

Гарчиг

Олон Улсын Математикийн 61-р Олимпиад	1
Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2020	1
Бодлогууд	2
Бодолтууд	3
Монголын Математикийн 57-р Олимпиадын II Даваа	9
Хот/аймгийн Олимпиад	9
Бодлогууд	9
Бодолтууд	10
Монголын Математикийн 57-р Олимпиадын III Даваа	15
Улсын Олимпиад	15
Бодлогууд	17
Бодолтууд	19
Олон Улсын Математикийн 62-р Олимпиад	29
Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2021	29
Бодлогууд	30
Бодолтууд	31

Олон Улсын Математикийн 61-р Олимпиад

Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2020

Зохион байгуулалт

Олон Улсын Математикийн 61-р Олимпиад Ковид-19 цар тахлын улмаас төлөвлөсөн хугацаанаас хойшилж 2020 оны 9-р сарын 19-28-ны өдрүүдэд анх удаагаа виртуал хэлбэрээр зохион байгуулагдлаа. Зохион байгуулагч ОХУ-ын Санк-Петербург хот тус олимпиадыг зохион байгуулах ажлыг өндөр түвшинд гүйцэтгэсэн гэдгийг дурдах нь зүйтэй юм. Монгол улсын багийн хувьд ОХУ-ын элчин сайдын яаманд хүсэлт гарган Оросын Шинжлэх Ухаан Соёлын төвийн номын санд олимпиадын бодолтоо хийлээ. ОУМО-ыг зохион байгуулах хорооны итгэмжлэгдсэн төлөөлөгчөөр МУИС-ын БУС-ын математикийн тэнхимийн багш Др Д. Даянцолмон ажиллав. Багийн ахлагчаар Б. Батбаясгалан, дэд ахлагчаар У. Батзориг нар оролцов.

Монголын баг

Энэ жилийн олимпиадад 105 орны 616 сурагч оролцов. Монгол улсын баг 135 оноо авч 29-р байрт шалгарлаа. Манай багийн сурагч О. Мишээл 36 оноо авч нийт сурагчдаас 4-р байрт жагссан нь Монгол улсын тэргүүлэх амжилт боллоо. М. Өнөболд ОУМО-оос алт, мөнгө, хүрэл медаль хүртсэн анхны сурагч болсныг тэмдэглэх нь зүйтэй юм. Түүнчлэн 1 алт, 2 мөнгө, 1 хүрэл медаль авсан нь медалийн чанараар тооцвол Монгол улсын үзүүлсэн хамгийн өндөр амжилт байлаа.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
О. Мишээл	Шинэ-Монгол	36	Алтан медаль
А. Нямдаваа	Сант	29	Мөнгөн медаль
М. Өнөболд	УБ, 1-р сургууль	29	Мөнгөн медаль
Б. Хантүшиг	УБ, 11-р сургууль	22	Хүрэл медаль
Б. Батсамбуу	Олонлог сургууль	10	Тусгай шагнал
Д. Энэрэлт	Сант	9	Тусгай шагнал

Сонгон шалгаруулалт

Олон Улсын Математикийн 61-р Олимпиадад Монгол улсыг төлөөлөн оролцох сурагчдыг сонгон шалгаруулах I шатны сорил 2019 оны 12-р сард зохион байгуулагдаж II шатны сорилгод оролцох 30 сурагчыг тодруулсан юм. II шатны сорилгыг 2020 оны эхээр зохион байгуулахаар төлөвлөж байсан ч Ковид-19 цар тахалтай холбоотой тавигдсан хөл хорионы улмаас 2020 оны 6-р сард зохион байгуулж ОУМО-61-д оролцох 6 сурагчийг тодруулсан. Сонгон шалгаруулалтыг багийн ахлагч Б. Батбаясгалан (МУИС), дэд ахлагч Др. У. Батзориг (МУИС) нар зохион байгуулав. Сорилын бодлогуудыг Др. Г. Баярмагнай, Др. Ү. Отгонбаяр, Др. Т. Хулан, Др. У. Батзориг, Б. Батбаясгалан нар дэвшүүлж бодуулав.

Бэлтгэл

ОУМО-61-д оролцох сурагчдын бэлтгэл 6-14-өөс 9-р сарын 12-ны хооронд явагдав. Ковид-19 цар тахлын улмаас бэлтгэлийг зөвхөн үндсэн багийн гишүүдийн дунд зохион байгуулах нь зүйтэй гэж ММОХ шийдсэн юм. Олимпиадын бэлтгэлийн хүрээнд 2020 оны 7-р сард зохион байгуулагдсан artofproblemsolving.org болон Америкийн математикийн нийгэмлэгээс хамтран зохион байгуулсан Cyberspace Mathematical Competition-д оролцож 3 алт, 3 хүрэл медаль хүртэж багийн дүнгээр 19-р байрт шалгарсан. Багийн амжилтад багийн эмэгтэй сурагчид болох Орчлон сургуулийн О. Ундрал, М. Далайзаяа нар чухал үүрэг гүйцэтгэсэн болохыг зориуд тэмдэглэх нь зүйтэй юм.

Олимпиадын бэлтгэлд Др. У. Батзориг, Др. Ү. Отгонбаяр (Алгебр), Б. Батбаясгалан (Комбинаторик), Др Т. Хулан (Геометр), Др. Г. Баярмагнай (Тооны онол) нарын салбарын тэргүүлэх багш нар хичээл заалаа.

Зуны туршид сурагчдынхаа бэлтгэлийг таслахгүй үргэлжлүүлсэн нийт багш нартаа талархал илэрхийлье.

Зардал

ОУМО-61-д оролцох багийн бэлтгэл болон бусад зардлыг ММОХ бүрэн хариуцаж ажиллалаа. Бэлтгэлийн төсвийг шийдэж дэмжин ажилласан ММОХ-ны удирдах зөвлөлд талархал илэрхийлье.

Талархал

Бэлтгэлийн хүрээнд нийт 5 удаа “Mock Exam” зохион байгуулсан бөгөөд тэргүүлсэн сурагчдыг Космо группын ерөнхийлөгч ноён Б. Батбаасан хувиасаа шагнаж сурагчдад урам өгсөн юм. Түүнчлэн ОУМО-60, 61-аас алтан медаль авсан сурагчдад олгохоор амалсан 10 сая төгрөгийн шагналаа давуулан биелүүлж нийт амжилттай оролцсон сурагчид, сурагчдаа амжилттай бэлтгэсэн багш нарт 1–5 сая төгрөгийн шагнал олгосон Космо группын хамт олон, Б. Батбаасан захиралд багийн нийт гишүүдийн өмнөөс дахин талархал илэрхийлье.

ОУМО-ын олимпиадад бодлого дэвшүүлж оролцох нь ОУМО-д оролцож байгаа улсуудын хувьд нэг талаас үүрэг, нөгөө талаас нэр төрийн хэрэг байдаг юм. Энэ жилийн хувьд манай нэртэй математикч, улс төрч Р. Гончигдорж багш 2 бодлого дэвшүүлж оролцсонд ММОХ-ын зүгээс талархал илэрхийлье.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалан

Бодлогууд

Бодлого 1. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт авч үзье. P цэг $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид оршино. Дараах харьцаа биелдэг байг:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Дараах гурван шулуун нэг цэгт огтлолцоно гэж батал:

$\angle ADP$, $\angle PCB$ өнцгүүдийн дотоод биссектрис, AB хэрчмийн дундаж перпендикуляр.

Бодлого 2. a, b, c, d бодит тоонууд $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ба $a + b + c + d = 1$ нөхцөлийг хангана.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

болохыг батал.

Бодлого 3. $1, 2, 3, \dots, 4n$ жинтэй $4n$ ширхэг чулуу өгөгдөв. Өнгө бүрээр тус бүр дөрвөн чулуу будагдсан байхаар эдгээр чулууг n өнгийн аль нэгээр буджээ. Дараах хоёр нөхцөлийг хангаж байхаар чулуунуудыг хоёр овоо болгон хувааж болно гэж батал:

- Хоёр овооны нийт жин хоорондоо тэнцүү.
- Овоо бүрд өнгө бүрээс хоёр чулуу орсон.

Бодлого 4. $n > 1$ бүхэл тоо. Бүгдээрээ ялгаатай өндөрт байрласан n^2 зогсоол уул өөд байрласан байв. A ба B компаниуд тус бүр k ширхэг дүүжин тэрэг ажиллуулдаг; аль ч дүүжин тэрэг нэг буудлаас нөгөө буудал руу (өөр буудлаар дамжихгүйгээр) дээшээ өгсдөг. A компанийн дүүжин тэргүүд k ялгаатай эхлэлийн цэгтэй бөгөөд k ялгаатай төгсгөлийн цэгтэй, түүнчлэн аль өндрөөс эхэлсэн дүүжин тэрэг нь илүү өндөрт очдог. B компанийн дүүжин тэргүүдийн хувьд мөн ижил нөхцөл биелдэг. Хэрвээ аль нэг доод буудлаас өөр нэг дээд буудал руу нэг компанийн нэг эсвэл хэсэг дүүжин тэргээр дамжин хүрч болдог бол энэ хоёр буудлыг тухайн компаниар холбогдсон гэе. Хоёр компаниар нэгэн зэрэг холбогдсон хоёр буудал зайлшгүй олддог байх хамгийн бага k натурал тоог ол.

Бодлого 5. $n > 1$ ширхэг карттай багц хөзөр өгөгдөв. Карт тус бүр дээр ямар нэг натурал тоо бичигдсэн. Энэ багц хөзрийн аль ч хоёр карт дээр бичигдсэн тоонуудын арифметик дундаж нь нэг эсвэл хэсэг карт дээр бичигдсэн тоонуудын геометр дундаж болдог чанартай байв. Ямар n -ийн хувьд эдгээр картууд дээр бичигдсэн тоонууд бүгд тэнцүү гэж гарах вэ?

Бодлого 6. Дараах өгүүлбэр биелдэг байх c гэсэн эерэг бодит оршин байна гэж батал: Үүнд $n > 1$ бүхэл тоо ба аливаа ялгаатай хоёр цэгийн хоорондох зай нь ядаж 1 байх хавтгайн n ширхэг цэгээс тогтох S олонлог авахад S олонлогийг хуваадаг бөгөөд S -ийн аль ч цэгээс ядаж $cn^{-1/3}$ зайд байрлах ℓ шулуун оршин байна. (Хэрвээ ℓ шулуун S олонлогийн хоёр цэгийг холбосон хэрчмийг огтолдог бол хуваадаг гэж үзнэ.)

Жич: $cn^{-1/3}$ -ийг $cn^{-\alpha}$ -ээр сулруулсан аливаа үнэлгээнд $\alpha > 1/3$ -ийн утгаас хамаарч оноо өгөх боломжтой.

Бодолтууд

Бодлого 1. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт авч үзье. P цэг $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотоод мужид оршино. Дараах харьцаа биелдэг байг:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

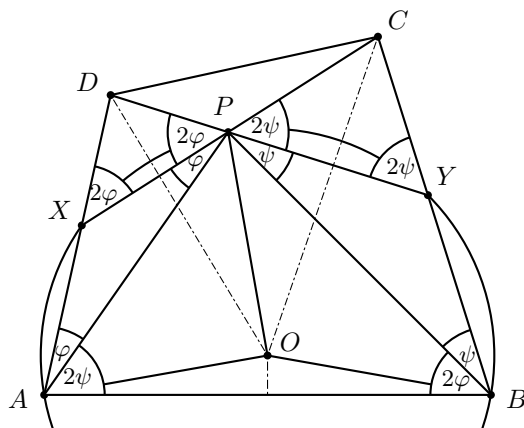
Дараах гурван шулуун нэг цэгт огтлолцоно гэж батал:

$\angle ADP$, $\angle PCB$ өнцгүүдийн дотоод биссектрис, AB хэрчмийн дундаж перпендикуляр.

Бодолт. $\varphi = \angle PAD$, $\psi = \angle CBP$ гэе. Тэгвэл $\angle PBA = 2\varphi$, $\angle DPA = 3\varphi$, $\angle BAP = 2\psi$, $\angle BPC = 3\psi$ болно. X цэг AD хэрчим дээр орших ба $XPA = \varphi$ байг. Тэгвэл

$$\angle PXD = \angle PAX + \angle XPA = 2\varphi = \angle DPA - \angle XPA = \angle DPX$$

байна. Эндээс DPX нь $DX = DP$ байх адил хажуут гурвалжин болно. Иймд $\angle ADP$ өнцгийн биссектрис XP -ийн дундаж перпендикуляртай давхцана. Төстэйгээр Y цэг BC хэрчим дээр орших ба $\angle BPY = \psi$ байг. Тэгвэл $\angle PCB$ өнцгийн биссектрис PY -ийн дундаж перпендикуляртай давхцана. Иймд бид XP , PY -ийн дундаж перпендикулярууд болон AB -ийн дундаж перпендикулярууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батлах шаардлагатай.



Мөн

$$\angle AXP = 180^\circ - \angle PXD = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - \angle PBA$$

болохыг ажиглая. Иймд $AXPB$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Өөрөөр хэлбэл X цэг APB гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. Төстэйгээр Y цэг APB гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. Иймд XP , PY , AB -ийн дундаж перпендикулярууд ($ABYPX$)-ийг багтаасан тойргийн төвийг дайрах болж бодлого бодогдов.

Бодлого 2. a, b, c, d бодит тоонууд $a \geq b \geq c \geq d > 0$ ба $a + b + c + d = 1$ нөхцөлийг хангана.

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1$$

болохыг батал.

Бодолт. Жинтэй зэргийн дундажын теоремоор

$$a^a b^b c^c d^d \leq a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

тул

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3$$

гэж харуулахад хангалттай. Үүнийг дараах байдлаар харуулж болно:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &> a^2(a + 3b + 3c + 3d) + b^2(3a + b + 3c + 3d) \\ &\quad + c^2(3a + 3b + c + 3d) + d^2(3a + 3b + 3c + d) \\ &\geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (a + 2b + 3c + 4d). \end{aligned}$$

Бодлого 3. $1, 2, 3, \dots, 4n$ жинтэй $4n$ ширхэг чулуу өгөгдөв. Өнгө бүрээр тус бүр дөрвөн чулуу будагдсан байхаар эдгээр чулууг n өнгийн аль нэгээр буджээ. Дараах хоёр нөхцөлийг хангаж байхаар чулуунуудыг хоёр овоо болгон хувааж болно гэж батал:

- Хоёр овооны нийт жин хоорондоо тэнцүү.
- Овоо бүрд өнгө бүрээс хоёр чулуу орсон.

Бодолт. Чулуунуудаа нийлбэр нь $4n+1$ байхаар $2n$ хос болгоё: $\{1, 4n\}, \{2, 4n-1\}, \dots, \{2n, 2n+1\}$. Эдгээр хосуудын олонлогийг S гэе. Бид S -ийг аль ч хэсэгт нь өнгө бүрээс хоёр чулуу орсон байхаар тус бүрдээ n хостой хоёр хэсэгт хувааж чадна гэж харуулахад хангалттай.

Дараах G мультиграф (гогцоо болон давхар ирмэгтэй) байгуулъя: G графын оройнууд нь n өнгө байх ба S -ийн элемент бүрд түүнд орсон хоёр чулуунд харгалзах өнгийн оройнуудыг холбосон ирмэг тодорхойлно. Ингэхэд G графын орой бүрийн зэрэг 4 байна. Иймд Эйлерийн теоремоор G -ийн компонент бүр нь тэгш тооны ирмэгтэй бөгөөд Эйлерийн цикл замтай байна. Эйлерийн цикл зам бүрийн ирмэгүүдийг улаан ба хөх өнгөөр сөөлжилж будъя. Ингэхэд орой бүрийн 2 ирмэг нь улаан, 2 ирмэг нь хөхөөр будагдсан байна. Энэхүү будалт нь бидний хүссэн S -ийн хуваалтыг өгөх нь ойлгомжтой юм.

Бодлого 4. $n > 1$ бүхэл тоо. Бүгдээрээ ялгаатай өндөрт байрласан n^2 зогсоол уул өөд байрласан байв. A ба B компаниуд тус бүр k ширхэг дүүжин тэрэг ажиллуулдаг; аль ч дүүжин тэрэг нэг буудлаас нөгөө буудал руу (өөр буудлаар дамжихгүйгээр) дээшээ өгсдөг. A компанийн дүүжин тэргүүд k ялгаатай эхлэлийн цэгтэй бөгөөд k ялгаатай төгсгөлийн цэгтэй, түүнчлэн аль өндрөөс эхэлсэн дүүжин тэрэг нь илүү өндөрт очдог. B компанийн дүүжин тэргүүдийн хувьд мөн ижил нөхцөл биелдэг. Хэрвээ аль нэг доод буудлаас өөр нэг дээд буудал руу нэг компанийн нэг эсвэл хэсэг дүүжин тэргээр дамжин хүрч болдог бол энэ хоёр буудлыг тухайн компаниар холбогдсон гэе. Хоёр компаниар нэгэн зэрэг холбогдсон хоёр буудал зайлшгүй олддог байх хамгийн бага k натурал тоог ол.

Бодолт. Хариу: $k = n^2 - n + 1$.

Эхлээд $k \leq n^2 - n$ үед хоёр компаниар холбогдсон хос байхгүй байж болохыг харуулъя.

A компани зөвхөн $(i, i+1)$, $n \nmid i$ байх буудлуудыг холбодог гэе. Тэгвэл A компаниар холбогддог буудлууд нь $\lceil i/n \rceil = \lceil j/n \rceil$ нөхцөлийг хангах (i, j) хосууд байна.

B компани зөвхөн $(i, i+n)$, $1 \leq i \leq n^2 - n$ байх буудлуудыг холбодог гэе. Тэгвэл B компаниар холбогддог буудлууд нь $i \equiv j \pmod{n}$ нөхцөлийг хангах (i, j) хосууд байна. Мэдээж ямар ч (i, j) хос дээрх нөхцөлийг зэрэг хангахгүй тул хоёр компаниар зэрэг холбогдсон хоёр буудал олдохгүй.

Одоо $k = n^2 - n + 1$ үед хоёр компаниар нэгэн зэрэг холбогддог хоёр буудал олдохыг харуулъя. Аливаа $1 \leq i \leq t-1$ -ийн хувьд a_i ба a_{i+1} буудлууд холбогдсон ба a_1 -д ирдэг A -ийн дүүжин тэрэг байдаггүй, a_t -ээс хөдөлдөг дүүжин тэрэг байдаггүй бол $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ буудлуудыг A -гинж гэе. B -гинж-ийг яг адилаар тодорхойлъё. Ингэхэд буудал бүр яг нэг A ба B -гинжид харьяалагдана. A -ийн бүх төгсгөлийн буудлууд ялгаатай тул $n^2 - k = n - 1$ буудал төгсгөлийн буудал болохгүй. Эдгээр тус бүрдээ нэг A -гинжийн эхлэл болох тул $n - 1$ ширхэг A -гинж байна. Үүнтэй адилаар $n - 1$ ширхэг B -гинж байна. Иймд $(n - 1)^2$ ширхэг A, B гинжийн хос байна. Иймд n^2 буудлаас ядаж 2 нь нэг ижил A, B гинжийн хосод харьяалагдана. Эдгээр буудлууд нь A, B компаниар нэгэн зэрэг холбогдоно.

Бодлого 5. $n > 1$ ширхэг карттай багц хөзөр өгөгдөв. Карт тус бүр дээр ямар нэг натурал тоо бичигдсэн. Энэ багц хөзрийн аль ч хоёр карт дээр бичигдсэн тоонуудын арифметик дундаж нь нэг эсвэл хэсэг карт дээр бичигдсэн тоонуудын геометр дундаж болдог чанартай байв. Ямар n -ийн хувьд эдгээр картууд дээр бичигдсэн тоонууд бүгд тэнцүү гэж гарах вэ?

Бодолт. Аливаа $n > 1$ -ийн хувьд картууд дээр бичигдсэн тоонууд тэнцүү гэж харуулъя. Эсрэгээс нь бүгд тэнцүү биш $a_1, \dots, a_n$ тоонууд картууд дээр бичигдсэн ба бодлогын нөхцөлийг хангадаг гэе. Хэрвээ $d = (a_1, \dots, a_n) > 1$ бол $\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангана. Иймд $d = 1$ гэж үзэж болно.

$a_m = \max\{a_1, \dots, a_n\}$, $m \in \{1, \dots, n\}$ гэе. Бүгд тэнцүү биш тул $a_m \geq 2$ байна. a_m -ийн ямар нэг p анхны тоон хуваагчийг авч үзье. $d = 1$ тул $p \nmid a_i$ байх i дугаар олдоно. $a_k = \max\{a_i : p \nmid a_i\}$ гэе.

Одоо $b = \frac{a_m + a_k}{2}$ тоонууд бусад тоонуудын геометр дундаж болохгүй гэдгийг харуулъя. Эсрэгээс нь болдог гэвэл

$$p \nmid b = \sqrt[t]{a_{i_1} \cdot a_{i_2} \dots a_{i_t}}$$

тул аливаа $j \in \{1, \dots, t\}$ -ийн хувьд $p \nmid a_{i_j}$ буюу $a_{i_j} < a_k$ байна. Иймд

$$b = \sqrt[t]{a_{i_1} \dots a_{i_t}} \leq a_k < \frac{a_m + a_k}{2} = b$$

болж зөрчил үүсэв.

Бодлого 6. Дараах өгүүлбэр биелдэг байх c гэсэн эерэг бодит оршин байна гэж батал: Үүнд $n > 1$ бүхэл тоо ба аливаа ялгаатай хоёр цэгийн хоорондох зай нь ядаж 1 байх хавтгайн n ширхэг цэгээс тогтох S олонлог авахад S олонлогийг хуваадаг бөгөөд S -ийн аль ч цэгээс ядаж $cn^{-1/3}$ зайд байрлах ℓ шулуун оршин байна. (Хэрвээ ℓ шулуун S олонлогийн хоёр цэгийг холбосон хэрчмийг огтолдог бол хуваадаг гэж үзнэ.)

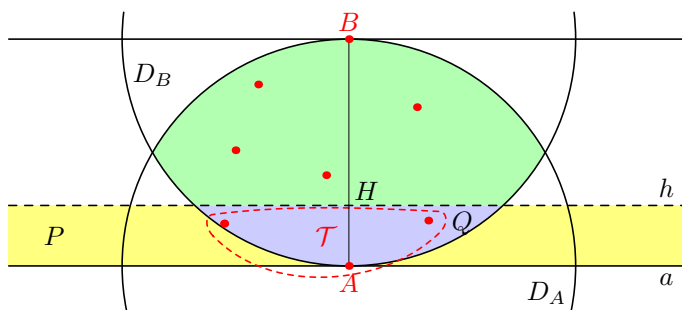
Жич: $cn^{-1/3}$ -ийг $cn^{-\alpha}$ -ээр сулруулсан аливаа үнэлгээнд $\alpha > 1/3$ -ийн утгаас хамаарч оноо өгөх боломжтой.

Бодолт. $c = \frac{1}{8}$ тоо бодлогын нөхцөлийг хангана гэж харуулъя. $\delta = \frac{1}{8}n^{-1/3}$ гэе. Аливаа ℓ шулуун ба X цэгийн хувьд X_ℓ -ээр X цэгийн ℓ шулуун дээрх проекцийг тэмдэглэе. Төстэй тэмдэглэгээг цэгүүдийн олонлогийн хувьд ашиглая.

Ямар нэг ℓ шулууны хувьд S_ℓ нь X, Y гэсэн хоёр хөрш цэг агуулдаг ба $XY = 2d$ гэж үзье. Тэгвэл ℓ шулуунд перпендикуляр XY хэрчмийн дундажийг дайрсан шулуун S -ийг хоёр хэсэгт хуваах ба S -ийн бүх цэг ℓ шулуунаас дор хаяж d зайд байрлана. Хэрвээ $d \geq \delta$ бол бидний хүссэн шулуун олдоно. Иймд эсрэгээс нь ийм цэгүүд олддоггүй гэж үзье.

S -ээс хоорондох зай нь хамгийн их байх A, B цэгүүдийг сонгоод $M = |AB|$ (AB нь S -ийн диаметр) гэе. Бодлогын нөхцөл ёсоор $M \geq 1$ байна. S нь A, B цэгүүдэд төвтэй M радиустай D_A, D_B дугуйнуудын огтлолцолд агуулагдана. S_ℓ проекц AB хэрчимд агуулагдах ба S_ℓ -ийн цэгүүд түүнийг $n - 1$ хэсэгт хуваана. Эдгээрийн урт бүгд 2δ -аас хэтрэхгүй тул

$$M < n \cdot 2\delta. \quad (1)$$



H цэгийг AB хэрчим дээр $AH = \frac{1}{2}$ байхаар сонгоё. A ба H цэгүүдийг дайрсан AB -д перпендикуляр шулуунуудыг харгалзан a ба h тэдгээрийн хооронд орших мужыг P гэе. $\mathcal{T} = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ ба $t = |\mathcal{T}|$ байг. Бидний авч үзсэн ёсоор AH -д S_ℓ -ийн дор хаяж $\lceil \frac{1}{2} : (2\delta) \rceil$ ширхэг цэг орно. Иймд

$$t \geq \frac{1}{4\delta} \quad (2)$$

$\mathcal{T}$ нь $Q = P \cap D_B$ сегментэд агуулагдана. Q -ийн Q_a проекцийн урт

$$2\sqrt{M^2 - \left(M - \frac{1}{2}\right)^2} < 2\sqrt{M}$$

байна. Нөгөө талаас аливаа $X, Y \in \mathcal{T}$ цэгүүдийн хувьд $XY \geq 1$ ба $X_\ell Y_\ell \leq \frac{1}{2}$ тул

$$X_a Y_a = \sqrt{XY^2 - X_\ell Y_\ell^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

болно. Эндээс $\mathcal{T}_a$ -аар үүсэх t цэг $2\sqrt{M}$ -ээс хэтрэхгүй урттай хэрчим дээр орших бөгөөд аль ч хоёрын хоорондох зай ядаж $\frac{\sqrt{3}}{2}$ байна. Иймд $2\sqrt{M} > (t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$ ба $M \geq 1$ тул

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M} \quad (3)$$

болно. (1), (2), (3) дахь үнэлгээг нэгтгэвэл

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta} \text{ буюу } 512n\delta^3 > 1$$

буюу бидний сонгосон δ -ийн утгад харшилж байна.

Монголын Математикийн 57-р Олимпиадын II Даваа

Хот/аймгийн Олимпиад

Олимпиадын II давааг 2021 оны 4 сарын 18 өдөр Ковид-19 цар тахлын улмаас онлайнаар цомхон зохион байгуулав.

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2021^{2021}$ нийлбэр бүтэн квадрат мөн үү?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Д2. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $AB = BC = CD$ ба $\angle ABC + \angle BCD = 240^\circ$ байдаг бол $\angle CAD$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д3. $a, b, c \geq 0$ тоонуудын хувьд $a + b + c \leq 1$ бол

$$(b + ac)^4 + c^2 \geq (ab + c)^4 + c^2 a^4$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Д4. 10×10 хэмжээтэй шатрын хөлгийн хаана ч морь тавьсан нэгээс олонгүй хүү иддэг байхаар хөлөгт хамгийн олондоо хэдэн хүү байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Ахлах ангилал

Бодлого А1. Бүхэл тоон коэффициенттой $f(X)$ олон гишүүнт авъя. Дурын бүхэл n тоо ба анхны p тооны хувьд $p \mid f(n)$ бол $p^2 \mid f(n)$ байдаг гэе. Дурын бүхэл k тооны хувьд $(X - k) \mid f(X)$ бол $(X - k)^2 \mid f(X)$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого А2. Баруун, зүүн талаасаа адилхан уншигдах үгийг *тэгш хэмтэй* гэе. Хоёр үсгээр бичигдэх дөрвөөс хэтрэхгүй ширхэг тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болдоггүй хамгийн бага урттай үгийн уртыг ол.

Жишээ: $abbaa$ үгийг $(abba)(a)$ гэж хоёр тэгш хэмтэй дэд үгэнд, эсвэл $(a)(bb)(aa)$ гэж гурван тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болно.

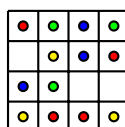
(Дэвшүүлсэн: Л. Буянтогтох)

Бодлого А3. ABC гурвалжны AB тал дээр M цэгийг, AC тал дээр N цэгийг авжээ. CM , BN хэрчмүүд D цэгт огтлолцдог ба BDM , BNC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин E цэгт огтлолцдог гэе. Хэрэв $\angle BDM = \angle ACB$ бол M , N , E цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого А4. 12×12 хөлгийн нүд бүрийн төвд шагай байрлах ба Будагч, Няслагч хоёр тоглоом тоглов. Эхлээд Будагч хэдэн өнгийг ашиглан шагай бүрийг ямар нэг өнгөөр будна. Дараа нь Няслагч ижил өнгөтэй, хооронд нь өөр шагай байрлаагүй хоёр шагайн аль нэгийг нөгөөд нь шилжүүлж, шилжсэн шагайг өөртөө авна. Няслагч энэ үйлдлийг хийх боломжгүй болох хүртлээ үргэлжлүүлэх ба үлдсэн бүх шагайг Будагч авна. Хэн олон шагайтай нь хожно. Будагч ямагт хожиж чаддаг бол хамгийн багадаа хэдэн өнгө хэрэгтэй вэ?

Тайлбар: шагайг нүдний яг голд байрлах бөгөөд хангалттай жижиг гэж үзнэ, өөрөөр хэлбэл, x , y , z гэж тэмдэглэсэн гурван шагайн хувьд y -ийн байрлах нүдний төв x ба z -ийн байрлах нүднүүдийн төвийг холбосон хэрчим дээр орших үед л y шагайг x , z шагайнуудын хооронд байна гэж үзнэ. Няслагчийн үйлдлийг *няслах* гэж нэрлэвэл доорх жишээнд (зарим шагайг нясалж авсны дараа) улаан шагайнуудыг хооронд нь нясалж болно, ногоон шагайнуудыг нясалж болохгүй, шар болон цэнхэр шагайнуудын хувьд заримыг нь зарим руу нь нясалж болно, заримыг нь болохгүй.



(Дэвшүүлсэн: Н. Ууганбаатар)

Бодолтууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2021^{2021}$ нийлбэр бүтэн квадрат мөн үү?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** Бүтэн квадрат биш.

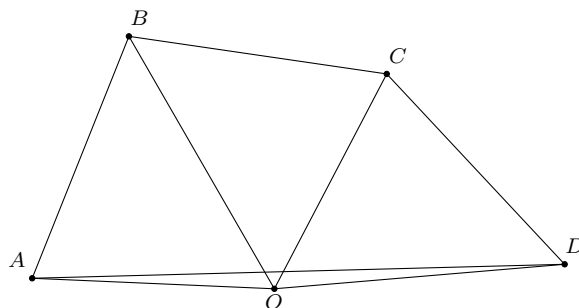
Өгсөн нийлбэрийг бүтэн квадрат гэж үзээд S гэж тэмдэглэе. Сондгой тооны квадратыг 8-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгнө гэдгийг санавал S сондгой гэдгээс $8 \mid S - 1$ болно.

Мөн түүнчлэн, хэрэв n сондгой тоо бол $8 \mid n^n - n$ байна. Иймд S ба $4 + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2021$ нийлбэр 8-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгнө. Сүүлийн нийлбэрийг 8-д хуваахад 5 үлдэгдэл өгөх учраас $8 \mid S - 5$ болж зөрчил гарна.

Бодлого Д2. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $AB = BC = CD$ ба $\angle ABC + \angle BCD = 240^\circ$ байдаг бол $\angle CAD$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. **Хариу:** $\angle CAD = 30^\circ$.



$\angle ABC$ болон $\angle BCD$ -ийн биссектриссүүд O цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл $\angle OBC + \angle OCB = 120^\circ$ болно. Эндээс $\angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ болно.

CO, BO биссектриссүүд ба $AB = BC = CD$ учраас $\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ ба $\angle COD = \angle BOC = 60^\circ$ болно. Иймд O цэг AD дээр оршино. $AC \perp OB$ учраас $\angle CAD = \angle CAO = 30^\circ$ байна.

Бодлого Д3. $a, b, c \geq 0$ тоонуудын хувьд $a + b + c \leq 1$ бол

$$(b + ac)^4 + c^2 \geq (ab + c)^4 + c^2 a^4$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Нөхцөлөөс $0 \leq a, b, c \leq 1$ байна. Иймд

$$(ab + c)^2 - (b + ac)^2 = (c^2 - b^2)(1 - a^2) \leq c^2(1 - a^2) \quad \text{ба}$$

$$(ab + c)^2 + (b + ac)^2 \leq (a + c)^2 + (b + a)^2 \leq (a + b + c)^2 + a^2 \leq 1 + a^2$$

байх тул

$$(ab + c)^4 - (b + ac)^4 \leq c^2(1 - a^2)((ab + c)^2 + (b + ac)^2) \leq c^2(1 - a^4)$$

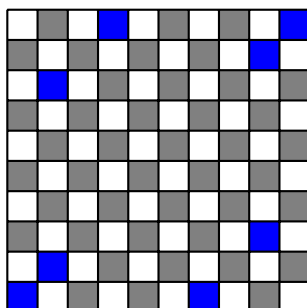
болж тэнцэтгэл биш батлагдав. Тэнцэтгэл зөвхөн $b = c = 0$ эсвэл $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ үед биелнэ.

Бодлого Д4. 10×10 хэмжээтэй шатрын хөлгийн хаана ч морь тавьсан нэгээс олонгүй хүү иддэг байхаар хөлөгт хамгийн олондоо хэдэн хүү байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** 16.

10×10 хөлгийн нүднүүдийг шатрын хөлөгтэй ижлээр цагаан ба саарал өнгөөр сөөлжлөн будья. Саарал нүдэнд байрлах хүүг саарал нүдэнд байрлах морь идэх боломжгүй тул саарал өнгийн нүдэнд өгсөн нөхцөлийг биелүүлдэг байхаар хамгийн олондоо хэдэн хүү байрлуулж болохыг олоход хангалттай. Саарал өнгийн 8 нүдэнд дараах байдлаар хүү байрлуулъя:

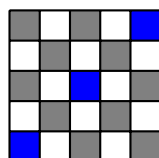


Зургаас харахад хөлгийн аль ч цагаан нүдэнд байрлуулсан морь хамгийн ихдээ 1 хүү иднэ. Иймд өгсөн нөхцөлийг биелүүлдэг байхаар 16 хүү хөлөгт байрлуулж чадна.

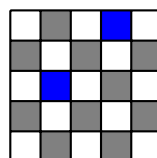
Одоо саарал өнгийн нүднүүдэд өгсөн нөхцөлийг биелүүлэх 9 хүү байрлуулж чадна гэж үзье. Хөлгийн аль ч 3×3 хэсгийн 2 буланд (дигоналчлан) байрлах 2 хүүг идэх морь хөлөгт байрлуулах боломжгүй:



Иймд A ба B хэлбэрийн 5×5 хэсэгт хамгийн олондоо харгалзан 3 ба 2 хүү байрлуулах боломжтой:

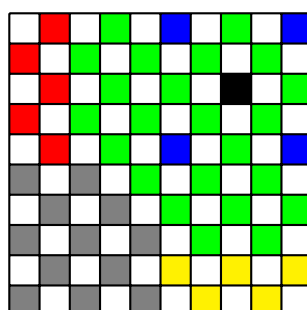


A



B

Түүнчлэн A хэлбэрийн 5×5 хэсэг 3 хүүтэй бол 1 хүү нь төвд, иймээс нөгөө 2 нь диагоналчлан эсрэг байрлана гэдгийг төвөггүй шалгаж чадна. Хөлөг 4 ширхэг 5×5 хэсгээс тогтох учраас хөлгийн баруун дээд булангийн 5×5 хэсгийг 3 хүүтэй гэж үзэж болно:



Ахлах ангилал

Бодлого A1. Бүхэл тоон коэффициенттой $f(X)$ олон гишүүнт авъя. Дурын бүхэл n тоо ба анхны p тооны хувьд $p \mid f(n)$ бол $p^2 \mid f(n)$ байдаг гэе. Дурын бүхэл k тооны хувьд $(X - k) \mid f(X)$ бол $(X - k)^2 \mid f(X)$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $(X - k) \mid f(X)$ гэе. Тэгвэл $f(X) = (X - k)g(X)$ гэж бичиж болно. Одоо $g(X) = g(k) + (X - k)h(X)$ гэж бичье. Дурын анхны p тооны хувьд $f(k + p) = p(g(k) + ph(k + p))$ гэдгээс $p \mid f(k + p)$ болно. Бодлогын нөхцөлөөс $p^2 \mid f(k + p)$ болох тул $p \mid g(k)$ байна. Энд p дурын байсан тул $g(k) = 0$ байна. Иймд $(X - k)^2 \mid f(X)$ байна.

Бодлого A2. Баруун, зүүн талаасаа адилхан уншигдах үгийг *тэгш хэмтэй* гэе. Хоёр үсгээр бичигдэх дөрвөөс хэтрэхгүй ширхэг тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болдоггүй хамгийн бага урттай үгийн уртыг ол.

Жишээ: $abbaa$ үгийг $(abba)(a)$ гэж хоёр тэгш хэмтэй дэд үгэнд, эсвэл $(a)(bb)(aa)$ гэж гурван тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болно.

(Дэвшүүлсэн: Л. Буянтогтох)

Бодолт. Хариу: 11.

Аль нэг үсэг нь хоёроос олонгүй орсон үгийг хоёроос хэтрэхгүй тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болно. Эндээс 5 урттай ямар ч үгийг хоёроос хэтрэхгүй тэгш хэмтэй дэд үгэнд хувааж болно. Иймд 10 урттай ямар ч үгийг дөрвөөс хэтрэхгүй тэгш хэмтэй үгэнд хувааж болно. Иймд дөрвөөс хэтрэхгүй тэгш хэмтэй үгэнд хуваагддаггүй 11 урттай үг олоход хангалттай. Жишээлбэл: *aababbaabab*.

Жич: Дөрвөөс хэтрэхгүй тэгш хэмтэй үгэнд хуваагддаггүй 11 урттай нийт дөрвөн үг байна:

aababbaabab, ababbaababb, babaabbabaa, bbabaabbaba.

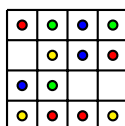
Бодлого А3. ABC гурвалжны AB тал дээр M цэгийг, AC тал дээр N цэгийг авжээ. CM, BN хэрчмүүд D цэгт огтлолцдог ба BDM, BNC гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин E цэгт огтлолцдог гэе. Хэрэв $\angle BDM = \angle ACB$ бол M, N, E цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. Ижил нумд тулсан учраас $\angle MEB = \angle MDB$, эсрэг нумд тулсан учраас $\angle BEN = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle MEB$ болж M, E, N цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

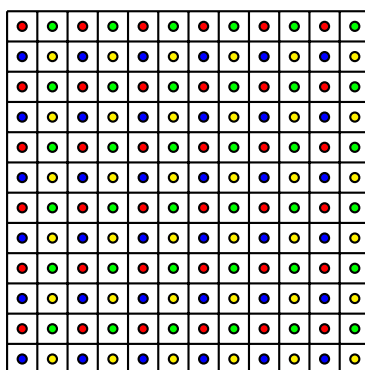
Бодлого А4. 12×12 хөлгийн нүд бүрийн төвд шагай байрлах ба Будагч, Няслагч хоёр тоглоом тоглов. Эхлээд Будагч хэдэн өнгийг ашиглан шагай бүрийг ямар нэг өнгөөр будна. Дараа нь Няслагч ижил өнгөтэй, хооронд нь өөр шагай байрлаагүй хоёр шагайн аль нэгийг нөгөөд нь шилжүүлж, шилжсэн шагайг өөртөө авна. Няслагч энэ үйлдлийг хийх боломжгүй болох хүртлээ үргэлжлүүлэх ба үлдсэн бүх шагайг Будагч авна. Хэн олон шагайтай нь хожно. Будагч ямагт хожиж чаддаг бол хамгийн багадаа хэдэн өнгө хэрэгтэй вэ?

Тайлбар: шагайг нүдний яг голд байрлах бөгөөд хангалттай жижиг гэж үзнэ, өөрөөр хэлбэл, x, y, z гэж тэмдэглэсэн гурван шагайн хувьд y -ийн байрлах нүдний төв x ба z -ийн байрлах нүднүүдийн төвийг холбосон хэрчим дээр орших үед л y шагайг x, z шагайнуудын хооронд байна гэж үзнэ. Няслагчийн үйлдлийг *няслах* гэж нэрлэвэл доорх жишээнд (зарим шагайг нясалж авсны дараа) улаан шагайнуудыг хооронд нь нясалж болно, ногоон шагайнуудыг нясалж болохгүй, шар болон цэнхэр шагайнуудын хувьд заримыг нь зарим руу нь нясалж болно, заримыг нь болохгүй.



(Дэвшүүлсэн: Н. Ууганбаатар)

Бодолт. Шагайг дараах маягаар будахад Няслагч огт нясалж чадахгүй тул дөрөв ба түүнээс дээш өнгөөр будвал Будагч хожно.



Одоо гурваас хэтрэхгүй өнгөөр будвал Няслагч үргэлж хожиж чадна гэж харуулъя. Зэргэлдээ мөр эсвэл зэргэлдээ баганад байгаа шагайнуудын хооронд өөр шагай байхгүй гэдгийг анзааръя.

Улаан, цэнхэр, ногоон өнгөөр будсан гэе.

Ямар нэг A мөрөнд гурван өнгө гурвуулаа орсон бол түүний зэргэлдээ мөрийг A мөр рүү шилжүүлж болох ба үүнийг давтсаар ганц A мөрийг үлдээж чадна. Иймд Няслагч хожно.

Ямар нэг A мөрөнд дан нэг, жишээлбэл зөвхөн улаан, өнгө орсон бол бусад бүх мөрний улаан шагай A мөрний улаан шагайтай зэргэлдээ багананд орших тул тэднийг A мөр рүү шилжүүлж чадна. Дараа нь A мөрний бүх шагайг сүүлийн багананд шилжүүлье. Одоо сүүлийн баганыг мартвал, бусад шагайнууд хоёр өнгөөр будагдсан ба аль нэг мөрөнд хоёр өнгө орсон бол тэр мөрийг үлдээж, бүх мөрөнд дан өнгө орсон бол нэг багана үлдээж нясалж чадна. Иймд Няслагч хожно.

Иймд мөр болгонд яг хоёр өнгө орсон гэе. Эхний хоёр мөрийг авч үзвэл нийт 3 өнгө байгаа тул ижил, жишээлбэл ногоон, өнгө олдоно. 1-р мөрний ногоон шагайнуудыг 2-р мөр рүү шилжүүлбэл 1-р мөрөнд дан нэг өнгө үлдэх тул 1 шагай үлдтэл нясалж чадна. Үүнийг 2, 3-р мөрөнд хийвэл 2-р мөрөнд 1 шагай үлдэнэ. Ингэж явсаар сүүлийн мөрнөөс бусад мөрөнд 1 шагайтай болгож чадна. Иймд Няслагч хожно.

Монголын Математикийн 57-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Олимпиад

Олимпиадын зохион байгуулалт

2021 оны 2-р сарын 17-нд МУИС-ийн захирлын албан үүргийг түр орлон гүйцэтгэгч Б. Очирхуягийн санаачлагаар МУИС дээр төвлөрсөн олимпиадын хороод хуралдан Ковид-19 цар тахлын улмаас тасалдаад байсан төрөлжсөн олимпиадуудыг зохион байгуулах хүсэлтийг БШУЯ-нд хандан гаргасан юм. Уг хүсэлтийг хүлээн авч БШУЯ-ны Сайдын 2021 оны А/142 дугаар тушаал гарч 2020-2021 оны хичээлийн жилд Олон Улсын Математикийн Олимпиадад оролцох суралцагчдын цахим сонгон шалгаруулалтыг орон даяар зохион байгуулахаар болсон юм. ММОХ-ын мэргэжлийн хороо хуралдан тус сонгон шалгаруулалтын хүрээнд ММО-57-г дунд, ахлах ангилалд бүхэлд нь цахим хэлбэрээр зохион байгуулахаар болсон юм.

Сонгон шалгаруулалтын бэлтгэл даваанд 21 аймаг, нийслэлээс нийт 3000 гаруй сурагч, үндсэн даваанд нийт 1291 сурагч оролцов. ММО-57 буюу тус олимпиадын эцсийн даваанд 21 аймаг, 7 дүүргээс дунд ангилалд 76, ахлах ангилалд 72 нийт 148 сурагч шалгаран оролцов.

Олимпиадын I, II шатны тестийн бодлогуудыг МУИС-ийн ХШУИС-ийн багш Б. Батбаясгалан, МУБИС-ийн багш Ш. Доржсэмбэ нар болон бусад гишүүд, үндсэн давааны бодлогуудыг доктор Ү. Отгонбаяр ахлагчтай, доктор Г. Баярмагнай, доктор Т. Хулан, доктор Л. Буянтогтох нарын бүрэлдэхүүнтэй бодлогын комисс сонгов.

Олимпиадын засалтын комиссыг IMO багийн дэд ахлагч, МУИС-ийн багш доктор У. Батзориг ахлан ажиллалаа. 3 долоо хоногийн туршид үндсэн ажлынхаа хажуугаар IMO сорилгууд болон ММО-57 олимпиадад оролцсон сурагчдын бодолтыг засаж өндөр ачаалалтай ажилласан бодлого засалтын комиссын нийт гишүүдэд хувийн зүгээс гүн талархал илэрхийлье. Үүний дундаас бусдыгаа манлайлан идэвхи зүтгэлтэй ажилласан Т. Базар, Э. Оргил-Эрдэнэ нарт тусгайлан талархал илэрхийлж байна.

Олимпиадын хүрээнд “Олимпиадын үеэр зурсан зураг” сэдэвт зургийн уралдаан зохион байгуулж оролцогч сурагчид болон багш нарын олонхын саналаар хоёр зургийг тэргүүн байрт шалгаруулж мөнгөн шагналаар шагнав. Тэргүүн байр эзэлсэн сурагчдын нэрсийг дүрэм ёсоор нийтэд зарлаагүй болно. ММО-57-ын медалийг тус тэмцээнд оролцсон СХД-ийн 62-р сургуулийн сурагч Б. Оюун-Эрдэнийн зургаас санаа авч бүтээсэн юм. Олимпиадын медал, батламжийг хэвлүүлэх ажлыг хариуцан гүйцэтгэсэн ММОХ-ын санхүү хариуцсан сайн дурын ажилтан Г. Номинд нийт математикчдынхаа өмнөөс талархал илэрхийлье.

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Дунд ангиллын бодлогууд

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
Д1	Тооны онол	ММОХ	ММОХ
Д2	Геометр	Т. Хулан	Т. Хулан, Б. Баяржаргал
Д3	Комбинаторик	Ү. Отгонбаяр	Э. Гантөгс, Х. Санжаахүү
Д4	Геометр	Т. Хулан	Ш. Доржсэмбэ, Б. Сандагдорж
Д5	Тооны онол	Ү. Отгонбаяр	Э. Гантөгс, Э. Оргил-Эрдэнэ, Т. Базар
Д6	Алгебр	Г. Баярмагнай	Ү. Отгонбаяр

Ахлах ангиллын бодлогууд

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
A1	Алгебр	Ш. Доржсэмбэ	Ш. Доржсэмбэ, Л. Буянтогтох
A2	Геометр	Т. Хулан	Т. Базар
A3	Комбинаторик	Б. Батбаясгалан	Б. Батбаясгалан, Х. Санжаахүү
A4	Геометр	У. Батзориг	Т. Хулан, Б. Баяржаргал
A5	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Л. Буянтогтох, Х. Санжаахүү
A6	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай

Д1 бодлогын тухайд бодлогын нөхцөл дутуу байсан тул эсрэг жишээ гарсан юм. Цар тахлын улмаас бодлогын комисс биечлэн уулзах боломжгүй байсан нь дээрх алдаа гарахад нөлөөлсөн гэж ММОХ-ын мэргэжлийн хороо дүгнэж байна. Цаашид бодлого дэвшүүлэх, бодлого сонгох ажлыг илүү найдвартай, алдаа багатай болгох тал дээр бид санаачлага гарган ажиллах болно.

Монголын Математикийн 57-р олимпиадын дүн

Дунд ангилал

№᠑	Овог	Нэр	Сургууль	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
1	Пүрэвдорж	Ханбилэг	Эрин Эверест Инт.	7	7	1	7	6	0	28	Алт
2	Намнансүрэн	Дөлгөөн	11-р сургууль	5	7	3	7	5	0	27	Мөнгө
3	Наранбаатар	Сувд	11-р сургууль	5	7	0	7	7	0	26	Мөнгө
4	Алтанхуяг	Болд-Эрдэнэ	Эрдмийн сан (ОР)	5	7	0	7	7	0	26	Мөнгө
5	Билгүүн	Дугаржанцан	Эрдмийн далай (ХӨ)	5	0	7	6	7	0	25	Хүрэл
6	Батбаясгалан	Ундрал	1-р сургууль	0	7	4	7	7	0	25	Хүрэл
7	Наранбаатар	Болор	11-р сургууль	5	7	0	7	6	0	25	Хүрэл
8	Дагвадорж	Мөнх	1-р сургууль	5	0	3	7	7	0	22	Хүрэл
9	Мөнх-Эрдэнэ	Энхтөр	Эрдмийн далай (ХӨ)	5	0	2	7	7	0	21	Хүрэл
10	Гансүх	Дөлгөөн	1-р сургууль	5	0	1	7	7	0	20	Хүрэл
11	Буянмөнх	Энхрийлэн	Орчлон	5	0	0	7	7	0	19	Хүрэл
12	Энхсайхан	Уянга	Орчлон	5	0	0	7	7	0	19	Хүрэл
13	Хавалболат	Нурсолтан	11-р сургууль	5	0	0	7	7	0	19	Хүрэл
14	Болдсүх	Маралмаа	“ЭЦДС” ахлах (ОР)	5	0	0	7	7	0	19	Хүрэл

Ахлах ангилал

№	Овог	Нэр	Сургууль	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
1	Мөнхбат	Өнөболд	1-р сургууль	7	7	7	7	2	3	33	Алт
2	Мөнхзул	Анд	11-р сургууль	7	7	7	7	3	1	32	Мөнгө
3	Отгонбаяр	Мишээл	Шинэ Монгол	7	7	7	7	3	1	32	Мөнгө
4	Дэлгэрдалай	Энэрэлт	Сант	7	7	7	7	3	1	32	Мөнгө
5	Болдбаатар	Хантүшиг	11-р сургууль	7	7	7	7	2	2	32	Мөнгө
6	Батжаргал	Адъяатөмөр	1-р сургууль	6	7	7	7	1	0	28	Хүрэл
7	Цогтгэрэл	Сайханбилэг	Сант	7	7	7	3	3	1	28	Хүрэл
8	Эрдэнэтөгс	Гэрэлхүү	Эрдмийн сан (ОР)	7	7	0	7	4	1	26	Хүрэл
9	Бат-Амгалан	Билэгдэмбэрэл	11-р сургууль	7	7	2	7	1	2	26	Хүрэл
10	Батболд	Батсамбуу	Олонлог	7	7	2	7	2	0	25	Хүрэл
11	Ганболд	Далайцэрэн	Эрдмийн далай (ХӨ)	7	7	6	0	4	0	24	Хүрэл
12	Батбаяр	Билгүүн	Сант	7	7	4	0	3	2	23	Хүрэл
13	Батцэнгэл	Мөнхцэлмэг	1-р сургууль	7	7	2	0	3	2	21	Хүрэл
14	Эрдэнэбилэг	Өнөртүвшин	1-р сургууль	7	7	4	0	2	1	21	Хүрэл

Уран бодолтын шагнал

Олимпиадын комиссын шийдвэрээр дунд ангиллын 6-р бодлогыг ганцаар бодсон Дархан-Уул аймгийн Оюуны-Ирээдүй цогцолбор сургуулийн сурагч Б. Төрхүүд уран бодолтын тусгай шагнал олгов.

Багийн дүн

Энэ удаад багийн дүн гаргасангүй. Улсын математикийн 55-р олимпиадад багийн дүнгээр тэргүүлсэн багууд нэмэлт эрхээ 58-р олимпиадад ашиглахаар болов.

ММОХ-ын гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалан

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. Ямар ч натурал m, n тоонуудын хувьд $m^4 + 2mn + n^2 - 2021$ тоог хэдэн дараалсан натурал тооны үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: ММОХ)

Бодлого Д2. ABC гурвалжны дотор талд $AD = DC$ байх D цэг авав. BC талын дундаж цэгийг M гээ. B оройгоос DM шулуун руу буулгасан перпендикуляр шулуун AC шулууныг N цэгт огтолно. N цэгээс CD шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг L гэвэл A, B, L, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д3. $n \geq 3$ гээ. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоонуудын нийлбэрийг $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ гээд

дурын $1 \leq k \leq n$ дугаарын хувьд $0 \leq S - a_k \leq 1$ байна (*)

гэсэн нөхцөлийг авч үзье. Мөн $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ба $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ гээ.

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд (*) нөхцөлийг хангахаар гүйх үед M тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.
- (ii) $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд (*) нөхцөлийг хангахаар гүйх үед m тооны авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Д4. ABC гурвалжны AB тал дээрх D цэг ба BC тал дээрх E цэгийн хувьд $|AD| = |CE|$ ба $2|DE| = |AC|$ нөхцөлүүд биелдэг байв. Тэгвэл BDE гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусаас 2 дахин бага гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого Д5. $p \geq 3$ анхны тоо гэе. Багш самбарт $n = 2p$ ширхэг бүхэл тоо бичив. Сурагч эндээс нэг эсвэл түүнээс олон хэсэг тоо сонгон авч тэдний нийлбэрийг n -д хуваахад гарсан үлдэгдлийг дэвтэртээ бичнэ. Бүх боломжит сонголтод харгалзах $2^n - 1$ ширхэг үлдэгдлийг бичихэд дэвтэрт $1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n-1$ үлдэгдлүүд ижил тоотой бичигджээ.

Багшийн бичсэн тоонуудын нийлбэрийг p -д хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого Д6. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab}{1 + |a - b|} \geq \frac{2bc}{1 + |b + c|} + \frac{2ca}{1 + |c + a|}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Ахлах ангилал

Бодлого А1. $1 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ байх бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{(1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2}{n + 1} \geq 2 \cdot \frac{d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + nd_n^2}{n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: С. Доржсэмбэ)

Бодлого А2. D оройдоо мохоо өнцөгтэй, AB ба CD сууриудтай $ABCD$ трапецын AC, BD диагоналиуд O цэгт огтлолцоно. AB суурьтай параллель, O цэгийг дайрсан шулуун BCO гурвалжныг багтаасан тойрогтой P цэгт огтлолцоно. Хэрэв ADO, BCO гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин Q цэгт огтлолцдог бол PQ шулуун BC хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого А3. $0 < a_1, a_2, \dots, a_{2021} < 2$ бөгөөд $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} = 2021$ байх ямар ч бодит тоон $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ дарааллын хувьд $0 < b_1, b_2, \dots, b_n < 2$ бөгөөд $b_1 + b_2 + \dots + b_n = n$ байх бодит тоон $b_1, b_2, \dots, b_n$ дараалал дараах нөхцөлийг хангадаг байхаар олддог байх натурал n тооны хамгийн бага утгыг ол. Үүнд

$$a_1, a_2, \dots, a_{2021}, b_1, b_2, \dots, b_n$$

дарааллын ямар нэг $c_1, c_2, \dots, c_{n+2021}$ сэлгэмлийн хувьд

$$\begin{cases} 1 \leq l \leq n + 2021 \text{ байх сондгой } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \dots + c_l \leq l, \\ 1 \leq l \leq n + 2021 \text{ байх тэгш } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \dots + c_l \geq l \end{cases} \quad (*)$$

байна.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодлого А4. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд r радиустай тойрог багтаж байв. ABC ба ACD гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг тус тус J ба K гээд AJK ба CJK гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг тус тус P ба Q гээ. Тэгвэл

$$|PQ| = |AC| - \frac{S_{AJCK}}{r}$$

гэж батал. Энд S_{AJCK} -аар $AJCK$ дөрвөн өнцөгтийн талбайг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого А5. Натурал a, b тоонуудын хувьд $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ хэлбэртэй бичигдэх рационал тоог *сайн* тоо гээ.

(i) Дурын натурал $n \geq 4$ тоог хэдэн ширхэг сайн тооны нийлбэрт тавьж болно гэж харуул.

(ii) $n = 57$ тоог хамгийн цөөндөө хэдэн ширхэг сайн тооны нийлбэрт тавьж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого А6. α, β ялгаатай бодит тоонууд байг. Бодит тоон $A_1, A_2, \dots$ дарааллыг $n \geq 1$ хувьд

$$A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

гэж тодорхойлъя. Ямар нэг анхны p тооны хувьд A_p, A_{p+1}, A_{p+2} гишүүд бүхэл тоо байдаг бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл гэдгийг үзүүл.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолтууд

Дунд ангилал

Бодлого Д1. Ямар ч натурал m, n тоонуудын хувьд $m^4 + 2mn + n^2 - 2021$ тоог хэдэн дараалсан натурал тооны үржвэрт тавьж болохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: ММОХ)

Бодолт. Бодлого алдаатай байсан байна, бүх оролцогчдоосоо хүлцэл өчье!

Дараалсан гурван тооны үржвэр 3-т хуваагдах тул $m^4 - m^2 = m[(m-1)m(m+1)]$ тоо 3-т хуваагдана. Иймд $N = m^4 + 2mn + n^2 - 2021 = m^4 - m^2 + (m+n)^2 - 2021$ тоог 3 болон түүнээс олон дараалсан натурал тооны үржвэр гэж үзвэл $N \equiv 0 \pmod{3}$ гэдгээс $(m+n)^2 \equiv 2 \pmod{3}$ болж зөрчил үүснэ. Иймд N тоог 3 болон түүнээс олон дараалсан натурал тооны үржвэрт тавьж болохгүй.

$m = 1, n = 2020$ үед $N = 2020 \cdot 2021$ болох тул N тоо дараалсан хоёр натурал тооны үржвэрт тавигдах m, n натурал тоонууд олдоно.

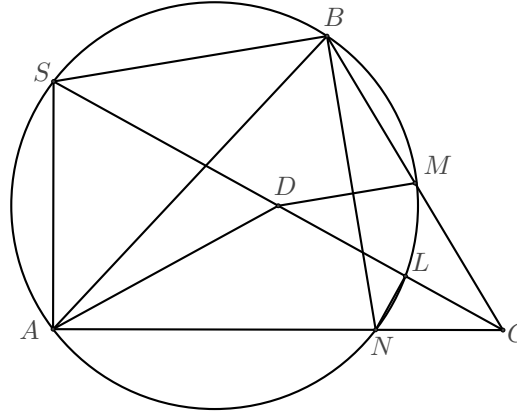
Мөн дурын $m \geq 7$ хувьд $k = m^4 - m^2 - 2021$ ба $n = k - m$ гэвэл $k \geq n \geq 1$ ба $N = k(k+1)$ болно. Иймд төгсгөлгүй олон натурал m, n хосын хувьд N тоо дараалсан хоёр натурал тооны үржвэрт тавигдана.

Бодлого Д2. ABC гурвалжны дотор талд $AD = DC$ байх D цэг авав. BC талын дундаж цэгийг M гэе. B оройгоос DM шулуун руу буулгасан перпендикуляр шулуун AC шулууныг N цэгт огтолно. N цэгээс CD шулуун руу буулгасан перпендикулярын суурийг L гэвэл A, B, L, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. CD цацраг дээр $SD = DC$ байх S цэг авъя. Тэгвэл $\angle SAN = 90^\circ = \angle SLN$ болох ба S, L, N, A цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

D нь SC -ын дундаж, M нь BC -ын дундаж учраас $DM \parallel SB$ болж $\angle SBN = 90^\circ$ болно. Эндээс B, S, L, N, A цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.



Бодлого Д3. $n \geq 3$ гэе. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бодит тоонуудын нийлбэрийг $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ гээд

$$\text{дурын } 1 \leq k \leq n \text{ дугаарын хувьд } 0 \leq S - a_k \leq 1 \text{ байна} \quad (*)$$

гэсэн нөхцөлийг авч үзье. Мөн $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ба $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ гэе.

- (i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд $(*)$ нөхцөлийг хангахаар гүйх үед M тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.
- (ii) $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд $(*)$ нөхцөлийг хангахаар гүйх үед m тооны авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт.

- (i) $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ үед $M = 1$ байна.

Үргэлж $M \leq 1$ гэж харуулъя. Эсрэгээс нь $(*)$ хангадаг ямар нэг $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд $M > 1$ байдаг гэе. Одоо $T = S - m - M$ гэвэл $(*)$ нөхцөлөөс $T + M \leq 1$ буюу $T \leq 1 - M < 0$ болно. Эндээс $m \leq \frac{1}{n-2}T < 0$ болох тул $m + T < 0$ болж $(*)$ нөхцөлийг зөрчинө. Иймд M тооны авч болох хамгийн их утга 1 байна.

(ii) $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд (*) нөхцөлийг хангадаг бол

$$b_1 = \frac{1}{n-1} - a_1, \quad b_2 = \frac{1}{n-1} - a_2, \quad \dots, \quad b_n = \frac{1}{n-1} - a_n$$

тоонууд мөн (*) нөхцөлийг хангана. Иймд (i) хэсгээс $\frac{1}{n-1} - m \leq 1$ байх тул $m \geq \frac{1}{n-1} - 1$ байна.

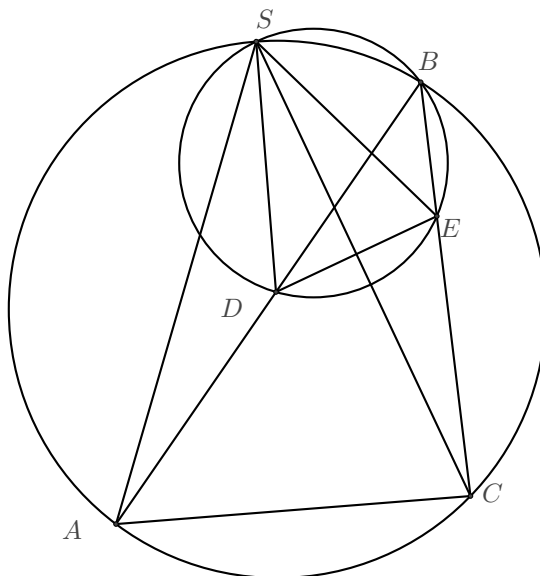
$\left(\frac{1}{n-1} - 1, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$ тоонуудын хувьд $m = \frac{1}{n-1} - 1$ байна. Иймд m тооны авч болох хамгийн бага утга $\frac{1}{n-1} - 1 = -\frac{n-2}{n-1}$ байна.

Бодлого Д4. ABC гурвалжны AB тал дээрх D цэг ба BC тал дээрх E цэгийн хувьд $|AD| = |CE|$ ба $2|DE| = |AC|$ нөхцөлүүд биелдэг байв. Тэгвэл BDE гурвалжныг багтаасан тойргийн радиус ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн радиусаас 2 дахин бага гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. BDE гурвалжныг багтаасан тойрог дээр $|SD| = |SE|$ байх S цэг авъя. $\angle BES = \angle BDS$ учраас $\angle SDA = \angle SEC$ байна. Мөн $|AD| = |EC|$ ба $|SD| = |SE|$ тул $\triangle SDA = \triangle SEC$ байна.

Эндээс $\angle ASC = \angle DSE = \angle DBE = \angle ABC$ болох тул S нь ABC гурвалжинг багтаасан тойрог дээр оршино. $\triangle DSE \sim \triangle ASC$ ба төсөөгийн харьцаа $\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ болно. Иймд радиусуудын харьцаа $\frac{1}{2}$ мөн байна.



Бодлого Д5. $p \geq 3$ анхны тоо гэе. Багш самбарт $n = 2p$ ширхэг бүхэл тоо бичив. Сурагч эндээс нэг эсвэл түүнээс олон хэсэг тоо сонгон авч тэдний нийлбэрийг n -д хуваахад гарсан үлдэгдлийг дэвтэртээ бичнэ. Бүх боломжит сонголтод харгалзах $2^n - 1$ ширхэг үлдэгдлийг бичихэд дэвтэрт $1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n-1$ үлдэгдлүүд ижил тоотой бичигджээ.

Багшийн бичсэн тоонуудын нийлбэрийг p -д хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Самбарт бичигдсэн тоонуудыг $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэе.

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ гээд $A \subseteq X$ индекстэй тоонууд сонгосон бол $\sigma(A) = \sum_{k \in A} a_k \pmod{n}$ үлдэгдэл харгалзуулна. Энд $\sigma(\emptyset) = 0$ гэж үзье.

Мөн $0 \leq k \leq n-1$ хувьд

$$S_k = \{A \subseteq X \mid \sigma(A) \equiv k \pmod{n}\}$$

гэе. Тэгвэл $A \subseteq X$ дэд олонлог бүр яг нэг S_k ($0 \leq k < n-1$) олонлогт орно. Бодлогын нөхцөлөөс $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ бол $|S_k| = |S_1|$ байна. Одоо

$$T = \sum_{A \subseteq X} \sigma(A) \pmod{n}$$

нийлбэрийг авч үзье. Багшийн бичсэн тоонуудын нийлбэрийг n -д хуваахад гарсан үлдэгдлийг $N = \sigma(X) = a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{n}$ гэе.

Нэг талаас $k \in X$ бүр яг 2^{n-1} дэд олонлогт орох тул $T \equiv 2^{n-1}N \pmod{n}$ байна. Нөгөө талаас

$$T \equiv \sum_{k=0}^{n-1} k|S_k| \equiv 0|S_0| + p|S_p| + \left(\frac{(n-1)n}{2} - p\right)|S_1| \pmod{n}$$

байна. Иймд $2^{n-1}N \equiv p|S_p| + 2(p-1)p|S_1| \pmod{n}$ байх ба p сондгой тул $N \equiv 0 \pmod{p}$ байна.

Бодлого Д6. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab}{1 + |a-b|} \geq \frac{2bc}{1 + |b+c|} + \frac{2ca}{1 + |c+a|}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab}{1 + |a-b|} + \frac{2bc}{1 + |b-c|} + \frac{2ca}{1 + |c-a|} \geq 0$$

гэж батлахад хангалттай. Энд

$$x = |b-c|, \quad y = |c-a|, \quad z = |a-b|$$

гэвэл $x, y, z \geq 0$ байна. Мөн $(ab) \cdot (bc) \cdot (ca) = (abc)^2 \geq 0$ тул $ab \geq 0$ гэж үзэж болно. Энэ үед, $x+y = |b-c| + |c-a| \geq |a-b| = z$ тул,

$$\frac{ab}{1+z} \geq \frac{ab}{(1+x)(1+y)}$$

байна. Эндээс

$$a^2 + b^2 + \frac{2ab}{1+z} \geq \frac{a^2}{(1+y)^2} + \frac{b^2}{(1+x)^2} + \frac{2ab}{(1+y)(1+x)} = \left(\frac{a}{1+y} + \frac{b}{1+x}\right)^2$$

болно. Иймд

$$A = \left(\left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{1+z}\right) - \left(\frac{a}{1+y} + \frac{b}{1+x}\right)^2\right) + \left(c + \frac{a}{1+y} + \frac{b}{1+x}\right)^2 \geq 0$$

байна. Тэнцэтгэл зөвхөн $a = b = c = 0$ үед биелнэ. Үнэхээр $a = b = c = 0$ үед тэнцэтгэл биелэх нь илт тул одоо тэнцэтгэл биелдэг гэж үзээд $a = b = c = 0$ гэж харуулъя. Тэнцэтгэл биелдэг бол

$$a^2 = \frac{a^2}{(1+y)^2} \quad \text{ба} \quad b^2 = \frac{b^2}{(1+x)^2} \quad \text{гэдгээс} \quad a(c-a) = 0 \quad \text{ба} \quad b(b-c) = 0 \quad \text{байна.}$$

$a = b = 0$ үед $A = c^2 = 0$ гэдгээс $c = 0$ байна.

$a = 0, b = c$ үед $A = 4b^2 = 0$ гэдгээс $b = c = 0$ байна.

$a = c, b = 0$ үед $A = 4a^2 = 0$ гэдгээс $a = c = 0$ байна.

$a = b = c$ үед $A = 9a^2 = 0$ гэдгээс $a = b = c = 0$ байна.

Ахлах ангилал

Бодлого А1. $1 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ байх бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{(1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2}{n + 1} \geq 2 \cdot \frac{d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + nd_n^2}{n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: С. Доржсэмбэ)

Бодолт.

Макларен ашигласан бодолт: $d_0 = 1$ гэвэл бодлогын нөхцөлөөс дурын $1 \leq j \leq n$ хувьд $jd_j \leq d_0 + d_1 + \dots + d_{j-1}$ байх тул

$$\sum_{j=1}^n jd_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{j-1} d_i d_j = \sum_{0 \leq i < j \leq n} d_i d_j$$

байна. Макларены тэнцэтгэл бишээс

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} d_i d_j \leq \binom{n+1}{2} \left(\frac{\sum_{k=0}^n d_k}{n+1} \right)^2 = \frac{n}{2(n+1)} (1 + d_1 + d_2 + \dots + d_n)^2$$

тул тэнцэтгэл биш батлагдлаа. Тэнцэтгэл зөвхөн $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ үед биелнэ.

Индукц ашигласан бодолт: $n = 1$ үед $0 \leq d_1 \leq 1$ тул $(1 + d_1)^2 = 1 + 2d_1 + d_1^2 \geq 4d_1^2$ үнэн.

$n \geq 2$ ба $n - 1$ үед үнэн гэе. Энд

$$S = 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} \quad \text{ба} \quad D = d_1^2 + 2d_2^2 + \dots + (n-1)d_{n-1}^2$$

гэвэл $(n-1)S^2 \geq 2nD$ ба одоо $n(S + d_n)^2 \geq 2(n+1)(D + nd_n^2)$ гэж харуулах хэрэгтэй.

Нөхцөлөөс $D \geq (1 + 2 + \dots + (n-1))d_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}d_n^2$ тул

$$(n-1)nS^2 \geq 2n^2D \geq 2(n^2-1)D + (n-1)nd_n^2$$

байна. Мөн $S \geq nd_n$ болохыг ашиглан

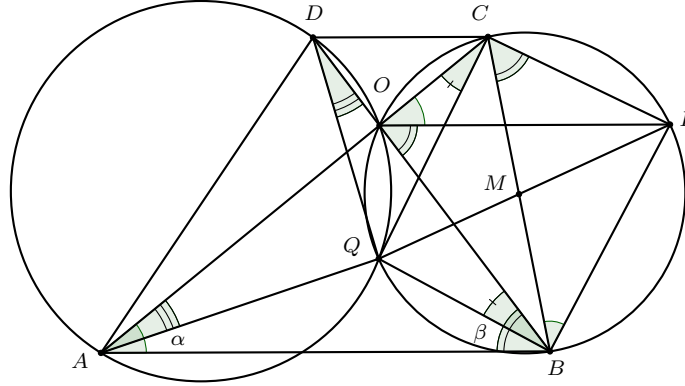
$$\begin{aligned} (n-1)n(S + d_n)^2 &= (n-1)nS^2 + 2(n-1)nSd_n + (n-1)nd_n^2 \\ &\geq 2(n^2-1)D + (2(n-1)n^2 + 2(n-1)n)d_n^2 \\ &= 2(n-1)(n+1)(D + nd_n^2) \end{aligned}$$

болох тул n үед үнэн. Иймд дурын $n \geq 1$ хувьд үнэн. Тэнцэтгэл зөвхөн $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ үед биелнэ.

Бодлого А2. D оройдоо мохоо өнцөгтэй, AB ба CD сууриудтай $ABCD$ трапецын AC , BD диагоналиуд O цэгт огтлолцно. AB суурьтай параллель, O цэгийг дайрсан шулуун BCO гурвалжныг багтаасан тойрогтой P цэгт огтлолцно. Хэрэв ADO , BCO гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин Q цэгт огтлолцдог бол PQ шулуун BC хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $\angle BAC = \alpha$, $\angle OBA = \beta$ гэе.



$OP \parallel AB$ ба P, C, O, Q, B нэг тойрог дээр оршино гэдгээс $\angle POC = \angle PQC = \angle PBC = \alpha$, $\angle POB = \angle PCB = \angle PQB$ болно. Эндээс $\triangle OAB \sim \triangle BPC$ болно. Эндээс

$$\frac{BP}{PC} = \frac{OA}{OB}$$

болох ба нөгөө талаас трапец гэдгийг тооцвол

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \iff 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{OB} + 1 \iff \frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB}$$

гэж гарах тул

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AC}{BD}$$

болно. Нөгөө талаас $\triangle AQC \sim \triangle DQB$ тул $\frac{QC}{QB} = \frac{AC}{DB}$ болж, эндээс $\frac{QC}{QB} = \frac{BP}{PC}$ болно. Одоо синусын теоремоор

$$\frac{CM}{MB} = \frac{CM}{MP} \cdot \frac{MP}{MB} = \frac{\sin \angle CPM}{\sin \angle MCP} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle MPB} = \frac{CQ}{PB} \cdot \frac{CP}{BQ} = 1$$

болж, иймд $CM = MB$ болно.

Бодлого А3. $0 < a_1, a_2, \dots, a_{2021} < 2$ бөгөөд $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} = 2021$ байх ямар ч бодит тоон $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ дарааллын хувьд $0 < b_1, b_2, \dots, b_n < 2$ бөгөөд $b_1 + b_2 + \dots + b_n = n$ байх бодит тоон $b_1, b_2, \dots, b_n$ дараалал дараах нөхцөлийг хангадаг байхаар олддог байх натурал n тооны хамгийн бага утгыг ол. Үүнд

$$a_1, a_2, \dots, a_{2021}, b_1, b_2, \dots, b_n$$

дарааллын ямар нэг $c_1, c_2, \dots, c_{n+2021}$ сэлгэмлийн хувьд

$$\begin{cases} 1 \leq l \leq n + 2021 \text{ байх сондгой } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \dots + c_l \leq l, \\ 1 \leq l \leq n + 2021 \text{ байх тэгш } l \text{ бүрийн хувьд} & c_1 + c_2 + \dots + c_l \geq l \end{cases} \quad (*)$$

байна.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. Хамгийн багадаа $n = 2021$ гэж харуулъя.

$N = 2021$, $m = n + N$ гээд $c_1, c_2, \dots, c_m$ дараалал $(*)$ нөхцөлийг хангадаг гэе. Тэгвэл $c_1 \leq 1$ ба $c_2 \geq 2 - c_1 \geq 1$ ба

$$c_{2k+1} \leq 2k + 1 - (c_1 + \dots + c_{2k}) \leq 1 \quad \text{ба} \quad c_{2k} \geq 2k - (c_1 + \dots + c_{2k-1}) \geq 1$$

байна. Иймд $X = \{1 \leq l \leq m \mid c_l \leq 1\}$ ба $Y = \{1 \leq l \leq m \mid c_l > 1\}$ гэвэл X олонлог $1 \leq l \leq m$ байх бүх сондгой тоог агуулах тул $|X| \geq |Y|$ байна. Эндээс $m = |X| + |Y| \geq 2|Y|$ байна.

Одоо $\varepsilon = \frac{1}{N}$ хувьд $(a_1, a_2, \dots, a_N) = (1 - (N - 1)\varepsilon, \underbrace{1 + \varepsilon, \dots, 1 + \varepsilon}_{N-1})$ тоонууд дээр $b_1, b_2, \dots, b_n$

тоонууд залгаж бодлогын нөхцөл хангах $c_1, c_2, \dots, c_m$ сэлгэмэл зохиосон гэе. $m \geq 2N$ гэж харуулах хэрэгтэй.

Хэрэв ямар нэг $1 \leq k \leq n$ хувьд $b_k > 1$ бол $|Y| \geq N$ болох тул $m \geq 2N$ байна.

Иймд дурын $1 \leq k \leq n$ хувьд $b_k \leq 1$ гэе. Нөхцөлөөс $b_1 + \dots + b_n = n$ тул $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ байна. Энэ үед хэрэв $c_1 = 1 - (N - 1)\varepsilon$ бол $c_1 + c_2 \leq 2 - (N - 2)\varepsilon < 2$ болж нөхцөлийг зөрчинө. Иймд $c_1 = 1$ байна. Хэрэв $c_2 = 1 + \varepsilon$ бол $c_1 + c_2 + c_3 \leq 3$ гэдгээс $c_3 = 1 - (N - 1)\varepsilon$ байх ба энэ үед $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \leq 4 - (N - 3)\varepsilon < 4$ болж нөхцөлийг зөрчинө. Иймд $c_2 = 1$ байна. Эндээс X олонлог $1 \leq l \leq m$ байх бүх сондгой тоо ба 2-ийг агуулах тул $|X| \geq |Y| + 2$ байна. Одоо $|Y| = N - 1$ болохыг ашиглавал $m = |X| + |Y| \geq 2N$ байна.

Одоо нийлбэр нь N байх $0 < a_1, a_2, \dots, a_N < 2$ тоонуудын хувьд бодлогын нөхцөл хангах $b_1, b_2, \dots, b_N$ тоонууд оршин байхыг харуулъя. Өсөх эрэмбээр

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq 1 < a_{k+1} \leq \dots \leq a_N < 2$$

гэж бичээд $1 \leq l \leq N$ хувьд $b_l = 2 - a_l$ гэвэл нийлбэр нь $b_1 + b_2 + \dots + b_N = 2N - N = N$ бөгөөд $0 < b_N \leq b_{N-1} \leq \dots \leq b_{k+1} < 1 \leq b_k \leq \dots \leq b_1 < 2$ байх ба

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k, b_{k+1}, a_{k+1}, \dots, b_n, a_n$$

сэлгэмэл бодлогын нөхцөл хангана.

Бодлого А4. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд r радиустай тойрог багтаж байв. ABC ба ACD гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг тус тус J ба K гээд AJK ба CJK гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг тус тус P ба Q гэе. Тэгвэл

$$|PQ| = |AC| - \frac{S_{AJCK}}{r}$$

гэж батал. Энд S_{AJCK} -аар $AJCK$ дөрвөн өнцөгтийн талбайг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. J ба K цэгээс AC рүү буусан перпендикулярын суурийг тус тус F_1 ба F_2 гэвэл

$$|AF_1| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} \quad \text{ба} \quad |AF_2| = \frac{|AD| + |AC| - |CD|}{2}$$

болно. $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$ тул $|AF_1| = |AF_2|$ болох ба эндээс $F_1 = F_2$ буюу $JK \perp AC$ байна.

Эхлээд $57 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ сайн тоо гэе. Энд $(a, b) = 1$ гэж үзэж болно. Энэ үед $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{3}$ болох ба эндээс $a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$ болж $(a, b) = 1$ гэдгийг зөрчинө.

Одоо $57 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}$ ба $(a, b) = (c, d) = 1$ гэе. Энэ үед $(a^2 + b^2, ab) = (c^2 + d^2, cd) = 1$ байх тул

$$(a^2 + b^2)(cd) + (c^2 + d^2)(ab) = 57(ab)(cd)$$

гэдгээс $ab \mid cd$ ба $cd \mid ab$ болно. Иймд $ab = cd$ ба $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 57ab = 57cd$ байна. Цаашилбал

$$(a - b)^2 + (c + d)^2 = (a + b)^2 + (c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

байна. Эндээс $a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$ болох ба энэ нь $(a, b) = 1$ гэдгийг зөрчинө. Иймд 57-г хамгийн цөөндөө гурван сайн тооны нийлбэрт тавьж болно.

Бодлого А6. α, β ялгаатай бодит тоонууд байг. Бодит тоон $A_1, A_2, \dots$ дарааллыг $n \geq 1$ хувьд

$$A_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

гэж тодорхойлж. Ямар нэг анхны p тооны хувьд A_p, A_{p+1}, A_{p+2} гишүүд бүхэл тоо байдаг бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл гэдгийг үзүүл.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $x = \alpha + \beta, y = \alpha\beta$ гэе. Өгсөн нөхцөлөөс дурын $n \geq 1$ хувьд

$$A_{n+2} = xA_{n+1} - yA_n \quad \text{ба} \quad A_{n+1}^2 - A_{n+2}A_n = y^n \quad (\dagger)$$

байхыг шалгах төвөггүй.

$n \geq 0$ хувьд $F_n(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ олон гишүүнтүүдийг $F_0(X, Y) = 0, F_1(X, Y) = 1$ ба $n \geq 0$ үед

$$F_{n+2}(X, Y) = XF_{n+1}(X, Y) - YF_n(X, Y)$$

гэж тодорхойлж. Тэгвэл дурын $n \geq 1$ хувьд $A_n = F_n(x, y)$ байна.

Мөн дурын $n \geq 2$ хувьд $F_n(X, Y) = X^{n-1} + G_n(X, Y)$, $\deg G_n \leq n - 2$ гэж бичигдэхийг индукцээр хялбархан батална. Энд $\deg =$ нийт зэрэг буюу $0 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ хувьд $\deg 0 = -1$ ба $G(X, Y) = \sum a_{ij}X^iY^j \neq 0$ хувьд $\deg G(X, Y) = \max\{i + j \mid a_{ij} \neq 0\}$ гэж тодорхойлно.

Одоо A_p, A_{p+1}, A_{p+2} бүхэл гэе. $A_1 = 1$ ба $A_2 = x$ тул x, y бүхэл гэж харуулахад хангалттай.

Энд α, β ялгаатай тул $A_p \neq 0, A_{p+1} \neq 0$ байна. Энэ үед

$$f(Y) = F_p\left(\frac{A_p}{A_{p+1}}Y + \frac{A_{p+2}}{A_{p+1}}, Y\right) - A_p$$

олон гишүүнт $p - 1$ зэргийн, рационал коэффициенттой байх ба $f(y) = 0$ байна.

Мөн y^p бүхэл ба p зэргийн $g(Y) = Y^p - y^p \in \mathbb{Z}[Y]$ бүхэл олон гишүүнтийн хувьд $g(y) = 0$ байна.

Хэрэв y бүхэл биш бол $g(Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ нь $\mathbb{Q}[Y]$ -д үл задрах байна. Иймд $\deg f(Y) < \deg g(Y)$ гэдгээс $f(Y), g(Y)$ харилцан анхны ба Евклидийн алгоритмаас $f(Y)p(Y) + g(Y)q(Y) = 1$ байх $p(Y), q(Y) \in \mathbb{Q}[Y]$ олон гишүүнтүүд олдоно. Энэ нь $f(y) = g(y) = 0$ гэдэгт зөрчинө. Иймд y бүхэл байна.

Эндээс $x = \frac{yA_p + A_{p+2}}{A_{p+1}}$ рационал ба $h(X) = F_p(X, y) - A_p \in \mathbb{Z}[X]$ бүхэл олон гишүүнтийн ахлах гишүүний коэффициент 1 ба $h(x) = 0$ тул рационал язгуурын леммээр x бүхэл байна.

Олон Улсын Математикийн 62-р Олимпиад

Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2021

Зохион байгуулалт

Олон Улсын Математикийн 62-р Олимпиад 2021 оны 7-р сарын 14-нөөс 24-ны өдрийн хооронд хоёр дахь жилдээ дараалан виртуал хэлбэрээр зохион байгуулагдлаа. Зохион байгуулагч ОХУ-ын Санкт-Петербург хот тус олимпиадыг дахин өндөр түвшинд зохион байгуулав. Монгол улсын багийн хувьд МУИС-ийн номын санд бодолтоо хийлээ. ОУМО-ыг зохион байгуулах хорооны итгэмжлэгдсэн төлөөлөгчөөр МУИС-ын БУС-ын математикийн тэнхимийн багш Др Д. Даянцолмон дахин ажиллав. Багийн ахлагчаар Б. Батбаясгалан, дэд ахлагчаар У. Батзориг нар оролцов.

Монголын баг

Энэ жилийн олимпиадад 107 орны 619 сурагч оролцов. Монгол улсын баг 130 оноогоор 11-р байрт шалгарч түүхэн амжилт үзүүллээ. Манай багийн сурагч М. Өнөболд ОУМО-аас хоёр дахь алтан медалаа хүртэж нийт математикийн олимпиад сонирхогчдоо баярлуулав. Энэ жилийн хувьд 2 алт, 2 мөнгө, 2 хүрэл медаль буюу багаараа медаль хүртэж өмнөх жилийнхээ амжилтаа ахиуллаа.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
А. Нямдаваа	Сант	30	Алтан медаль
М. Өнөболд	УБ, 1-р сургууль	29	Алтан медаль
О. Мишээл	Шинэ-Монгол	22	Мөнгөн медаль
Ц. Сайханбилэг	Сант	21	Мөнгөн медаль
Б. Батсамбуу	Олонлог сургууль	14	Хүрэл медаль
Д. Энэрэлт	Сант	14	Хүрэл медаль

Сонгон шалгаруулалт

Ковид-19 цар тахлын улмаас Олон Улсын Математикийн 62-р Олимпиадад Монгол улсыг төлөөлөн оролцох сурагчдыг сонгон шалгаруулах ажил хэвийн байдлаар зохион байгуулах боломжгүй болсон тул БШУЯ-ны сайдын А/142 тушаалын дагуу бүхэлдээ цахим хэлбэрээр зохион байгуулагдлаа. ММОХ-ын зүгээс тус сонгон шалгаруулалтад зориулан www.mmo.mn сайтыг шинэчилэн бодолт, засалтыг 100% онлайнаар гүйцэтгэв.

Бэлтгэл

ОУМО-62-д оролцох сурагчдын бэлтгэл 5-р сарын 14-өөс 7-р сарын 05-ны хооронд явагдав. Ковид-19 цар тахлын улмаас бэлтгэлийг онлайн болон танхимын сургалтыг хослуулан зохион байгууллаа.

Олимпиадын бэлтгэлд Др. У. Батзориг, Др. Ү. Отгонбаяр (Алгебр), Б. Батбаясгалан (Комбинаторик), Др Т. Хулан (Геометр), Др. Г. Баярмагнай (Тооны онол) болон МУИС-ын математикийн ангийн оюутан Х. Санжаахүү нар хичээл заалаа.

Зардал

ОУМО-62-д оролцох багийн бэлтгэл болон бусад зардлыг ММОХ, БШУЯ хариуцаж ажилла-
лаа.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Б. Батбаясгалан

Бодлогууд

Бодлого 1. $n \geq 100$ өгөгдсөн натурал тоо байг. Иван $n, n+1, \dots, 2n$ тоонуудыг өөр, өөр карт дээр бичнэ. Үүний дараа эдгээр $n+1$ ширхэг картыг холиод хоёр хэсэгт хуваана. Ядаж нэг хэсэг нь бичигдсэн тоонуудынх нь нийлбэр бүтэн квадрат байх хоёр карт агуулна гэж батал.

Бодлого 2. Аливаа $x_1, \dots, x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодлого 3. D цэг $AB > AC$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны дотоод цэг ба $\angle DAB = \angle CAD$ байг. E цэг AC хэрчим дээр орших ба $\angle ADE = \angle BCD$ нөхцөлийг, F цэг AB хэрчим дээр орших ба $\angle FDA = \angle DBC$ нөхцөлийг, X цэг AC шулуун дээр орших ба $CX = BX$ нөхцөлийг тус тус хангана. O_1 ба O_2 цэгүүд харгалзан ADC ба EXD гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд байг. BC, EF, O_1O_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

Бодлого 4. Γ тойргийн төв I , $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB, BC, CD, DA талууд Γ тойргийг шүргэдэг гээ. AIC гурвалжныг багтаасан тойрог Ω байг. BA -ийн A цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой X цэгт, BC -ийн C цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой Z цэгт огтлолцоно. AD ба CD -ийн D цэгээс цаашхи үргэлжлэл Ω тойрогтой харгалзан Y ба T цэгүүдэд огтлолцоно.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

болохыг батал.

Бодлого 5. Буши, Жампи хоёр хэрэм өвөлд зориулж 2021 самар түүжээ. Жампи самруудаа 1-ээс 2021 хүртэл дугаарлаад, өөрсдийн хайртай модоо тойруулан газарт 2021 ширхэг жижиг нүх ухаж бэлджээ. Маргааш өглөө нь Жампи Буши нүх бүрд нэг нэг самар хийсэн боловч дугаарт анхаарал хандуулаагүй болохыг анзаарчээ. Жампи үүнд сэтгэл хангалуун биш байсан тул самруудыг дахин байрлуулахаар болж дараалсан 2021 үйлдэл хийв. k дахь удаагийн үйлдлээр Жампи k дугаартай самрын хоёр хөршийн байрыг солино. Дараах чанартай k дугаар олдоно гэж батал: Үүнд Жампи k дахь үйлдлээр $a < k < b$ байх a ба b дугаартай самруудын байрыг солино.

Бодлого 6. $m \geq 2$ бүхэл тоо, A бүхэл (эерэг байх албагүй) тоонуудын төгсгөлөг олонлог; $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ нь A -ийн дэд олонлогууд байг. Аливаа $k = 1, 2, \dots, m$ дугаарын хувьд B_k олонлогийн элементүүдийн нийлбэр m^k байг. A олонлог дор хаяж $m/2$ элементтэй гэж батал.

Бодолтууд

Бодлого 1. $n \geq 100$ өгөгдсөн натурал тоо байг. Иван $n, n+1, \dots, 2n$ тоонуудыг өөр, өөр карт дээр бичнэ. Үүний дараа эдгээр $n+1$ ширхэг картыг холиод хоёр хэсэгт хуваана. Ядаж нэг хэсэг нь бичигдсэн тоонуудынх нь нийлбэр бүтэн квадрат байх хоёр карт агуулна гэж батал.

Бодолт. a, b, c тоонуудаас зохиож болох $a+b, b+c, c+a$ нийлбэрүүд $(2k-1)^2, (2k)^2, (2k+1)^2$ квадраттай тэнцүү байхаар сонговол

$$(a, b, c) = (2k^2 - 4k, 2k^2 + 1, 2k^2 + 4k)$$

болно. Бид

$$n \leq 2k^2 - 4k, \text{ ба } 2k^2 + 4k \leq 2k^2 + 4k$$

байх k -ийн утга олох шаардлагатай. k тоо нь

$$n \in [k^2 + 2k, 2k^2 - 4k + 1] =: I_k$$

байх бүх n -ийн хувьд нөхцөлийг хангана. $k \geq 9$ -ийн хувьд I_k, I_{k+1} интервалууд огтлолцолтой. Учир нь

$$(k+1)^2 + 2(k+1) \leq 2k^2 - 4k + 1.$$

Иймд $I_9 \cup I_{10} \dots = [99, \infty)$ буюу $n \geq 99$ -ийн хувьд батлагдав.

Бодлого 2. Аливаа $x_1, \dots, x_n$ бодит тоонуудын хувьд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Хэрэв бүх хувьсагчдыг t -ээр ихэсгэвэл зүүн гар тал өөрчлөгдөхгүй ба баруун гар тал

$$H(t) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j + 2t|}$$

болно. $H(-T), H(T)$ утгууд хоёулаа зүүн гар талын илэрхийллийн утга L -ээс их байхаар T -г хангалттай томоор сонгон авъя. Ялгаатай байх албагүй $p_{i,j} := -(x_i + x_j)/2$ цэгүүд ба $T, -T$ нь тоон шулуунг 2 цацраг ба хэрчмүүдэд хуваах ба хэсэг тус бүрд $H(t)$ функц дээшээ гүдгэр байна. Учир нь $f(t) := \sqrt{|\ell + 2t|}$ функц $(-\infty, -\ell/2]$ ба $[-\ell/2, +\infty)$ интервалуудад дээшээ гүдгэр функц байна. $[a, b]$ нь тэгийг агуулсан хэрчим байг. Дээшээ гүдгэр гэдгээс $H(0) \geq \min\{H(a), H(b)\}$ байна. $H(\pm T) > L$ тул $H(-(x_i + x_j)/2) \geq L$ гэж харуулахад хангалттай. Эндээс нийлбэр нь тэгтэй тэнцүү ямар нэг x_i, x_j олддог байх тохиолдолд анхны тэнцэтгэл бишийг батлах бодлогод шилжиж байна.

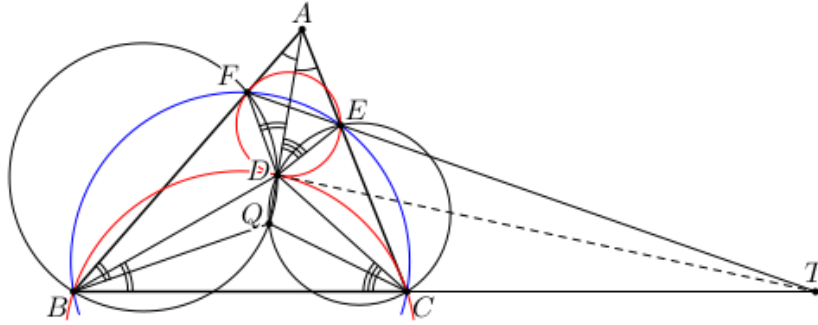
Хэрэв $i = j$ бол ямар нэг i индексийн хувьд $x_i = 0$ болох ба x_i -г хасахад тэнцэтгэл бишийн хоёр тал тус бүр $2 \sum_k \sqrt{|x_k|}$ -аар багасна. Хэрэв ялгаатай x_i ба x_j -ийн хувьд $x_i + x_j = 0$ бол x_i ба x_j -г хасахад тэнцэтгэл бишийн хоёр тал тус бүр

$$2\sqrt{2|x_i|} + 2 \cdot \sum_{k \neq i,j} \left(\sqrt{|x_k + x_i|} + \sqrt{|x_k + x_j|} \right)$$

тоогоор багасна. Аль ч тохиолдолд тэнцэтгэл биш n -ийн бага утгад шилжиж байна. $n = 0, n = 1$ үед илэрхий үнэн тул тэнцэтгэл биш батлагдав.

Бодлого 3. D цэг $AB > AC$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны дотоод цэг ба $\angle DAB = \angle CAD$ байг. E цэг AC хэрчим дээр орших ба $\angle ADE = \angle BCD$ нөхцөлийг, F цэг AB хэрчим дээр орших ба $\angle FDA = \angle DBC$ нөхцөлийг, X цэг AC шулуун дээр орших ба $CX = BX$ нөхцөлийг тус тус хангана. O_1 ба O_2 цэгүүд харгалзан ADC ба EXD гурвалжнуудыг багтаасан тойргийн төвүүд байг. BC, EF, O_1O_2 шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

Бодолт. ABC гурвалжны хувьд D -тэй изогонал хосмог цэгийг Q гэе (ABC гурвалжны хавтгайд орших X цэгийн изогонал хосмог нь AX, BX, CX шулуунуудыг гурвалжны харгалзах биссектриссүүдийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргахад гарах шулуунуудын огтлолцлын цэг юм). $\angle BAD = \angle DAC$ тул Q цэг AD шулуун дээр оршино. Иймд $\angle QBA = \angle DBC = \angle FDA$ тул Q, D, F, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Үүнтэй ижлээр Q, D, E, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $AF \cdot AB = AD \cdot AQ = AE \cdot AC$ тул B, F, E, C цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.



$T = BC \cap EF$ ба (CDE) тойрог BC -тэй дахин E_1 цэгт огтлолцдог гэе. $\angle E_1CQ = \angle DCE$, (CDQ) тойргийн DE, QE_1 нумууд тэнцүү тул $DQ \parallel EE_1$.

$BFEC$ тойрогт багтах тул AD шулуун BC, EF -тэй тэнцүү өнцөг үүсгэх ба EE_1 -тэй ч мөн адил байна. Иймд EE_1T адил хажуут гурвалжин буюу $TE = TE_1$ байна. Иймд T цэг EE_1 ба DQ -ийн ерөнхий дундаж перпендикуляр дээр оршино.

U, V цэгүүд харгалзан $(ADE), (CDQE)$ тойргуудын төв байг. Тэгвэл UO_1 нь AD -ийн дундаж перпендикуляр байна. Түүнчлэн U, V, O_2 цэгүүд DE -ийн дундаж перпендикуляр дээр оршино. $UO_1 \parallel VT$ учраас O_1O_2 дээр T цэг оршихыг батлахын тулд

$$\frac{O_2U}{O_2V} = \frac{O_1U}{TV} \quad (1)$$

болохыг харуулахад хангалттай. ABC гурвалжны A, B, C оройн өнцгүүдийг харгалзан α, β, γ гэж тэмдэглэе. AC рүү проекцлоход

$$\frac{O_2U}{O_2V} = \frac{(XE - AE)/2}{(XE + EC)/2} = \frac{AX}{CX} = \frac{AX}{BX} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \alpha} \quad (2)$$

болно.

O_2U -ийн AC дээрх проекц $(AC - AE)/2 = CE/2$; O_1U ба AC -ийн хоорондох өнцөг $90^\circ - \alpha/2$ тул

$$\frac{O_1U}{EC} = \frac{1}{2 \sin(\alpha/2)} \quad (3)$$

E, V, C, T цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг харуулъя. Үнэндээ V цэг CE -ийн дундаж перпендикуляр дээр орших ба $\angle CTF$ -ийн дотоод өнцгийн биссектрис оршино. Иймд V цэг (TCE) тойргийн CE нумын дундажтай давхцана.

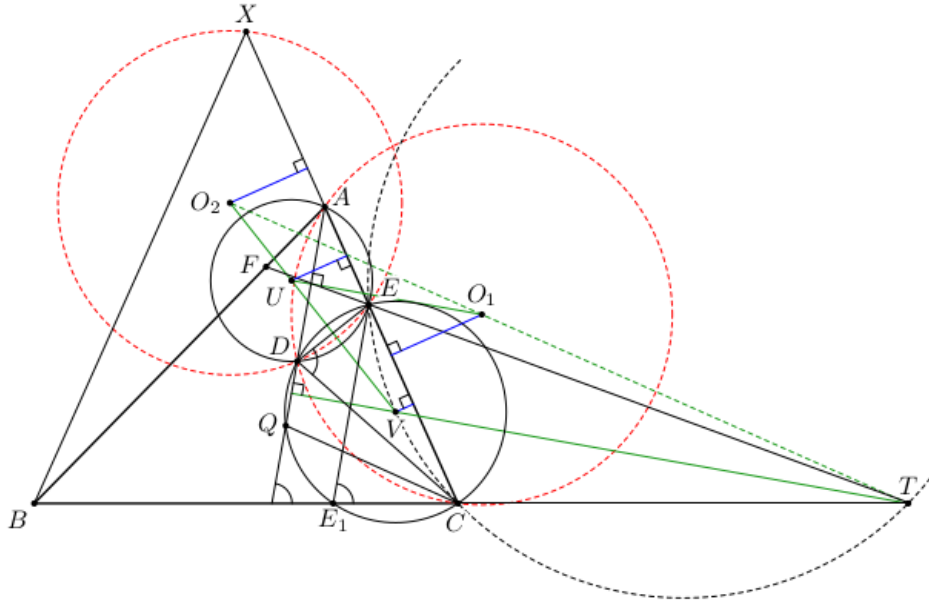
Одоо $\angle EVC = 2\angle EE_1C = 180^\circ - (\gamma - \beta)$ ба $\angle VET = \angle VE_1T = 90^\circ - \angle E_1EC = 90^\circ - \alpha/2$ тул

$$\frac{EC}{TV} = \frac{\sin \angle ETC}{\sin \angle VET} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\alpha/2)} \quad (4)$$

(2) ба (3), (4)-ийн үржвэрээс

$$\frac{O_2U}{O_2V} = \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{1}{2\sin(\alpha/2)} \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{O_1U}{EC} \cdot \frac{EC}{TV} = \frac{O_1U}{TV}$$

болж бодлого бодлогдов.



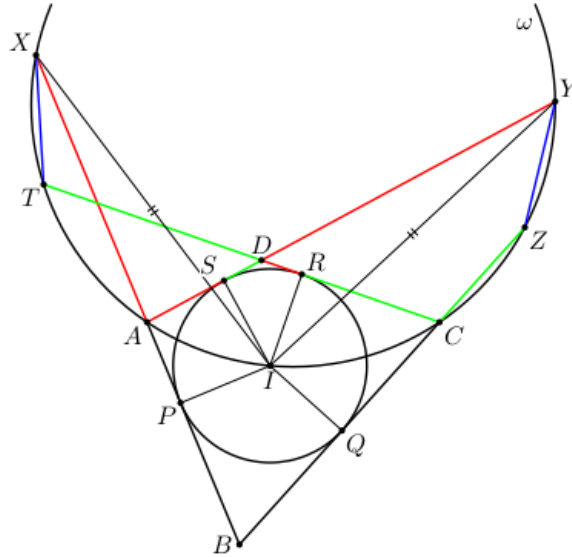
Бодлого 4. Γ тойргийн төв I , $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB , BC , CD , DA талууд Γ тойргийг шүргэдэг гэе. AIC гурвалжныг багтаасан тойрог Ω байг. BA -ийн A цэгээс цааших үргэлжлэл Ω тойрогтой X цэгт, BC -ийн C цэгээс цааших үргэлжлэл Ω тойрогтой Z цэгт огтлолцоно. AD ба CD -ийн D цэгээс цааших үргэлжлэл Ω тойрогтой харгалзан Y ба T цэгүүдэд огтлолцоно.

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

болохыг батал.

Бодолт. I цэг TCZ -г багтаасан ω тойрог ба TCZ өнцгийн гадаад өнцгийн биссектриссийн огтлолцол болно. Иймд I цэг TCZ нумын дундаж цэг болох тул $IT = IZ$. Төсөөтэйгөөр I цэг YAX нумын дундаж цэг болох тул $IX = IY$. ω тойргийн төвийг O гэе. Тэгвэл X ба T цэгүүд Y

ба Z цэгүүдтэй IO -ийн хувьд тэгш хэмтэй. Иймд $XT = YZ$.



$ABCD$ -д багтсан тойрог AB -г P цэгт, BC -г Q цэгт, CD -г R цэгт, DA -г S цэгт шүргэдэг гэе.

IXP , IYS тэгш өнцөгт гурвалжнууд тэнцүү тул $IP = IS$, $IX = IY$. Төсөөтэйгөөр IRT , IQZ тэгш өнцөгт гурвалжнууд тэнцүү тул $XP = YS$, $RT = QZ$.

$AS = AP$, $CQ = RC$, $SD = DR$ тул

$$\begin{aligned} AD + DT + TX + XA &= XT + XA + AS + SD + DT \\ &= XT + XP + RT \\ &= YZ + YS + QZ \\ &= YZ + YD + DR + RC + CZ \\ &= CD + DY + YZ + ZC \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Бодлого 5. Буши, Жампи хоёр хэрэм өвөлд зориулж 2021 самар түүжээ. Жампи самруудаа 1-ээс 2021 хүртэл дугаарлаад, өөрсдийн хайртай модоо тойруулан газарт 2021 ширхэг жижиг нүх ухаж бэлджээ. Маргааш өглөө нь Жампи Буши нүх бүрд нэг нэг самар хийсэн боловч дугаарт анхаарал хандуулаагүй болохыг анзаарчээ. Жампи үүнд сэтгэл хангалуун биш байсан тул самруудыг дахин байрлуулахаар болж дараалсан 2021 үйлдэл хийв. k дахь удаагийн үйлдлээр Жампи k дугаартай самрын хоёр хөршийн байрыг солино. Дараах чанартай k дугаар олдоно гэж батал: Үүнд Жампи k дахь үйлдлээр $a < k < b$ байх a ба b дугаартай самруудын байрыг солино.

Бодолт. k дахь үйлдлийг хийхийн өмнө $a < k$ самрууд идэвхигүй, $b \geq k$ дугаартай самрууд идэвхитэй гэе. Тэгвэл анх бүх самар идэвхитэй байна.

Эсрэгээс нь бүх үйлдлээр эсвэл $a, b < k$ байх самруудыг, эсвэл $a, b > k$ байх самруудын байрыг сольдог гэж үзье. Эхний тохиолдолд k -р самрыг *том*, хоёр дахь тохиолдолд *жижиг* гэе. Мэдээж 1 жижиг, 2021 том юм.

k дахь үйлдлийн дараа дараалсан идэвхигүй самруудаас тогтох бүх бүлэг сондгой тооны самартай байна гэдгийг $1 \leq k \leq 2020$ -р индукцлэн баталъя. $k = 1$ үед илэрхий. k дахь үйлдлийг авч үзье. Дараах хоёр тохиолдол үүсэх боломжтой.

1. k жижиг.

Энэ тохиолдолд k -ийн хоёр хөрш идэвхитэй тул k ганцаараа нэг бүлэг болно.

2. k том.

Энэ тохиолдолд k -ийн хоёр хөрш хоёул идэвхигүй самар тул k самар хөршүүдээ агуулсан илүү том идэвхигүй самруудын бүлэг үүсгэнэ. k -ийн нэг хөрш нь p идэвхигүй самартай, нөгөө хөрш нь q идэвхигүй самартай бүлэгт байсан бол шинээр үүсэх бүлэг $p+q+1$ самартай болно. p, q сондгой тоо үед энэ нь сондгой тоо байна.

2020-р үйлдлийн дараа 2020 ширхэг идэвхигүй самар нь тус бүрдээ сондгой тооны самартай бүлгүүдэд хуваагдсан байх ёстой. Гэтэл эдгээр нь үнэндээ 2020 самартай нэг л бүлэг болсон байна. Иймд зөрчил үүсэв.

Бодлого 6. $m \geq 2$ бүхэл тоо, A бүхэл (эерэг байх албагүй) тоонуудын төгсгөлөг олонлог; $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ нь A -ийн дэд олонлогууд байг. Аливаа $k = 1, 2, \dots, m$ дугаарын хувьд B_k олонлогийн элементүүдийн нийлбэр m^k байг. A олонлог дор хаяж $m/2$ элементтэй гэж батал.

Бодолт. $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ гэе. Эсрэгээс нь $k = |A| < m/2$ гэж үзье.

$$s_i := \sum_{j: a_j \in B_i} a_j$$

нь B_i олонлогийн элементүүдийн нийлбэр гэе. Өгсөн нөхцөлөөс $s_i = m^i, i = 1, \dots, m$ байна. Дараах хэлбэрийн бүх m^m илэрхийллийг авч үзье:

$$f(c_1, \dots, c_m) := c_1 s_1 + c_2 s_2 + \dots + c_m s_m, \quad c_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Нөгөө талаас $f(c_1, \dots, c_m)$ тоонууд нь бүгд

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, \quad \alpha_i \in \{0, 1, \dots, m(m-1)\}$$

хэлбэртэй. Иймд хамгийн олондоо $(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$ ялгаатай утга байх боломжтой. Иймд ядаж хоёр нь ижил утгатай байна. Гэтэл $s_i = m^i$ тул энэ нь m -тийн тооллын системд натурал тоо нэг утгатай бичигдэнэ гэдэгт зөрчинө.