгаатай хоёр нүдийг ерөнхий талтай бол хөрш гэнэ. Хөрш нүднүүд нь бүгд өөрөөс нь том тоо агуулдаг нүдийг *хонхор* гэе. Дараах нөхцөлүүдийг хангах нэг болон түүнээс олон нүдний дарааллыг *өгсүүр зам* гэнэ:

- (i) дарааллын эхний нүд хонхор,
 - (ii) дарааллын дараагийн нүд бүр өмнөх нүдтэйгээ хөрш,
 - (iii) дарааллын нүднүүдэд бичигдсэн тоонууд өсдөг.
- Нордик квадрат доторх боломжит хамгийн бага нийт хэдэн өгсүүр замын тоог n -ээр илэрхийл.

Европын Охидын Математикийн 11-р Олимпиад

Монголын баг

Европын Охидын Математикийн 11-р Олимпиад 2022 оны 4-р сарын 6-наас 12-ны өдөр Унгар улсын Эгер хотод холимог хэлбэрээр (цахимаар эсвэл очиж оролцох) зохион байгуулагдлаа. Монгол улсын багийн хувьд Улаанбаатар хотоос цахимаар оролцлоо. Багийн ахлагчаар Др. Ү. Отгонбаяр, дэд ахлагчаар Др. Т. Хулан нар оролцов. Нийт 58 оноо авч 57 орноос 28-р байрт шалгарав.

Сурагчдын дүн

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
Б. Ундрал	УБ, 1-р сургууль	18	Хүрэл медаль
Н. Сувд	УБ, 11-р сургууль	15	Хүрэл медаль
С. Болормаа	УБ, 1-р сургууль	14	Тусгай шагнал
А. Мишээл	Орчлон	11	Тусгай шагнал

Европын Охидын Математикийн 11-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлогууд

Бодлого 1. $BC < AB$ ба $BC < CA$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжин өгөгдөв. P цэг AB хэрчим дээр, Q цэг AC хэрчим дээр байх бөгөөд $P \neq B$, $Q \neq C$ ба $BQ = BC = CP$ байв. APQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг T , ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын цэгийг H гээд BQ ба CP шулуунуудын огтлолцлын цэгийг S гэе. T , H , S цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодлого 2. Бүх эерэг бүхэл тооны олонлогийг $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ гэж тэмдэглэе. Дурын эерэг бүхэл a , b тоонуудын хувьд дараах хоёр нөхцөл биелдэг байх бүх $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

- $f(ab) = f(a)f(b)$ ба
- $f(a), f(b), f(a+b)$ тоонуудын ядаж хоёр нь тэнцүү.

Бодлого 3. Эерэг бүхэл тоон $a_1, a_2, \dots$ төгсгөлгүй дарааллыг дараах нөхцөлүүдийг хангадаг бол сайн гэе.

- a_1 бүтэн квадрат ба
- дурын $n \geq 2$ хувьд a_n нь

$$na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$$

тоо бүтэн квадрат байдаг хамгийн бага эерэг бүхэл тоо.

Дурын $a_1, a_2, \dots$ сайн дарааллын хувьд ямар нэг эерэг бүхэл k тоо олдоод бүх $n \geq k$ хувьд $a_n = a_k$ байна гэж батал.

Бодлого 4. Эерэг бүхэл $n \geq 2$ тооны хувьд дараах нөхцөлүүдийг хангах $N+1$ ширхэг $a_0, a_1, \dots, a_N$ бодит тоонууд олддог байх хамгийн их эерэг бүхэл N тоог ол.

$$(1) \ a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} \text{ ба}$$

$$(2) \text{ дурын } 1 \leq k \leq N-1 \text{ хувьд } (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Бодлого 5. Дурын эерэг бүхэл n, k тоонуудын хувьд $n \times 2k$ хөлгийг nk ширхэг 2×1 хэмжээтэй доминогоор бүрэн бүрхэх боломжийн тоог $f(n, 2k)$ гэе. (Жишээлбэл $f(2, 2) = 2$ ба $f(3, 2) = 3$.) Дурын эерэг бүхэл k тооны хувьд $f(n, 2k)$ тоо сондгой байдаг бүх эерэг бүхэл n тоог ол.

Бодлого 6. $ABCD$ дөрвөн өнцөгт O төвтэй тойрогт багтсан. A ба B өнцгүүдийн дотоод биссектрисүүд X цэгт огтлолцдог, B ба C өнцгүүдийн дотоод биссектрисүүд Y цэгт огтлолцдог, C ба D өнцгүүдийн дотоод биссектрисүүд Z цэгт огтлолцдог, D ба A өнцгүүдийн дотоод биссектрисүүд W цэгт огтлолцдог гэе. Мөн AC ба BD нь P цэгт огтлолцдог гэе. Энд X, Y, Z, W, O, P цэгүүд ялгаатай байдаг гэе.

O, X, Y, Z, W цэгүүд нэг тойрог дээр байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь P, X, Y, Z, W цэгүүд нэг тойрог дээр байх гэж батал.