

Гарчиг

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо	1
Бүсийн математикийн IV олимпиад (2018)	3
Бодлогууд	3
Бодолтууд	10
Бүсийн математикийн V олимпиад (2019)	25
Бодлогууд	25
Бодолтууд	29
Монголын Математикийн 55-р Олимпиадын II Даваа	43
Бодлогууд	43
Бодолтууд	49
Монголын Математикийн 55-р Олимпиадын III Даваа	69
Улсын Математикийн 55-р Олимпиад	69
Бодлогууд	73
Бодолтууд	76
Олон Улсын Математикийн 60-р Олимпиад	89
Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2019	89
Бодлогууд	90

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо

Товч танилцуулга

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо (ММОХ) ТББ нь Б. Баасандорж, Б. Баясгалан, Б. Бүүвэйбаатар, Ч. Даваадорж, Ц. Дашдорж, Д. Нарангэрэл, Б. Сандагдорж нарын санаачилгаар 2008 оны 12 сард үүсгэн байгуулагдсан.

Математикийн шинжлэх ухааныг түгээн дэлгэрүүлэх, гоо сайхныг нь хүүхэд залуучуудад таниулан сурталчлах, гоц авъяастай хүүхэд залуусыг тодруулан дэмжих, математикийн уралдаан, тэмцээн-нийг дэлхийн жишгээр зохион байгуулах нь ММОХ ТББ-ын эрхэм зорилго юм.

2018 оны 4 сараас шинэчлэн зохион байгуулагдаж удирдах зөвлөл, гүйцэтгэх зөвлөл, мэргэжлийн хороо гэсэн бүтэцтэйгээр ажиллаж байна.

Монголын математикийн олимпиадын хороо 2018 онд шинэчлэгдсэн зохион байгуулалтад орсноос хойш

- Олимпиадын үйл ажиллагаанд олон улсын сайн туршлагыг нэвтрүүлэх,
- Бүсийн олимпиад зохион байгуулж хөдөө орон нутгийн багш, сурагчдыг дэмжих,
- Нийслэлийн дүүргүүдийн математикийн олимпиадад оролцох оролцоог нэмэгдүүлэх,
- Охидын математикийн олимпиадад оролцох оролцоог дэмжих,
- Олон улсын математикийн олимпиадад оролцогчдын ур чадварыг нэмэгдүүлэх

чиглэлээр идэвх санаачилгатай ажиллаж тодорхой үр дүнд хүрч байна.

Удирдах зөвлөл

ММОХ-ны удирдах зөвлөл жилд нь 1-2 удаа хуралдан ММОХ-ны үйл ажиллагааны төлөвлөгөө болон төсөв батлах, шаардлагатай хөрөнгө босгох, хорооны үйл ажиллагаанд үнэлэлт дүгнэлт өгөх зэрэг ажлыг гүйцэтгэж байна. Удирдах зөвлөл нь ММОХ үйл ажиллагаагаа тасралтгүй явуулах боломжийг бүрдүүлж өгдөг чухал бүтэц юм.

Ерөнхийлөгч Н. Мөнхнасан

Ажил: Монполимет Группийн ТУЗ-ийн дарга,
Мэргэжил: Эдийн засагч (Сан Францискогийн Их Сургууль),
Сургууль: Нийслэлийн XI сургууль,
Баянгол дүүргийн математикийн олимпиадын аварга болж байв.

Дэд ерөнхийлөгч Ч. Анар

Ажил: ОНДО ХХК-ийн үүсгэн байгуулагч, гүйцэтгэх захирал; АНД Глобал компанийн үүсгэн байгуулагч, ерөнхийлөгч
Мэргэжил: Системийн инженер
Сургууль: Өвөрхангай аймгийн II сургууль
1997 оны улсын математикийн олимпиадад оролцож байв.

Дэд ерөнхийлөгч Б. Батбаасан

Ажил: Космо Группийн ерөнхийлөгч
Мэргэжил: Математикч (МУИС)
Сургууль: Нийслэлийн I сургууль,
1982 оны улсын математикийн олимпиадад оролцож байв.

Дэд ерөнхийлөгч Д. Энхтүвшин

Ажил: ОНДО ХХК-ийн ТУЗ-ийн дарга
Мэргэжил: Эдийн засагч (МУИС-ийн Эдийн засгийн сургууль)
Сургууль: Дорнод аймгийн I сургууль
Дорнод аймгийн математикийн олимпиадын 1992, 1993 оны аварга болж байв.

Удирдах зөвлөлийн гишүүд

Доктор Г. Баярмагнай
Доктор Ү. Отгонбаяр

АНД Глобал компанийн үүсгэн байгуулагч, ерөнхийлөгч Ч. Анар 2018–2021 онд ММОХ-ны ерөнхийлөгчөөр, Петровис группийн ТУЗ-ийн дарга Ж. Оюунгэрэл агсан 2018–2020 онд ММОХ-ны дэд ерөнхийлөгчөөр тус, тус ажиллаж байв.

Гүйцэтгэх зөвлөл

Гүйцэтгэх зөвлөл нь ММОХ-ны өдөр тутмын үйл ажиллагааг явуулж байна.

Гүйцэтгэх захирал

МУИС-ийн хэрэглээний математикийн тэнхимийн багш Б. Батбаясгалан (2019 оны 8-р сараас)

Нарийн бичгийн дарга

МУИС-ийн математикийн тэнхимийн багш доктор Д. Даянцолмон

Санхүүгийн асуудал хариуцсан сайн дурын ажилтан

Г. Номин (2018 оноос)

МУИС-ийн математикийн тэнхимийн багш Г. Баярмагнай 2018–2019 хооронд ММОХ-ны гүйцэтгэх захирлаар ажиллаж байв.

Бүсийн математикийн IV олимпиад (2018)

Бодлогууд

II анги

Бодлого II-1. Хүүхэлдэйн кино 20 минут үргэлжилдэг байв. Бат киног эхнээс нь 10 минут үзээд больжээ. Харин Дорж хожимдож ирээд киноны сүүлийн 15 минутыг үзжээ. Тэр хоёр хэдэн минут хамт кино үзсэн бэ?

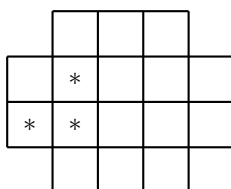
Бодлого II-2. Тэгш өнцөгт хүснэгт хэлбэртэй чихрийн цуглуулга (набор) байжээ. Цэцгээ эхний мөрөнд байсан бүх чихрийг авч иджээ. Үлдсэн чихрүүдээс Бат эхний баганад байсан бүх чихрийг авч иджээ. Цэцгээ 10 чихэр, Бат 6 чихэр идсэн бол цуглуулгад хэдэн чихэр үлдсэн бэ?

Бодлого II-3. Цифрүүд нь өсөх дараалалтай, 9-д хуваагддаг хамгийн их гурван оронтой тоог ол.

III анги

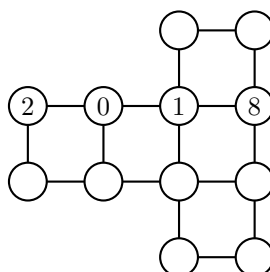
Бодлого III-1. Цифрүүд нь өсөх дараалалтай, 9-д хуваагддаг хамгийн их гурван оронтой тоог ол.

Бодлого III-2. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг хэсэг тус бүрд нэг од байх 3 хэсэгт хувааж, хэсгүүдээ эвлүүлэн квадрат хий.



Бодлого III-3. Бат өдөр бүр өмнөх өдрөөс 1-ээр олон чихэр иддэг. Цэцэг өдөр бүр өмнөх өдрөөс 2-оор олон чихэр иддэг. Дорж өдөр бүр өмнөх өдрөөс 3-аар олон чихэр иддэг. Өнөөдөр тэр гурав тус бүр 100 чихэр иджээ. Бат Цэцгээс 30-аар олон чихэр идсэн тэр өдөр Дорж хэдэн чихэр идсэн бэ?

Бодлого III-4. Квадрат тус бүрийн оройнууд дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар дугуйнуудад 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 тоонуудыг бичсэн байжээ. Зурагт үзүүлсэн дөрвөн дугуйд 2, 0, 1, 8 тоонууд бичигдсэн байсан бол үлдсэн дугуйн тоонуудыг сэргээж бич. (Бүх янзыг ол.)



IV анги

Бодлого IV-1. Бат өдөр бүр өмнөх өдрөөс 1-ээр олон чихэр иддэг. Цэцэг өдөр бүр өмнөх өдрөөс 2-оор олон чихэр иддэг. Дорж өдөр бүр өмнөх өдрөөс 3-аар олон чихэр иддэг. Өнөөдөр тэр гурав тус бүр 100 чихэр иджээ. Бат Цэцэгээс 30-аар олон чихэр идсэн тэр өдөр Дорж хэдэн чихэр идсэн бэ?

Бодлого IV-2. $\overline{БАГШ} = \overline{БИ} \times \overline{БИШ}$ үсэгт тааврыг бод.

Бодлого IV-3. Будилуу сурагч хоёр тоог нэмэхдээ, нэг нэмэгдэхүүний сүүлийн цифрийг хаяж нэмээд 8012 гаргахыг 2018 гаргажээ. Тэр ямар тоонууд нэмэх ёстой байсан бэ?

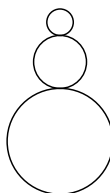
Бодлого IV-4. Муу сурлагатай Бат 2 цифрт дургүй. Анх түүний ном 200-аас их 300-аас цөөн нүүртэй байжээ. Бат номноос дугаарт нь 2 цифр орсон бүх хуудсыг урж хаяв. (Жишээ нь, 12-р нүүрийг урагд 11-р нүүр түүнтэй хамт урагдана). Тэгэхэд номын бүх нүүрийн тал нь үлдсэн бол анх түүний ном хэдэн нүүртэй байсан бэ?

V анги

Бодлого V-1. $\overline{БАГШ} = \overline{БИ} \times \overline{БИШ}$ үсэгт тааврыг бод.

Бодлого V-2. Бат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг нэг, нэг удаа ашиглан хоёр оронтой 1 ширхэг, нэг оронтой 7 ширхэг тоо зохиожээ. Нэг хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэр нь нөгөө хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэрээс $\frac{3}{2}$ дахин их байхаар түүний зохиосон тоонуудыг 2 хэсэгт хувааж болно. Батын зохиосон 2 оронтой тоог ол.

Бодлого V-3. Цас орж, хүүхдүүд тус бүр 1 кг, 2 кг, ..., 98 кг, 99 кг жинтэй 99 ширхэг цасан бөмбөг хийжээ. Нэг цасан хүнийг жин нь 1 : 2 : 4 гэсэн харьцаатай гурван бөмбөгөөр хийдэг (зураг) бол хүүхдүүд хамгийн олондоо хэдэн цасан хүн хийж чадах вэ?



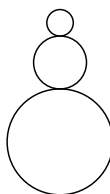
Бодлого V-4. Ерөнхий талтай хөрш 2 нүдэнд бичигдсэн цифрүүдийн нийлбэр бүгд анхны тоо гарч байхаар 3×3 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг бичиж болох уу?

VI анги

Бодлого VI-1. Бат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг нэг, нэг удаа ашиглан хоёр оронтой 1 ширхэг, нэг оронтой 7 ширхэг тоо зохиожээ. Нэг хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэр нь нөгөө хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэрээс $\frac{3}{2}$ дахин их байхаар түүний зохиосон тоонуудыг 2 хэсэгт хувааж болно. Батын зохиосон 2 оронтой тоог ол.

Бодлого VI-2. Нэг оронтой $\overline{A}$ тоо нь хоёр оронтой $\overline{B\overline{B}}$ тооноос $\overline{A\overline{B}}$ -оор бага байх A , B , V цифрүүдийг ол.

Бодлого VI-3. Цас орж, хүүхдүүд тус бүр 1 кг, 2 кг, ..., 98 кг, 99 кг жинтэй 99 ширхэг цасан бөмбөг хийжээ. Нэг цасан хүнийг жин нь $1 : 2 : 4$ гэсэн харьцаатай гурван бөмбөгөөр хийдэг (зураг) бол хүүхдүүд хамгийн олондоо хэдэн цасан хүн хийж чадах вэ?



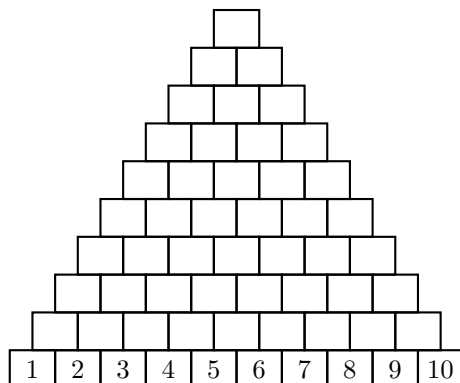
Бодлого VI-4. 1 см талтай квадратыг тус бүр 2 см периметртэй 6 ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваа.

VII анги

Бодлого VII-1. Нэг оронтой $\overline{A}$ тоо нь хоёр оронтой $\overline{B\overline{B}}$ тооноос $\overline{A\overline{B}}$ -оор бага байх A , B , V цифрүүдийг ол.

Бодлого VII-2. Долоон оронтой A тооны зарим цифрийн байрыг хооронд нь сольж B тоог гарган авчээ. $B > A$ бол $B - A$ ялгаварт хамгийн олондоо хэдэн ширхэг 7 цифр байж болох вэ?

Бодлого VII-3. Суварганы дээд нүдэнд бичигдсэн тоо нь доор байрлах хоёр нүдэнд бичигдсэн хоёр тооны үржвэртэй тэнцүү байна. Хамгийн доод эгнээний нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 тоонууд зурагт үзүүлсэн байдлаар бичигдсэн бол хамгийн дээд нүдэнд бичигдсэн тоо хэдэн тэгээр төгсөх вэ?

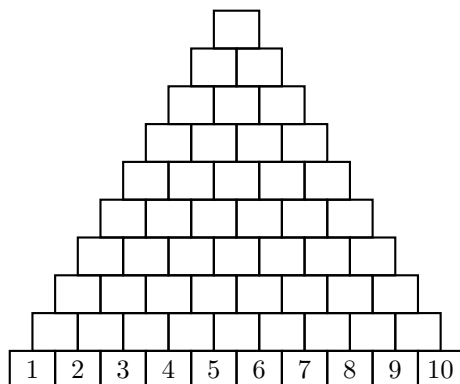


Бодлого VII-4. Дотроо 0, 1, 2, 3, 4 ширхэг будагдсан нүд агуулдаг 2×2 хэмжээтэй квадратын тоонууд хоорондоо тэнцүү байхаар 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүднүүдийг будаж болох уу?

VIII анги

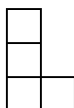
Бодлого VIII-1. Найман оронтой A тооны зарим цифрийн байрыг хооронд нь сольж B тоог гаргажээ. $A + B = 20182019$ байж болох уу?

Бодлого VIII-2. Суварганы дээд нүдэнд бичигдсэн тоо нь доор байрлах хоёр нүдэнд бичигдсэн хоёр тооны үржвэртэй тэнцүү байна. Хамгийн доод эгнээний нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 тоонууд зурагт үзүүлсэн байдлаар бичигдсэн бол хамгийн дээд нүдэнд бичигдсэн тоо хэдэн тэгээр төгсөх вэ?



Бодлого VIII-3. Цифрүүд нь буурах дараалалтай тоог *буурдаг* тоо гэж нэрлэе. Жишээ нь 310 нь буурдаг тоо, харин 12, 333 нь буурдаг тоо биш. 111-д хуваагддаг буурдаг тоо олдох уу?

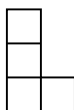
Бодлого VIII-4. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурсан сондгой талтай квадратын төвийн нүдийг ухаж авчээ. Квадратын үлдэх хэсгийг зурагт үзүүлсэн 4 нүдтэй дүрсэд хувааж болохыг батал (дүрсийг яаж ч эргүүлж болно).



IX анги

Бодлого IX-1. Дараалж бичигдсэн 3 цифрээр үүсэх бүх тоо нь анхны тоо байдаг хамгийн их натурал тоог ол.

Бодлого IX-2. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурсан сондгой талтай квадратын төвийн нүдийг ухаж авчээ. Квадратын үлдэх хэсгийг зурагт үзүүлсэн 4 нүдтэй дүрсэд хувааж болохыг батал (дүрсийг яаж ч эргүүлж болно).



Бодлого IX-3. Зохиомол тооны өөрөөс нь ялгаатай, бас 1-ээс ялгаатай хуваагчийг *жинхэнэ* хуваагч гэж нэрлэдэг. Нийлбэр нь 1001 байх ялгаатай 3 жинхэнэ хуваагчтай хамгийн бага зохиомол тоог ол.

Бодлого IX-4. Зөв ABC гурвалжны гадна талд $ABDE$ квадратыг байгуулжээ. AD , CE хэрчмүүд K цэгт огтлолцдог бол $CK = DK$ гэдгийг батал.

Х анги

Бодлого Х-1. $a + b = 2018$ бөгөөд $x^2 + ax + b = 0$ тэгшитгэл бүхэл шийдтэй байдаг бүх бүхэл a, b тоонуудыг ол.

Бодлого Х-2. Зөв ABC гурвалжны гадна талд $ABDE$ квадратыг байгуулжээ. AD, CE хэрчмүүд K цэгт огтлолцдог бол $CK = DK$ гэдгийг батал.

Бодлого Х-3. 10×10 хэмжээтэй хөлгийн нүднүүдэд 1-ээс 100 хүртэлх тоонуудыг ямар нэг дарааллаар бичжээ. Дотор нь бичигдсэн гурван тооны нийлбэр нь 3-т хуваагддаг 3 нүдтэй булан дүрс олдохыг батал.



Бодлого Х-4. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

ХI анги

Бодлого ХI-1. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

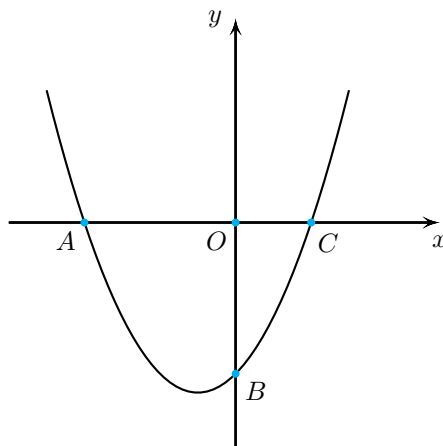
Бодлого ХI-2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны A оройгоос AD өндөр татахад $2 \cdot BD = CD = AD$ байв. Гурвалжны AB тал дээр E цэгийг $AC = CE$ байхаар сонгон авсан бол $DE \perp AB$ гэдгийг батал.

Бодлого ХI-3. p нь 3-аас их анхны тоо бол $6^n + 3^n - 2^n$ илэрхийлэл p -д хуваагддаг натурал тоо n олдохыг батал.

Бодлого ХI-4. Бичлэгтээ 9 цифр агуулаагүй натурал тоог дутуу тоо гэж нэрлэе. Бүх гишүүд нь дутуу тоо байдаг өсдөг арифметик прогресс хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

ХII анги

Бодлого ХII-1. $y = x^2 + ax + b$ функцийн график Ox тэнхлэгийг A, C цэгүүдэд, Oy тэнхлэгийг B цэгт огтолно (зураг). $OA = OB$ бол OC хэрчмийн уртыг ол.



Бодлого ХII-2. Хэдэн өнгийн 2047 ширхэг бөмбөгийг нэг эгнээнд байрлуулжээ. Дараалж байрласан хэдэн ч бөмбөгийг сонгож авахад дотор нь ядаж нэг онцгой бөмбөг заавал олддог байв (бусдаасаа өөр өнгөтэй бөмбөгийг *онцгой* бөмбөг гэж үзнэ). Бөмбөгнүүд нь хамгийн цөөндөө хэдэн өнгөтэй байж болох вэ?

Бодлого ХII-3. p нь 3-аас их анхны тоо бол $6^n + 3^n - 2^n$ илэрхийлэл p -д хуваагддаг натурал тоо n олдохыг батал.

Бодлого ХII-4. ABC гурвалжин дотор $\angle BDC = 90^\circ$ ба $\angle BAD = \angle BCD$ байх D цэгийг сонгон авчээ. Гурвалжны AC, BC талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан M, N бол $\angle DMN = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. Дараалж бичигдсэн 3 цифрээр үүсэх бүх тоо нь анхны тоо байдаг хамгийн их натурал тоог ол.

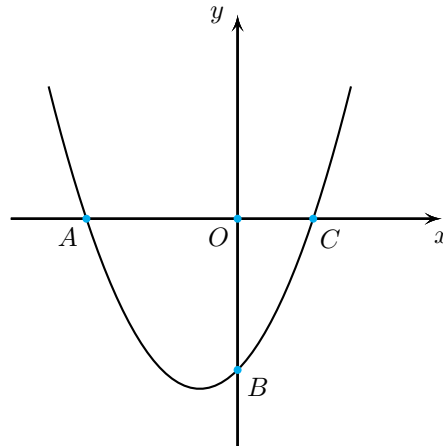
Бодлого ББ-2. Зузаан нимгэн хоёр төрлийн ном байжээ. Номын тавиур дээр 9 зузаан ном багтана, харин 10 зузаан ном багтахгүй. Мөн ийм тавиур дээр 15 нимгэн ном багтана, харин 16 нимгэн ном багтахгүй. Энэ тавиур дээр 5 нимгэн ном тавьжээ. Нэмж хамгийн олондоо хэдэн зузаан ном тавьж болох вэ?

Бодлого ББ-3. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурагдсан 20×18 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн 4 булангийн нүдийг тайрч хаяжээ. Үүсэх дүрсэд багтах шугамын дагуу талуудтай тэгш өнцөгтийн тоог ол.

Бодлого ББ-4. Дотроо 0, 1, 2, 3, 4 ширхэг будагдсан нүд агуулдаг 2×2 хэмжээтэй квадратын тоонууд хоорондоо тэнцүү байхаар 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүднүүдийг будаж болох уу?

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. $y = x^2 + ax + b$ функцийн график Ox тэнхлэгийг A, C цэгүүдэд, Oy тэнхлэгийг B цэгт огтолно (зураг). $OA = OB$ бол OC хэрчмийн уртыг ол.



Бодлого ДБ-2. Бичлэгтээ 9 цифр агуулаагүй натурал тоог *дутуу* тоо гэж нэрлэе. Бүх гишүүд нь дутуу тоо байдаг өсдөг арифметик прогресс хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

Бодлого ДБ-3. ABC гурвалжин дотор $\angle BDC = 90^\circ$ ба $\angle BAD = \angle BCD$ байх D цэгийг сонгон авчээ. Гурвалжны AC, BC талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан M, N бол $\angle DMN = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Бодлого ДБ-4. $1 + a^2 + b^3 = c^6$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал a, b, c шийдтэй гэдгийг харуул.

Бодолтууд

II анги

Бодлого II-1. Хүүхэлдэйн кино 20 минут үргэлжилдэг байв. Бат киног эхнээс нь 10 минут үзээд больжээ. Харин Дорж хожимдож ирээд киноны сүүлийн 15 минутыг үзжээ. Тэр хоёр хэдэн минут хамт кино үзсэн бэ?

Бодолт. **Хариу:** 5 минут.

Бат ба Доржийн кино үзсэн хугацааг зураглавал

Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б									
					Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д	Д

болох тул хамтдаа 5 минут кино үзсэн.

Бодлого II-2. Тэгш өнцөгт хүснэгт хэлбэртэй чихрийн цуглуулга (набор) байжээ. Цэцгээ эхний мөрөнд байсан бүх чихрийг авч иджээ. Үлдсэн чихрүүдээс Бат эхний баганад байсан бүх чихрийг авч иджээ. Цэцгээ 10 чихэр, Бат 6 чихэр идсэн бол цуглуулгад хэдэн чихэр үлдсэн бэ?

Бодолт. **Хариу:** 54 ширхэг.

Цэцгээ 10 чихэр идсэн тул хүснэгт 10 баганатай. Бат 6 чихэр идсэн нь нийт мөрийн тооноос 1-ээр цөөн тул хүснэгт 7 мөртэй. Цуглуулгад үлдсэн чихэр нь 9 мөр, 6 баганад байрлах тул үлдсэн чихрийн тоо $9 \times 6 = 54$ байна.

Бодлого II-3. Цифрүүд нь өсөх дараалалтай, 9-д хуваагддаг хамгийн их гурван оронтой тоог ол.

Бодолт. **Хариу:** 567.

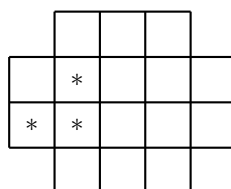
9-д хуваагддаг 3 оронтой тооны цифрүүдийн нийлбэр 9, 18, 27-ийн аль нэг байна. Цифрүүдийн нийлбэр 27 бол бүх цифр ижил 9 байх тул цифрүүд нь өсөх дараалалтай гэсэн нөхцөлийг хангахгүй. 3 ялгаатай цифрүүдийн нийлбэр нь ≤ 18 бол хамгийн бага нь $\frac{18}{3} = 6$ тооноос бага байх ёстой. Иймд эхний цифр нь хамгийн ихдээ 5 байх боломжтой. Эхний цифр 5 байх үед цифрүүдийн нийлбэр нь 18 байдаг, цифрүүд нь өсөх дараалалтай цор ганц тоо нь 567 юм. Иймд бодлогын хариу 567 байна.

III анги

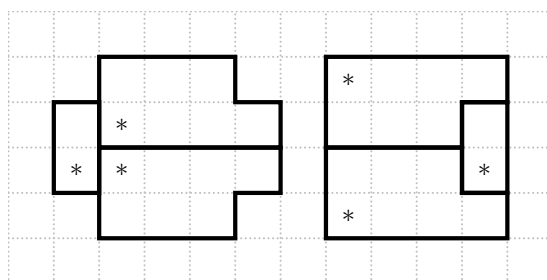
Бодлого III-1. Цифрүүд нь өсөх дараалалтай, 9-д хуваагддаг хамгийн их гурван оронтой тоог ол.

Бодолт. **II-3** бодолтыг харна уу.

Бодлого III-2. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг хэсэг тус бүрд нэг од байх 3 хэсэгт хувааж, хэсгүүдээ эвлүүлэн квадрат хий.



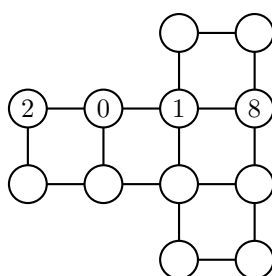
Бодолт.



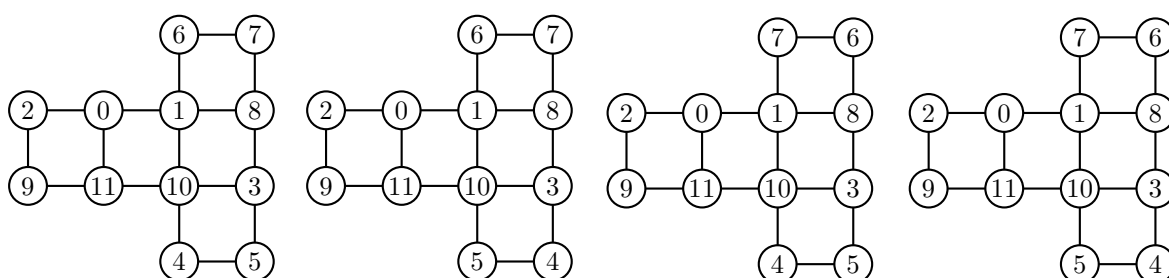
Бодлого III-3. Бат өдөр бүр өмнөх өдрөөс 1-ээр олон чихэр иддэг. Цэцэг өдөр бүр өмнөх өдрөөс 2-оор олон чихэр иддэг. Дорж өдөр бүр өмнөх өдрөөс 3-аар олон чихэр иддэг. Өнөөдөр тэр гурав тус бүр 100 чихэр иджээ. Бат Цэцэгээс 30-аар олон чихэр идсэн тэр өдөр Дорж хэдэн чихэр идсэн бэ?

Бодолт. Бат, Цэцэг хоёрын чихрийн зөрөө өдөрт нэгээр багасах тул өчигдөр Бат Цэцэгээс 1-ээр олон чихэр, уржигдар 2-оор олон чихэр гэх мэт 30 өдрийн өмнө 30-аар олон чихэр иджээ. Харин Дорж 30 өдрийн өмнө $100 - 3 \cdot 30 = 10$ чихэр идсэн.

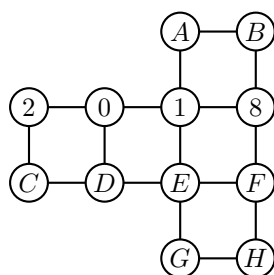
Бодлого III-4. Квадрат тус бүрийн оройнууд дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар дугуйнуудад 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 тоонуудыг бичсэн байжээ. Зурагт үзүүлсэн дөрвөн дугуйд 2, 0, 1, 8 тоонууд бичигдсэн байсан бол үлдсэн дугуйн тоонуудыг сэргээж бич. (Бүх янзыг ол.)



Бодолт. **Хариу:**



Хувьсагч оруулан



гэж тэмдэглэвэл $0 + 1 + 2 + \dots + 11 = 66$ тул нэг квадратын тоонуудын нийлбэр

$$2 + 0 + C + D = A + B + 1 + 8 = E + F + G + H = \frac{66}{3} = 22$$

байна. $C + D = 20$ тул $C = 9, D = 11$ эсвэл $C = 11, D = 9$ байна. $D = 9$ бол E -д тохирох тоо олдохгүй иймд $C = 9, D = 11$ байна. Эндээс $0 + 1 + 11 + E = 22$ тул $E = 10$ ба $1 + 8 + 10 + F = 22$ тул $F = 3$ байх ёстой. Эндээс дээрх 4 боломж байна.

IV анги

Бодлого IV-1. Бат өдөр бүр өмнөх өдрөөс 1-ээр олон чихэр иддэг. Цэцэг өдөр бүр өмнөх өдрөөс 2-оор олон чихэр иддэг. Дорж өдөр бүр өмнөх өдрөөс 3-аар олон чихэр иддэг. Өнөөдөр тэр гурав тус бүр 100 чихэр иджээ. Бат Цэцэгээс 30-аар олон чихэр идсэн тэр өдөр Дорж хэдэн чихэр идсэн бэ?

Бодолт. **III-3** бодолтыг харна уу.

Бодлого IV-2. $\overline{БАГШ} = \overline{БИ} \times \overline{БИШ}$ үсэгт тааврыг бод.

Бодолт. **Хариу:** $1690 = 13 \times 130$ ба $1960 = 14 \times 140$.

$B > 1$ бол

$$\overline{БАГШ} \leq (B + 1) \cdot 1000 < B \cdot 10 \times B \cdot 100 < \overline{БИ} \times \overline{БИШ}$$

болж зөрчил гарах тул $B = 1$ байх ёстой. $15 \times 150 = 2250 > 2000$ тул $I \leq 4$ байх ёстой. Сүүлийн цифрийг тооцвол $I \neq 1$ тул $(I, Ш) = (2, 0), (3, 0), (3, 5), (4, 0)$ байж болно. Энд

$$12 \times 120 = 1440$$

$$13 \times 130 = 1690$$

$$13 \times 135 = 1755$$

$$14 \times 140 = 1960$$

тул $(A, Г) = (6, 9), (9, 6)$ гэсэн хоёр шийдтэй болох нь харагдаж байна.

Бодлого IV-3. Будилуу сурагч хоёр тоог нэмэхдээ, нэг нэмэгдэхүүний сүүлийн цифрийг хаяж нэмээд 8012 гаргахыг 2018 гаргажээ. Тэр ямар тоонууд нэмэх ёстой байсан бэ?

Бодолт. **Хариу:** 6660, 1352 эсвэл 6659, 1353.

Цифрийг нь хаясан тоогоо $\overline{abcd}$ гэвэл

$$\overline{abcd} - \overline{abc} = 8012 - 2018 = 5994$$

тул

$$9 \cdot \overline{abc} + d = 900a + 90b + 9c + d = 5994 = 9 \cdot 666$$

байна. Эндээс d тоо 9-д хуваагдах тул $d = 0, d = 9$ байх боломжтой.

$d = 0$ бол $\overline{abc} = 666$ гэдгээс нэг тоо нь 6660, нөгөө тоо нь $8012 - 6660 = 1352$ байна.

$d = 9$ бол $\overline{abc} = 665$ гэдгээс нэг тоо нь 6659, нөгөө тоо нь $8012 - 6659 = 1353$ байна.

Бодлого IV-4. Муу сурлагатай Бат 2 цифрт дургүй. Анх түүний ном 200-аас их 300-аас цөөн нүүртэй байжээ. Бат номноос дугаарт нь 2 цифр орсон бүх хуудсыг урж хаяв. (Жишээ нь, 12-р нүүрийг урагд 11-р нүүр түүнтэй хамт урагдана). Тэгэхэд номын бүх нүүрийн тал нь үлдсэн бол анх түүний ном хэдэн нүүртэй байсан бэ?

Бодолт. **Хариу:** 276 нүүртэй.

200-аас хойш дугаартай бүх хуудас урагдах тул 200-аас хэтрэхгүй дугаартай нүүрүүдийг авч үзье. Зөвхөн нэг нүүрэнд нь 2-ийн цифр орсон хуудсууд нь (1, 2), (11, 12), (19, 20), (29, 30), (31, 32), (41, 42), (51, 52), (61, 62), (71, 72), (81, 82), (91, 92) ба эдгээр дээр 100-г нэмэхэд гарах хуудсууд мөн (199, 200) байна. Хоёр нүүрэнд нь 2-ийн цифр орсон хуудсууд нь (21, 22), (23, 24), (25, 26), (27, 28) ба эдгээр дээр 100-г нэмэхэд гарах хуудсууд байна. Иймд 200-аас хэтрэхгүй дугаартай хуудаснаас нийт

$$2 \times 11 + 1 + 2 \times 4 = 31$$

хуудас буюу 62 нүүр урах шаардлагатай. Иймд үлдэх $200 - 62 = 138$ нүүр урагдахгүй. Нөгөө талаас эдгээр нь бүх үлдсэн нүүр буюу нийт нүүрийн тал нь юм. Иймд ном $2 \times 138 = 276$ нүүртэй байжээ.

V анги

Бодлого V-1. $\overline{БАГШ} = \overline{БИ} \times \overline{БИШ}$ үсэгт тааврыг бод.

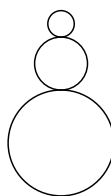
Бодолт. **IV-2** бодолтыг харна уу.

Бодлого V-2. Бат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг нэг, нэг удаа ашиглан хоёр оронтой 1 ширхэг, нэг оронтой 7 ширхэг тоо зохиожээ. Нэг хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэр нь нөгөө хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэрээс $\frac{3}{2}$ дахин их байхаар түүний зохиосон тоонуудыг 2 хэсэгт хувааж болно. Батын зохиосон 2 оронтой тоог ол.

Бодолт. **Хариу:** 56.

Хоёр оронтой тооны эхний цифр 5 байна. Үгүй бол нэг хэсгийн үржвэр нь 5-д хуваагдах ба нөгөө нь 5-д хуваагдахгүй тул нэг нь нөгөөгөөсөө $\frac{3}{2}$ дахин их байх боломжгүй. Хоёр оронтой тоо нь 57 бол энэ тооны орсон хэсэг 19-д хуваагдах ба нөгөө хэсэг нь 19-д хуваагдахгүй тул нэг хэсэг нь нөгөөгөөсөө $\frac{3}{2}$ дахин их байх боломжгүй. Иймд 7 нь хоёр оронтой тоонд орохгүй. 7-д хуваагдах цифр яг нэг тул нэг хэсэг нь 7-г агуулах ба хоёр оронтой тоо маань 7-д хуваагдаад нөгөө хэсэгт нь орох ёстой. Эндээс хоёр оронтой тоо маань 56 байна (өөр 5-аар эхэлсэн 7-д хуваагддаг хоёр оронтой тоо байхгүй). Тоонуудаа $\{2, 7, 8, 9\}$, $\{1, 3, 4, 56\}$ гэж хуваахад бодлогын нөхцөлийг хангах тул Батын зохиосон хоёр оронтой тоо нь 56 байжээ.

Бодлого V-3. Цас орж, хүүхдүүд тус бүр 1 кг, 2 кг, ..., 98 кг, 99 кг жинтэй 99 ширхэг цасан бөмбөг хийжээ. Нэг цасан хүнийг жин нь $1 : 2 : 4$ гэсэн харьцаатай гурван бөмбөгөөр хийдэг (зураг) бол хүүхдүүд хамгийн олондоо хэдэн цасан хүн хийж чадах вэ?



Бодолт. **Хариу:** 14 ширхэг.

$(a, 2a, 4a)$ жинтэй цасан хүний хувьд a тооны хамгийн их сондгой хуваагч нь b бол энэ цасан хүнийг b төрлийн цасан хүн гээ.

$b = 1$ төрлийн цасан хүн хамгийн олондоо хоёр байна. Учир нь 1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг, 32 кг, 64 кг жинтэй бөмбөлгүүдээр хамгийн олондоо хоёр ширхэг цасан хүн хийх боломжтой. Жишээ нь $(1, 2, 4)$, $(8, 16, 32)$.

$b = 3$ үед 3 кг, 6 кг, 12 кг, 24 кг, 48 кг, 96 кг жинтэй бөмбөлгүүдээр хамгийн олондоо мөн л хоёр ширхэг цасан хүн хий боломжтой.

$b \geq 5$ үед $b \cdot 2^5 \geq 160 > 99$ тул хоёр цасан хүн хийх боломжгүй. Хэрэв $4b \leq 99$ бол $(b, 2b, 4b)$ жинтэй нэг цасан хүн хийх боломжтой ба $4b > 99$ бол b төрлийн цасан хүн хийх боломжгүй. Иймд хамгийн олондоо $b = 1$, $b = 3$ тус бүр хоёр, харин $b = 5, 7, \dots, 23$ үед тус бүр нэг цасан хүн буюу нийт 14 цасан хүн хийх боломжтой.

Бодлого V-4. Ерөнхий талтай хөрш 2 нүдэнд бичигдсэн цифрүүдийн нийлбэр бүгд анхны тоо гарч байхаар 3×3 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг бичиж болох уу?

Бодолт. **Хариу:** Болохгүй.

Голын нүдэнд байх тоог авч үзье. Хэрвээ энэ тоо тэгш тоо бол захын найман нүдэн дотор зэрэгцээ хоёр сондгой тоо байна. Энэ хоёр тооны нийлбэр 2-оос их тэгш тоо тул анхны тоо байж чадахгүй. Иймд голын нүдэнд сондгой тоо, түүний хөрш нүднүүдэд нь тэгш тоонууд байх ёстой. Энэ тохиолдолд голын тооны хөршүүд нь 2, 4, 6, 8 гэсэн тоонууд байна. Эдгээрээс 4, 6, 8-ийг 3-т хуваахад 1, 0, 2 үлдэгдлүүд өгөх тул эдгээр тоонуудыг аль нэгийг голын тоон дээр нэмэхэд 3-т хуваагдах 3-аас их тоо гарч анхны тоо байж чадахгүйд хүрч байна. Иймд бодлогын нөхцөлд тохирохоор бичих боломжгүй.

VI анги

Бодлого VI-1. Бат 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдийг нэг, нэг удаа ашиглан хоёр оронтой 1 ширхэг, нэг оронтой 7 ширхэг тоо зохиожээ. Нэг хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэр нь нөгөө хэсэгт байгаа тоонуудын үржвэрээс $\frac{3}{2}$ дахин их байхаар түүний зохиосон тоонуудыг 2 хэсэгт хувааж болно. Батын зохиосон 2 оронтой тоог ол.

Бодолт. **V-2** бодолтыг харна уу.

Бодлого VI-2. Нэг оронтой $\overline{A}$ тоо нь хоёр оронтой $\overline{BB}$ тооноос $\overline{AB}\%$ -оор бага байх A , B , B цифрүүдийг ол.

Бодолт. **Хариу:** $A = 7, B = 2, V = 5$.

Нөхцөлөө бичвэл $A \neq 0, B \neq 0$ ба

$$\overline{BV} \cdot \left(1 - \frac{\overline{AB}}{100}\right) = \overline{A}$$

буюу

$$\overline{BV} \cdot 100 = \overline{AB} \cdot \overline{BV} + \overline{A} \cdot 100$$

болно. Эндээс $B \cdot V$ үржвэр 10-т хуваагдах тул дараах тохиолдолуудыг авч үзэхэд хангалттай.

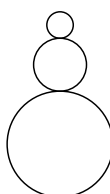
$B = 0$ бол $100B = (10A + B) \cdot B + 10A$ гэдгээс $B \cdot B$ үржвэр 10-т хуваагдах ба энэ нь боломжгүй.

$B = 2, V = 5$ бол $2500 = (10A + 2) \cdot 25 + 100A$ гэдгээс $A = 7$ гэсэн нэг шийдтэй.

$B = 5, V = 2$ бол $5200 = (10A + 5) \cdot 52 + 100A$ гэдгээс $494 = 62A$ шийдгүй.

Иймд бодлогын цор ганц шийд нь $A = 7, B = 2, V = 5$ болов.

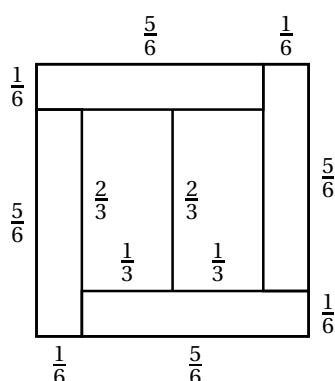
Бодлого VI-3. Цас орж, хүүхдүүд тус бүр 1 кг, 2 кг, ..., 98 кг, 99 кг жинтэй 99 ширхэг цасан бөмбөг хийжээ. Нэг цасан хүнийг жин нь $1 : 2 : 4$ гэсэн харьцаатай гурван бөмбөгөөр хийдэг (зураг) бол хүүхдүүд хамгийн олондоо хэдэн цасан хүн хийж чадах вэ?



Бодолт. **V-3** бодолтыг харна уу.

Бодлого VI-4. 1 см талтай квадратыг тус бүр 2 см периметртэй 6 ширхэг тэгш өнцөгтөд хуваа.

Бодолт. Бодолтыг зургаар үзүүлье.



VII анги

Бодлого VII-1. Нэг оронтой $\overline{A}$ тоо нь хоёр оронтой $\overline{BV}$ тооноос $\overline{AB}\%$ -оор бага байх A, B, V цифрүүдийг ол.

Бодолт. **VI-2** бодолтыг харна уу.

Бодлого VII-2. Долоон оронтой A тооны зарим цифрийн байрыг хооронд нь сольж B тоог гарган авчээ. $B > A$ бол $B - A$ ялгаварт хамгийн олондоо хэдэн ширхэг 7 цифр байж болох вэ?

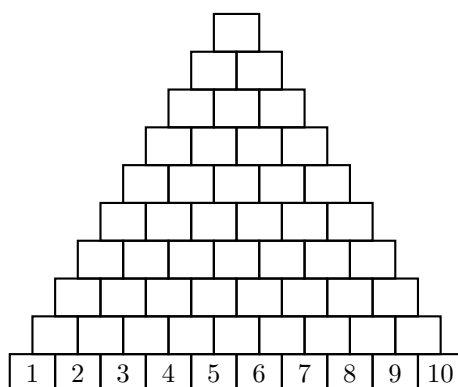
Бодолт. **Хариу:** 6 ширхэг.

$B - A$ ялгавар 9-д хуваагдах тул $B - A = 7777777$ буюу 7 ширхэг 7 цифр байж болохгүй. 6 ширхэг байж болохыг жишээгээр харуулъя. $A = 1530864$, $B = 5308641$ үед

$$B - A = 3777777$$

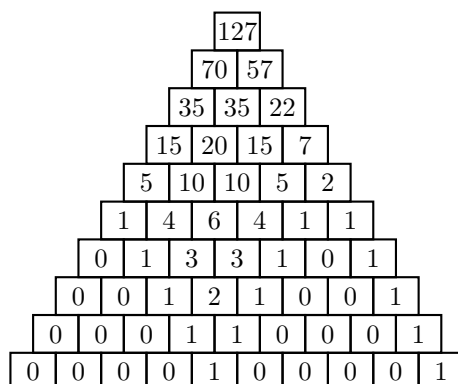
байна.

Бодлого VII-3. Суварганы дээд нүдэнд бичигдсэн тоо нь доор байрлах хоёр нүдэнд бичигдсэн хоёр тооны үржвэртэй тэнцүү байна. Хамгийн доод эгнээний нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 тоонууд зурагт үзүүлсэн байдлаар бичигдсэн бол хамгийн дээд нүдэнд бичигдсэн тоо хэдэн тэгээр төгсөх вэ?



Бодолт. **Хариу:** 127 ширхэг.

Тоо бүрийн 5-ийн хэдэн зэрэгт хуваагдахыг дараах хүснэгтэнд тэмдэглэе. Мэдээж тоо бүр нь доор байрлах 2 тооныхоо нийлбэр байна.

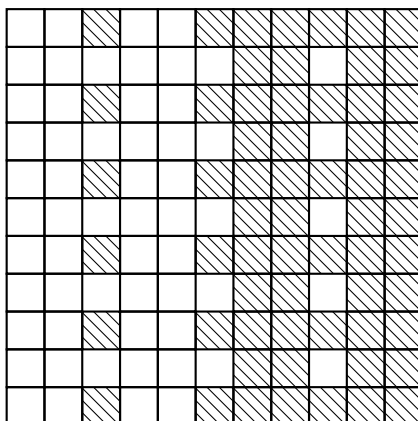


Яг ижил аргаар тоо бүр 2-ийн хэдэн зэрэгт хуваагдахыг олж болох бөгөөд эндээс хамгийн дээр байрлах тоо нь 127 ширхэг тэгээр төгссөн тоо болох нь гарна.

Бодлого VII-4. Дотроо 0, 1, 2, 3, 4 ширхэг будагдсан нүд агуулдаг 2×2 хэмжээтэй квадратын тоонууд хоорондоо тэнцүү байхаар 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүднүүдийг будаж болох уу?

Бодолт. **Хариу:** Болно.

Болно гэдгийг харуулъя.



VIII анги

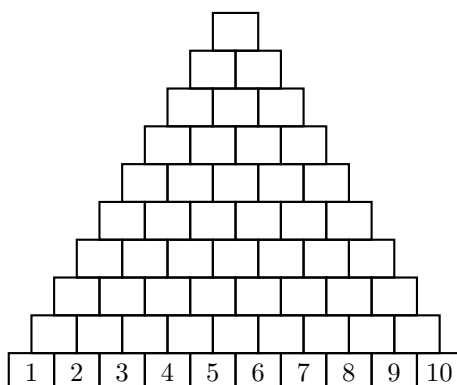
Бодлого VIII-1. Найман оронтой A тооны зарим цифрийн байрыг хооронд нь сольж B тоог гаргажээ. $A + B = 20182019$ байж болох уу?

Бодолт. **Хариу:** Болно.

Т. Базарын ирүүлсэн жишээнүүд:

(10001518, 10180501), (10025017, 10157002), (10040119, 10141900), (10041109, 10140910),
 (10041910, 10140109), (10057012, 10125007), (10080511, 10101508), (10081501, 10100518),
 (10100518, 10081501), (10101508, 10080511), (10125007, 10057012), (10140109, 10041910),
 (10140910, 10041109), (10141900, 10040119), (10157002, 10025017), (10180501, 10001518).

Бодлого VIII-2. Суварганы дээд нүдэнд бичигдсэн тоо нь доор байрлах хоёр нүдэнд бичигдсэн хоёр тооны үржвэртэй тэнцүү байна. Хамгийн доод эгнээний нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 тоонууд зурагт үзүүлсэн байдлаар бичигдсэн бол хамгийн дээд нүдэнд бичигдсэн тоо хэдэн тэгээр төгсөх вэ?



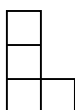
Бодолт. VII-3 бодолтыг харна уу.

Бодлого VIII-3. Цифрүүд нь буурах дараалалтай тоог буурдаг тоо гэж нэрлэе. Жишээ нь 310 нь буурдаг тоо, харин 12, 333 нь буурдаг тоо биш. 111-д хуваагддаг буурдаг тоо олдох уу?

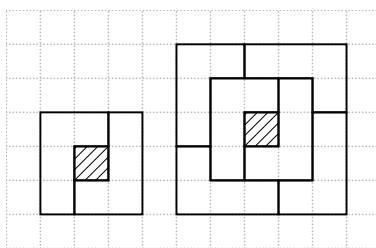
Бодолт. Хариу: Олдохгүй.

111-д хуваагддаг буурдаг тоо оршин байдаг гэж үзье. Тэгвэл эдгээрийн хамгийн бага нь оршин байна. A нь хамгийн бага буурдаг тоо байг. Хэрэв A тооны сүүлийн цифр 0 биш бол $A - 111$ тоо нь A -аас бага буурдаг тоо болоход хүрч зөрчил үүснэ. Харин A тоо тэг цифрээр төгсдөг бол $(10, 111) = 1$ тул $A/10$ тоо 111-д хуваагдах буурдаг тоо байна. Энэ A тооны сонголттой зөрчилдөж байна. Иймд 111-д хуваагдах буурдаг тоо оршин байхгүй.

Бодлого VIII-4. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурсан сондгой талтай квадратын төвийн нүдийг ухаж авчээ. Квадратын үлдэх хэсгийг зурагт үзүүлсэн 4 нүдтэй дүрсэд хувааж болохыг батал (дүрсийг яаж ч эргүүлж болно).



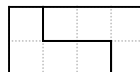
Бодолт. 3, 5 талтай квадратын хувьд зурагт үзүүлсэнээр болно.



$n \geq 3$ сондгой талтай квадратын эсрэг хоёр буланд Γ хэлбэрийн



дүрсийг байрлуулаад, талуудыг дагуулан 2×4 хэмжээтэй $n + 4$ талтай квадрат үүсгэж болохыг шалгахад төвөггүй.



Индукцээр бодлого бодогдлоо.

IX анги

Бодлого IX-1. Дараалж бичигдсэн 3 цифрээр үүсэх бүх тоо нь анхны тоо байдаг хамгийн их натурал тоог ол.

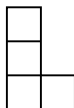
Бодолт. Хариу: Оршин байхгүй.

113, 131, 311 тоонууд нь анхны тоонууд тул

$$113113113 \dots$$

тооны дараалсан 3 цифрээр бичигдэх тоо бүр анхны тоо байна. Иймд ийм хамгийн их тоо оршин байхгүй.

Бодлого IX-2. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурсан сондгой талтай квадратын төвийн нүдийг ухаж авчээ. Квадратын үлдэх хэсгийг зурагт үзүүлсэн 4 нүдтэй дүрсэд хувааж болохыг батал (дүрсийг яаж ч эргүүлж болно).



Бодолт. **VIII-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого IX-3. Зохиомол тооны өөрөөс нь ялгаатай, бас 1-ээс ялгаатай хуваагчийг *жинхэнэ* хуваагч гэж нэрлэдэг. Нийлбэр нь 1001 байх ялгаатай 3 жинхэнэ хуваагчтай хамгийн бага зохиомол тоог ол.

Бодолт. **Хариу:** 924.

Олох тоог n гэе. Тэгвэл

$$1001 = d_1 + d_2 + d_3 = n \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \right) \leq n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{12}n$$

буюу $n \geq \frac{1001 \cdot 12}{13} = 924$ болно. $n = 924$ үед $d_1 = \frac{924}{2} = 462$, $d_2 = \frac{924}{3} = 308$, $d_3 = \frac{924}{4} = 231$ ба

$$d_1 + d_2 + d_3 = 462 + 308 + 231 = 1001$$

тул $n = 924$ бодлогын нөхцөл хангана.

Бодлого IX-4. Зөв ABC гурвалжны гадна талд $ABDE$ квадратыг байгуулжээ. AD , CE хэрчмүүд K цэгт огтлолцдог бол $CK = DK$ гэдгийг батал.

Бодолт. $\angle CAE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, $AC = AE$ тул

$$\angle ACE = \angle AEC = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

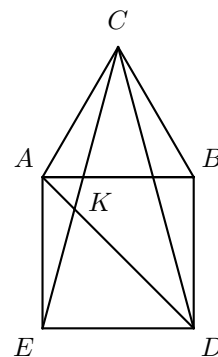
байна. $\triangle ACE = \triangle BCD$ тул $\angle BCD = \angle BDC = 15^\circ$ байна.

$$\angle KCD = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$$

$$\angle KDC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

буюу $\angle KCD = \angle KDC$ тул $\triangle KCD$ гурвалжин адил хажуут гурвалжин болно.

Иймд $CK = DK$ байна.



Х анги

Бодлого X-1. $a + b = 2018$ бөгөөд $x^2 + ax + b = 0$ тэгшитгэл бүхэл шийдтэй байдаг бүх бүхэл a , b тоонуудыг ол.

Бодолт. **Хариу:** $(a, b) = (2018, 0)$, $(674, 1344)$, $(-2022, 4040)$, $(-678, 2696)$.

Бүхэл шийдүүд нь m , n гэе. Тэгвэл Виетийн теоремоор $m + n = -a$ ба $mn = b$ тул

$$(m - 1)(n - 1) = mn - m - n + 1 = a + b + 1 = 2019$$

болно. Эндээс m , n нь тэгш эрхтэй тул

$$(m-1, n-1) = (-1, -2019), (-3, -673), (1, 2019), (3, 673)$$

буюу

$$(m, n) = (0, -2018), (-2, -672), (2, 2020), (4, 674)$$

тохиолдлуудыг авч үзэхэд хангалттай. Эдгээр нь

$$(a, b) = (2018, 0), (674, 1344), (-2022, 4040), (-678, 2696)$$

тохиолдлуудад харгалзана.

Бодлого X-2. Зөв ABC гурвалжны гадна талд $ABDE$ квадратыг байгуулжээ. AD, CE хэрчмүүд K цэгт огтлолцдог бол $CK = DK$ гэдгийг батал.

Бодолт. **IX-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого X-3. 10×10 хэмжээтэй хөлгийн нүднүүдэд 1-ээс 100 хүртэлх тоонуудыг ямар нэг дараалаар бичжээ. Дотор нь бичигдсэн гурван тооны нийлбэр нь 3-т хуваагддаг 3 нүдтэй булан дүрс олдохыг батал.



Бодолт. Эсрэгээр нь дээр нь бичигдсэн 3 тооны нийлбэр нь 3-т хуваагддаг булан дүрс олддоггүй гэе. Бичигдсэн тоонуудынхаа оронд тухайн тоог 3-т хуваахад гарах үлдэгдлүүдийг авч үзье. Аливаа булан дүрсэд бичигдсэн 3 тооны нийлбэр 3-т хуваагдахгүй тул үлдэгдлүүд нь бүгд ялгаатай байж болохгүй. Иймд аль ч булан дүрсэд 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олдоно. Түүнчлэн аливаа 2×2 дүрсэд 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгөх 3 тоо байхгүй тул тоонуудыг нь 2, 2-оор нь 3-т хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг байхаар бүлэглэж болно. Эндээс хүснэгтэд бичигдсэн тоонууд дотор 3-т хуваагдах тоо тэгш тоотой болоход хүрч байна. Гэтэл 1-ээс 100 хүртэлх тоонууд дотор 33 ширхэг 3-т хуваагдах тоо байх тул зөрчил үүсэв. Иймд аль нэг булан дүрсэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 3-т хуваагдана.

Бодлого X-4. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт. Эхлээд

$$a + b + c = abc(a + b + c) = ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3}$$

болохыг анзааръя. Нөхцөлөөс $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ca$ тул Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{27}{2(ab+bc+ca)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{9}{2}$$

болж тэнцэтгэл биш батлагдав. Тэнцэтгэл биш зөвхөн $a = b = c = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ.

XI анги

Бодлого XI-1. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{9}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт. **X-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого XI-2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны A оройгоос AD өндөр татахад $2 \cdot BD = CD = AD$ байв. Гурвалжны AB тал дээр E цэгийг $AC = CE$ байхаар сонгон авсан бол $DE \perp AB$ гэдгийг батал.

Бодолт. C, D цэгүүдээс AB хэрчимд татсан перпендикулярын сууриуд нь харгалзан F, E' байг. Тэгвэл Фалесийн теоремоор $2BE' = E'F$ байна. $BD = x$ гэвэл $AD = CD = 2x$ ба Пифагорын теоремоор $AC = 2\sqrt{2}x, AB = \sqrt{5}x$ болно.

$$2S = AD \cdot CB = AB \cdot CF$$

гэдгээс

$$2x \cdot 3x = \sqrt{5}x \cdot CF$$

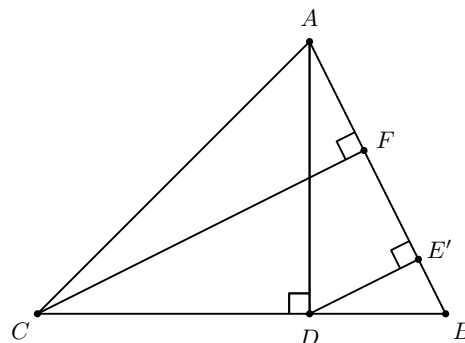
тул $CF = \frac{6\sqrt{5}}{5}x$ байна. Пифагорын теоремоор

$$BF = \sqrt{CB^2 - CF^2} = \sqrt{9x^2 - \frac{36}{5}x^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}x$$

ба эндээс $FE' = \frac{2}{3}BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ болно. Нөгөө талаас

$$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{8x^2 - \frac{36}{5}x^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

тул $AF = FE'$ буюу $E' \equiv E$ болно. $DE' \perp AB$ тул батлах зүйл батлагдав.



Бодлого XI-3. p нь 3-аас их анхны тоо бол $6^n + 3^n - 2^n$ илэрхийлэл p -д хуваагддаг натурал тоо n олдохыг батал.

Бодолт. (Т. Базарын бодолт)

$n = p - 2$ үед $p \mid 6^n + 3^n - 2^n$ гэж харуулъя. $p \geq 5$ анхны гэдгээс $(p, 2) = (p, 3) = (p, 6) = 1$ тул Фермагийн бага теоремоор

$$6^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

байна. Эндээс

$$6 \cdot (6^{p-2} + 3^{p-2} - 2^{p-2}) \equiv 6^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} - 3 \cdot 2^{p-1} \equiv 1 + 2 - 3 \equiv 0 \pmod{p}$$

болох ба $(p, 6) = 1$ тул бодлого бодогдов.

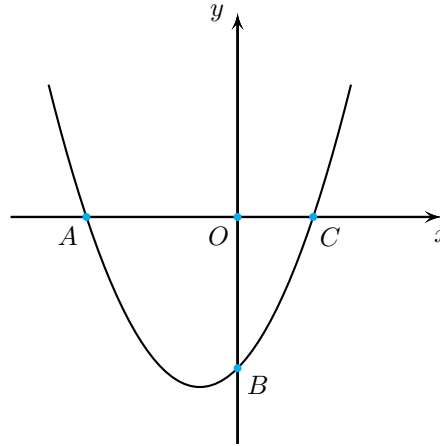
Бодлого XI-4. Бичлэгтээ 9 цифр агуулаагүй натурал тоог дутуу тоо гэж нэрлэе. Бүх гишүүд нь дутуу тоо байдаг өсдөг арифметик прогресс хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

Бодолт. **Хариу:** 72.

1, 126, 251, ..., 8876 арифметик прогрессийн аль ч гишүүнд 9 цифр агуулагдахгүй бөгөөд нийт 72 гишүүн бий.

ХII анги

Бодлого ХII-1. $y = x^2 + ax + b$ функцийн график Ox тэнхлэгийг A, C цэгүүдэд, Oy тэнхлэгийг B цэгт огтолно (зураг). $OA = OB$ бол OC хэрчмийн уртыг ол.



Бодолт. **Хариу:** $OC = 1$.

$B(0, y)$ гэвэл $y = 0^2 + a \cdot 0 + b$ тул $y = b$ байна. Иймд $B(0, b)$ ба $A(b, 0)$ болно. $C(c, 0)$ гэвэл Виетийн теоремоор $bc = b$ тул $c = 1$ байна.

Бодлого ХII-2. Хэдэн өнгийн 2047 ширхэг бөмбөгийг нэг эгнээнд байрлуулжээ. Дараалж байрласан хэдэн ч бөмбөгийг сонгож авахад дотор нь ядаж нэг онцгой бөмбөг заавал олддог байв (бусдаасаа өөр өнгөтэй бөмбөгийг онцгой бөмбөг гэж үзнэ). Бөмбөгнүүд нь хамгийн цөөндөө хэдэн өнгөтэй байж болох вэ?

Бодолт. $n \geq 1$ өнгийн бөмбөгийг бодлогын нөхцөл хангахаар байрлуулж болдог хамгийн урт дараалал a_n урттай гэе. $n \geq 1$ хувьд $a_{n+1} = 2a_n + 1$ болохыг индукцээр баталъя. $a_1 = 1$ байх нь илэрхий. n өнгөнд харгалзах хамгийн урт дараалал нь S , шинэ өнгийн бөмбөгөө x гэвэл S, x, S дараалал нь $2a_n + 1$ урттай бодлогын нөхцөлийг хангах дараалал юм. Одоо $2a_n + 2$ урттай бодлогын нөхцөлийг хангах дарааллыг $n + 1$ өнгийн бөмбөг ашиглан байгуулж болохгүйг харуулъя. Ийм дараалал оршин байвал түүний $2a_n + 2$ урттай дэд дараалал буюу өөрт нь ядаж нэг онцгой бөмбөг олддоно. Түүнийг нь x гэвэл дараалал маань X_1, x, X_2 хэлбэртэй байна. X_1, X_2 дарааллуудын нэг нь ядаж $a_n + 1$ урттай бөгөөд x -ээс ялгаатай өнгийн байх ёстой тул n бөмбөг ашиглан байгуулсан дараалал байх ёстой. Энэ нь a_n дарааллын тодорхойлолттой зөрчилдөж байна. Иймд $a_{n+1} \leq 2a_n + 2$ болж байна. $a_{n+1} \geq 2a_n + 1$ болохыг бид жишээгээр харуулсан тул $a_{n+1} = 2a_n + 1$ байна. Нөгөө талаас $a_n = 2^n - 1$ болохыг хялбархан харуулж болох ба $a_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ тул хамгийн цөөндөө 11 өнгийн бөмбөг шаардлагатай.

Бодлого ХII-3. p нь 3-аас их анхны тоо бол $6^n + 3^n - 2^n$ илэрхийлэл p -д хуваагддаг натурал тоо n олдохыг батал.

Бодолт. **ХI-3** бодолтыг харна уу.

Бодлого ХII-4. ABC гурвалжин дотор $\angle BDC = 90^\circ$ ба $\angle BAD = \angle BCD$ байх D цэгийг сонгон авчээ. Гурвалжны AC, BC талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан M, N бол $\angle DMN = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Бодолт. Т. Базарын ирүүлсэн бодолт.

CD хэрчмийн дундаж цэгийг E гэе. $\angle BDC = 90^\circ$, $BN = NC$ тул $DN = NC$ болно.

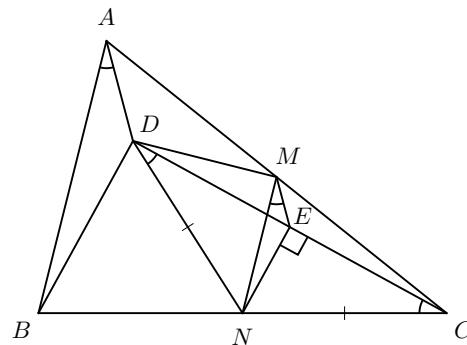
Иймд $NE \perp CD$ болно. Мөн ME ба NE нь харгалзан $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ -ийн дундаж шугамууд тул $ME \parallel AD$, $AB \parallel MN$ болно. Эндээс

$$\angle BAD = \angle NME = \angle BCD = \angle CDN$$

болно. Иймд $DMEN$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт болох тул

$$\angle DMN = \angle DEN = 90^\circ$$

болж батлагдав.



Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. Дараалж бичигдсэн 3 цифрээр үүсэх бүх тоо нь анхны тоо байдаг хамгийн их натурал тоог ол.

Бодолт. **ИХ-1** бодолтыг харна уу.

Бодлого ББ-2. Зузаан нимгэн хоёр төрлийн ном байжээ. Номын тавиур дээр 9 зузаан ном багтана, харин 10 зузаан ном багтахгүй. Мөн ийм тавиур дээр 15 нимгэн ном багтана, харин 16 нимгэн ном багтахгүй. Энэ тавиур дээр 5 нимгэн ном тавьжээ. Нэмж хамгийн олондоо хэдэн зузаан ном тавьж болох вэ?

Бодолт. **Хариу:** 6.

Тавиурын өргөнийг 1, зузаан номын зузааныг x , нимгэн номын зузааныг y гэе. Тэгвэл $x > y$ ба бодлогын нөхцлөөс $9x \leq 1 < 10x$ ба $15y \leq 1 < 16y$ болно. Одоо $nx + 5y \leq 1$ байдаг хамгийн том натурал n тоог олоход бодлогын хариу гарна.

$$n = 6 \text{ үед } 6x + 5y \leq \frac{6}{9} + \frac{5}{15} = 1 \text{ байна. } n = 7 \text{ үед } 7x + 5y > \frac{7}{10} + \frac{5}{16} = \frac{81}{80} > 1 \text{ байна.}$$

Бодлого ББ-3. Дөрвөлжин шугамтай цаасан дээр зурагдсан 20×18 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн 4 булангийн нүдийг тайрч хаяжээ. Үүсэх дүрсэд багтах шугамын дагуу талуудтай тэгш өнцөгтийн тоог ол.

Бодолт. **Хариу:** 27705.

Булангийн нүднүүдийг байгаа гэж үзээд тэгш өнцөгтүүдийг тоолбол $C_{20}^2 \cdot C_{18}^2 = 29070$ тэгш өнцөгт байна. Үүнээс ядаж нэг булангийн нүд агуулсан тэгш өнцөгтүүдийг хасахад бидний олох тэгш өнцөгтийн тоо гарах юм. Булангийн нүднүүдийг $A(1, 1)$, $B(1, 18)$, $C(20, 1)$, $D(20, 18)$ гэе. Эдгээрээс зөвхөн нэг орой агуулсан тэгш өнцөгт $4 \times 19 \times 17 = 1292$ ширхэг байна. Яг хоёрыг нь агуулсан A ба B , C ба D -г агуулсан тус бүр 19; A ба C , B ба D -г агуулсан тус бүр 17 тэгш өнцөгт тул нийт $2 \cdot 19 + 2 \cdot 17 = 72$ ширхэг байна. Яг 3 орой агуулсан тэгш өнцөгт байхгүй, 4 оройг бүгдийг нь агуулдаг 1 тэгш өнцөгт байгаа тул бидний олох тоо

$$29070 - 1292 - 72 - 1 = 27705$$

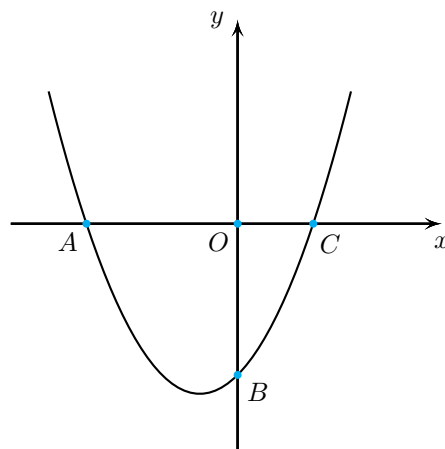
юм.

Бодлого ББ-4. Дотроо 0, 1, 2, 3, 4 ширхэг будагдсан нүд агуулдаг 2×2 хэмжээтэй квадратын тоонууд хоорондоо тэнцүү байхаар 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүднүүдийг будаж болох уу?

Бодолт. **VII-4** бодолтыг харна уу.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. $y = x^2 + ax + b$ функцийн график Ox тэнхлэгийг A, C цэгүүдэд, Oy тэнхлэгийг B цэгт огтолно (зураг). $OA = OB$ бол OC хэрчмийн уртыг ол.



Бодолт. **XII-1** бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-2. Бичлэгтээ 9 цифр агуулаагүй натурал тоог дутуу тоо гэж нэрлэе. Бүх гишүүд нь дутуу тоо байдаг өсдөг арифметик прогресс хамгийн олондоо хэдэн гишүүнтэй байж болох вэ?

Бодолт. **XI-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-3. ABC гурвалжин дотор $\angle BDC = 90^\circ$ ба $\angle BAD = \angle BCD$ байх D цэгийг сонгон авчээ. Гурвалжны AC, BC талуудын дундаж цэгүүд нь харгалзан M, N бол $\angle DMN = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Бодолт. **XII-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-4. $1 + a^2 + b^3 = c^6$ тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал a, b, c шийдтэй гэдгийг харуул.

Бодолт. Я. Лхагвагэрэл багшийн ирүүлсэн бодолт.

$s^2 - 3t^2 = 1$ байдаг натурал (s, t) тоонуудын хувьд

$$\begin{cases} a = 3st \\ b = s^2 - 1 \\ c = s \end{cases}$$

гэж авахад

$$\begin{aligned} 1 + a^2 + b^3 &= 1 + 9s^2t^2 + (s^2 - 1)^3 \\ &= 1 + 3s^2(s^2 - 1) + (s^2 - 1)^3 \\ &= 1 + 3s^4 - 3s^2 + s^6 - 3s^4 + 3s^2 - 1 \\ &= s^6 \\ &= c^6 \end{aligned}$$

болж бодлогын тэгшитгэлийн шийд болж байна. $x^2 - 3y^2 = 1$ Пеллийн тэгшитгэл төгсгөлгүй олон натурал шийдтэй тул бодлого бодогдлоо.

Бүсийн математикийн V олимпиад (2019)

Бодлогууд

V анги

Бодлого V-1. Сургуулийн аялалд явсан сурагч бүрээс ангийнх нь хэдэн сурагч хамт явсныг асуухад 10 хүүхэд дөрөв, 12 хүүхэд гурав, 6 хүүхэд хоёр, 4 хүүхэд нэг гэж хариулжээ. Сурагч бүр ангийн багштайгаа хамт явсан бөгөөд ангийнх нь аль нэг сурагч нь аялалд явсан тохиолдолд л багш нь аялалд оролцсон бол хэдэн сурагч, хэдэн багш аялалд явсан бэ?

Бодлого V-2. Гурван тоорой ширээ тойрон суугаад самар цөмж гэнэ. Ахмад тооройг 3 самар цөмөхөд дунд тоорой 4 самар цөмдөг, харин дунд тооройг 3 самар цөмөхөд отгон тоорой 5 самар цөмдөг байв. Тэд гурвуулаа нийлээд 2460 самар цөмсөн бол дунд тоорой хэдэн самар цөмсөн бэ?

Бодлого V-3. Самбарт анх a гэсэн натурал тоо бичигдсэн байв. a тоог арчаад оронд нь $2 \times a$ тоог эсвэл $2 \times a + 1$ тоог бичиж болно. Энэ үйлдлийг хийсээр байгаад 2019-ийг бичиж болдог бол a тоог “онцгой” тоо гэе. Хэдэн онцгой тоо байгаа вэ?

Бодлого V-4. Багш самбарт таван цифрийн үржвэрийг бодсон жишээ бичсэн байжээ. Бат жишээний хоёр цифрийг нь арчаад оронд нь хоёр цифр бичиж

$$4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 2247$$

гэсэн илэрхийлэл гаргажээ. Тэгвэл багш анх самбарт ямар жишээ бичсэн байсан бэ?

VI анги

Бодлого VI-1. 6A ангийн 32 сурагч ямар нэг дугуйланд суралцдаг ба энэ ангид 2 сурагч зэрэгцэн суудаг 24 ширээ байдаг. Математикийн хичээлийн түвшин тогтоох шалгалтыг 2, 3, 4, 5 гэсэн дүнгээр дүгнэх бөгөөд 6A ангийн хөвгүүдийн дундаж дүн 4-тэй, охидын дундаж дүн 3.25-тай тэнцүү гарчээ. Харин ангийн сурагчдын дундаж дүн 3.6-тай тэнцүү байсан бол энэ анги хэдэн охинтой вэ?

Бодлого VI-2. 8×8 хэмжээтэй шатрын хөлгийн зүүн доод буланд цагаан тэрэг, зүүн дээд буланд хар тэрэг байрласан байв. Цагаан тоглогч өөрийн ээлжинд цагаан тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийг нь дагуу 2 юмуу 4 нүд, хар тоглогч хар тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийг нь дагуу 3 юмуу 5 нүд нүүж болно. Эхэлж цагаан тоглогч нүүнэ, дараа нь хар тоглогч нүүнэ гэх мэтээр ээлжилж нүүнэ. Хар тоглогч яг 10 дахь нүүдлээрээ цагаан тэргийг идэх (өөрийн тэргийг цагаан тэрэг байгаа нүдэнд байрлуулах) боломжтой юу?

Бодлого VI-3. 1×10 хүснэгтийн нүднүүдэд 0, 1, 2, ..., 8, 9 цифрүүдийг нэг нэгээр нь бичих болов. Эхлээд аль нэг нүдэнд 0-ийн цифр бичнэ. Дараа нь 0-ийн цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хөрш нүдэнд 1-ийн цифр бичнэ. Дараа нь ямар нэг цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хоосон хөрш нүдэнд 2-ийн цифр бичнэ гэх мэтээр бүх цифрийг хэчнээн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

Бодлого VI-4. $n < S(n) + 2019$ нөхцөлийг хангах n натурал тоо хэчнээн ширхэг байх вэ? Энд $S(n)$ нь n натурал тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

VII анги

Бодлого VII-1. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2018^2, 2019^2$ гэсэн тоонууд дотор аравтын орны цифр нь сондгой байдаг хэдэн тоо байх вэ?

Бодлого VII-2. 2019×2019 хүснэгтийн бүх нүдэнд бүхэл тоонуудыг бичив. Эдгээр нь бүгд нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш байсан бол аль ч 2×2 ба 3×3 хүснэгт дотор бичигдсэн тоонуудын нийлбэр тэгтэй тэнцүү байж болох уу?

Бодлого VII-3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

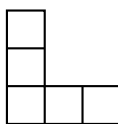
Бодлого VII-4. Цифр бүр нь өөртэйгээ тэнцүү удаа орсон 7 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Жишээ нь 1224444 тоонд 1 цифр 1 удаа, 2 цифр 2 удаа, 4 цифр 4 удаа орсон байна.

VIII анги

Бодлого VIII-1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

Бодлого VIII-2. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

Бодлого VIII-3. 8×8 хүснэгтийн нүднүүдийг улаан, хөх, шар өнгийн аль нэгээр будав.



Зурагт өгсөн булан дүрсийг хүснэгтийн хаана ч авсан түүний нүднүүд дотор дээрх 3 өнгөөр будагдсан нүднүүд олддог байхаар хүснэгтийг будах ялгаатай аргын тоог n гээ. Тэгвэл $n \geq 6^8$ гэдгийг батал.

Бодлого VIII-4. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор ялгаатай тоо хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

IX анги

Бодлого IX-1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

Бодлого IX-2. $n = x + y + (x, y) + [x, y]$ байхаар x, y натурал тоо олддог бол n натурал тоог сайн тоо гээ. Эхний 2019 натурал тоон дотор хэдэн сайн тоо байгаа вэ? Энд (x, y) -ээр x, y тоонуудын ХИЕХ-г, $[x, y]$ -ээр x, y тоонуудын ХБЕХ-г тэмдэглэв.

Бодлого IX-3. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байж болох вэ?

Бодлого IX-4. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE : EB = 1 : 3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF : FC = 3 : 2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG : GD = 1 : 4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Х анги

Бодлого Х-1. $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a^4 + 3} + \frac{1}{b^4 + 3} + \frac{1}{c^4 + 3} \geq \frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого Х-2. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE : EB = 1 : 3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF : FC = 3 : 2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG : GD = 1 : 4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Бодлого Х-3. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ болог. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг *шидэт биш квадрат* гэе. Шидэт биш квадратад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодлого Х-4. $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ байг. Ямар нэг натурал тоо n -ийн хувьд $f(n)$ нь яг зургаан ялгаатай натурал тоон хуваагчтай бол $n^3 - n + 1$ нь натурал тооны квадрат болохыг батал.

XI анги

Бодлого XI-1. $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a^4 + 3} + \frac{1}{b^4 + 3} + \frac{1}{c^4 + 3} \geq \frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого XI-2. a_n дараалал $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$, ($n \geq 1$) рекуррент томъёогоор өгөгдөв. $a_1 = 1$ ба $a_{2018} = 3$ бол a_{2019} хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодлого XI-3. Урдаасаа болон ардаасаа ижилхэн уншигддаг натурал тоог *толин тоо* гэе. (палиндром тоо) Жишээлбэл 12321, 2004002 толин тоонууд. 9 оронтой m гэсэн тоог баруунаас зүүн тийш урвуу эрэмбээр бичихэд гарах 9 оронтой тоог n гэе. Хэрэв mn үржвэр толин тоо бөгөөд оронгийн тоо нь сондгой бол m -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Бодлого XI-4. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E , AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF -тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E -тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.

XII анги

Бодлого XII-1. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E , AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF -тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E -тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.

Бодлого XII-2. $(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Бодлого XII-3. n өгөгдсөн натурал тоо байг. Тэгвэл дараах хоёр нөхцөлийг хангах $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$ сөрөг биш бүхэл тоон гуравт хамгийн олондоо хэдэн ширхэг байж болох вэ?

- (i) Аливаа i дугаарын хувьд $x_i + y_i + z_i = n$ байна.
- (ii) $x_1, x_2, x_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $y_1, y_2, y_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $z_1, z_2, z_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй.

Бодлого XII-4. $f(x)$ функц $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй бөгөөд аливаа бодит x тооны хувьд

$$20f(19x) = f(x) + x^2$$

тэнцэтгэл биелдэг бол $f(x) < \frac{x}{2019}$ тэнцэтгэл бишийн бүх бүхэл шийдийг ол.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. Ямар нэг n натурал тооны хувьд $m = n - S(n)$ гэж бичигдэх m натурал тоог сайн тоо гэж нэрлэе. 2019-өөс хэтрэхгүй хэчнээн ширхэг сайн тоо байх вэ? Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр.

Бодлого ББ-2. Аль ч хоёрынх нь нийлбэр ялгавартаа хуваагддаг, 2019 ширхэг натурал тоо оршин байх уу?

Бодлого ББ-3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

Бодлого ББ-4. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ болог. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг “шидэт биш квадрат” гее. Шидэт биш квадратад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. O төвтэй тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд хоорондоо перпендикуляр байв. AB талын дундаж E , BC талын дундаж F , CD талын дундаж G , AD талын дундаж H бол

$$2(OE + OF + OG + OH) = AB + BC + CD + DA$$

гэж батал.

Бодлого ДБ-2. $(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Бодлого ДБ-3. $56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq 4312$ тэнцэтгэл бишийг батал.

Бодлого ДБ-4. $u_1 = v_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

гэж тодорхойлогдсон u_n, v_n дарааллуудын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

Бодолтууд

V анги

Бодлого V-1. Сургуулийн аялалд явсан сурагч бүрээс ангийнх нь хэдэн сурагч хамт явсныг асуухад 10 хүүхэд дөрөв, 12 хүүхэд гурав, 6 хүүхэд хоёр, 4 хүүхэд нэг гэж хариулжээ. Сурагч бүр ангийн багштайгаа хамт явсан бөгөөд ангийнх нь аль нэг сурагч нь аялалд явсан тохиолдолд л багш нь аялалд оролцсон бол хэдэн сурагч, хэдэн багш аялалд явсан бэ?

Бодолт. **Хариу:** 32 сурагч, 9 багш явсан.

Нийт сурагчийн тоо $10 + 12 + 6 + 4 = 32$ байна. Хариултаас 5 сурагч явсан анги хоёр, 4 сурагч явсан анги гурав, 3 сурагч явсан анги хоёр, 2 сурагч явсан анги 2 байна. Иймд аялалд явсан ангийн тоо нь $2 + 3 + 2 + 2 = 9$ тул 9 багш аялалд явжээ.

Бодлого V-2. Гурван тоорой ширээ тойрон суугаад самар цөмж гэнэ. Ахмад тооройг 3 самар цөмөхөд дунд тоорой 4 самар цөмдөг, харин дунд тооройг 3 самар цөмөхөд отгон тоорой 5 самар цөмдөг байв. Тэд гурвуулаа нийлээд 2460 самар цөмсөн бол дунд тоорой хэдэн самар цөмсөн бэ?

Бодолт. **Хариу:** 720 самар цөмнө.

Ахмад тоорой $3 \times 3 = 9$ самар цөмөхөд дунд тоорой $4 \times 3 = 12$ самар цөмнө. Харин отгон тоорой $5 \times 4 = 20$ самар цөмнө. Тэр гурав хамтдаа $9 + 12 + 20 = 41$ самар цөмнө. $2460 \div 41 = 60$. Иймд дунд тоорой $60 \times 12 = 720$ самар цөмнө.

Бодлого V-3. Самбарт анх a гэсэн натурал тоо бичигдсэн байв. a тоог арчаад оронд нь $2 \times a$ тоог эсвэл $2 \times a + 1$ тоог бичиж болно. Энэ үйлдлийг хийсээр байгаад 2019-ийг бичиж болдог бол a тоог “онцгой” тоо гэе. Хэдэн онцгой тоо байгаа вэ?

Бодолт. **Хариу:** 10 онцгой тоо байгаа.

$2019 \leftarrow 2 \times 1009 + 1$, $1009 \leftarrow 2 \times 504 + 1$, $504 \leftarrow 2 \times 252$, $252 \leftarrow 2 \times 126$, $126 \leftarrow 2 \times 63$, $63 \leftarrow 2 \times 31 + 1$, $31 \leftarrow 2 \times 15 + 1$, $15 \leftarrow 2 \times 7 + 1$, $7 \leftarrow 2 \times 3 + 1$, $3 \leftarrow 2 \times 1 + 1$ тул 2019 нь

$$1009, 504, 252, 126, 63, 31, 15, 7, 3, 1$$

гэсэн 10 онцгой тооноос л үүсч болно.

Бодлого V-4. Багш самбарт таван цифрийн үржвэрийг бодсон жишээ бичсэн байжээ. Бат жишээний хоёр цифрийг нь арчаад оронд нь хоёр цифр бичиж

$$4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 2247$$

гэсэн илэрхийлэл гаргажээ. Тэгвэл багш анх самбарт ямар жишээ бичсэн байсан бэ?

Бодолт. **Хариу:** Самбарт анх $4 \times 5 \times 4 \times 7 \times 4 = 2240$ эсвэл $4 \times 7 \times 4 \times 5 \times 4 = 2240$ гэсэн жишээ байсан.

Сүүлд гарсан илэрхийллийн хувьд гурван ширхэг тэгш үржигдэхүүнтэй байгаа тул анх байсан илэрхийллийн дор хаяж нэг үржигдэхүүн тэгш байсан. Иймд үржвэрийн утга тэгш тоо гарах ёстой. Өөрөөр хэлбэл хамгийн сүүлийн 7 цифрийг шинээр бичсэн. Энэ тохиолдолд хоёр ширхэг 5 цифрийн ядаж нэг нь анх байсан тул үржвэр нь 10-д хуваагдана. Иймд сүүлийн цифр нь 0 байжээ. Хэрвээ үржигдэхүүнүүдийн аль нэгийг шинээр бичээгүй гэвэл анх $4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 = 1600$ гэсэн жишээ байх ёстой. Гэтэл энэ нь боломжгүй юм. Иймд сүүлийн 0 цифрээс өөр цифр үржвэрээс өөрчлөгдөөгүй. Иймд үржвэр нь 2240 байсан бөгөөд аль нэг 5 цифрийг шинээр бичсэн. Эндээс зөвхөн

$$4 \times 5 \times 4 \times 7 \times 4 = 2240 \quad \text{эсвэл} \quad 4 \times 7 \times 4 \times 5 \times 4 = 2240$$

гэсэн хоёр боломж байгаа нь харагдаж байна.

VI анги

Бодлого VI-1. 6A ангийн 32 сурагч ямар нэг дугуйланд суралцдаг ба энэ ангид 2 сурагч зэрэгцэн суудаг 24 ширээ байдаг. Математикийн хичээлийн түвшин тогтоох шалгалтыг 2, 3, 4, 5 гэсэн дүнгээр дүгнэх бөгөөд 6A ангийн хөвгүүдийн дундаж дүн 4-тэй, охидын дундаж дүн 3.25-тай тэнцүү гарчээ. Харин ангийн сурагчдын дундаж дүн 3.6-тай тэнцүү байсан бол энэ анги хэдэн охинтой вэ?

Бодолт. **Хариу:** 6A анги 45 сурагчтай 24 охинтой.

Анги x хөвгүүнтэй, y охинтой гэе. Тэгвэл $32 \leq x + y \leq 48$ байна. Хөвгүүдийн дүнгийн нийлбэр $4x$, охидын дүнгийн нийлбэр $3.25y$ ба ангийн сурагчдын авсан дүнгийн нийлбэр

$$4x + 3.25y = 3.6(x + y)$$

болно. Эндээс $8x = 7y$ буюу $x : y = 7 : 8$ болж ангийн сурагчдын тоо $x + y$ нь 15-д хуваагдах ёстой. 32-оос 48-ын хооронд орших 15-д хуваагддаг цор ганц тоо нь $x + y = 45$ болно. $x : y : (x + y) = 7 : 8 : 15$ тул $x = 21$, $y = 24$ байна.

Бодлого VI-2. 8×8 хэмжээтэй шатрын хөлгийн зүүн доод буланд цагаан тэрэг, зүүн дээд буланд хар тэрэг байрласан байв. Цагаан тоглогч өөрийн ээлжинд цагаан тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийг нь дагуу 2 юмуу 4 нүд, хар тоглогч хар тэргийг босоо эсвэл хөндлөн чиглэлийн аль нэгийг нь дагуу 3 юмуу 5 нүд нүүж болно. Эхэлж цагаан тоглогч нүүнэ, дараа нь хар тоглогч нүүнэ гэх мэтээр ээлжилж нүүнэ. Хар тоглогч яг 10 дахь нүүдлээрээ цагаан тэргийг идэх (өөрийн тэргийг цагаан тэрэг байгаа нүдэнд байрлуулах) боломжтой юу?

Бодолт. **Хариу:** Боломжгүй.

8×8 хэмжээтэй шатрын хөлгийн зүүн доод ба зүүн дээд булан өөр өнгийн нүднүүд юм. Тэрэг тус бүр тэгш удаа нүүсний дараа өөрийн анх байсан нүдтэй ижил өнгийн нүдэнд байрлана. Иймд яг 10 нүүгээд хар тэрэг, цагаан тэргийг идэх боломжгүй юм.

Бодлого VI-3. 1×10 хүснэгтийн нүднүүдэд 0, 1, 2, ..., 8, 9 цифрүүдийг нэг нэгээр нь бичих болов. Эхлээд аль нэг нүдэнд 0-ийн цифр бичнэ. Дараа нь 0-ийн цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хөрш нүдэнд 1-ийн цифр бичнэ. Дараа нь ямар нэг цифр бичигдсэн нүдний аль нэг хоосон хөрш нүдэнд 2-ийн цифр бичнэ гэх мэтээр бүх цифрийг хэчнээн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

Бодолт. **Хариу:** $2^9 = 512$ ялгаатай аргаар бичиж болно.

Хамгийн анх бичигдсэн 0-ийн цифрийн баруун гар талд байгаа цифрүүд нь өсөх эрэмбэтэй 9-өөс олонгүй оронтой тоо үүсгэнэ. Харин үлдэх цифрүүд нь 0 цифрийн зүүн гар талд буурах эрэмбээр бичигдэнэ. Өөрөөр хэлбэл бичлэг бүр нь 0 цифрийн баруун талд байгаа цифрүүдээр бүрэн тодорхойлогдоно. Энэ тоо нь 9 элементтэй олонлогийн дэд олонлогийн тоо буюу $2^9 = 512$ гэсэн хариу гарна.

Бодлого VI-4. $n < S(n) + 2019$ нөхцөлийг хангах n натурал тоо хэчнээн ширхэг байх вэ? Энд $S(n)$ нь n натурал тооны цифрүүдийн нийлбэр юм.

Бодолт. **Хариу:** 2029 ширхэг.

$n < S(n) + 2019$ нөхцөл хангадаг тоог сайн тоо гээ. $n \leq 1999$ тоонууд сайн болох нь илт тул $n \geq 2000$ сайн тоог тоолъё.

Дурын n тооны хувьд $n + 90 \geq 10S(n)$ байна. Үнэхээр, $n = \overline{a_1 \dots a_k}$ гэвэл $n + 90 \geq n + 10a_k \geq 10(a_1 + \dots + a_k) = 10S(n)$ байна. Иймд $n \geq 3000$ бол $n - S(n) \geq n - \frac{n+90}{10} = \frac{9}{10}n - 9 \geq 2691$ тул сайн биш.

Тэгэхээр $2000 \leq n \leq 2999$ сайн тоог тоолоход болно. $n = \overline{2bcd}$ гэвэл n тоо сайн байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$n - S(n) = 2000 + 100b + 10c + d - (2 + b + c + d) = 1998 + 99b + 9c < 2019$$

буюу $99b + 9c < 21$ байна. Эндээс $b = 0, c = 0, 1, 2$ ба тохиолдол бүрд d нь 10 боломжтой тул ийм хэлбэрийн сайн тоо 30 ширхэг байна. Нийт $1999 + 30 = 2029$ ширхэг тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

VII анги

Бодлого VII-1. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2018^2, 2019^2$ гэсэн тоонууд дотор аравтын орны цифр нь сондгой байдаг хэдэн тоо байх вэ?

Бодолт. **Хариу:** 404 тоо.

$A = \overline{ab \dots cd}$ ба $k = \overline{ab \dots c}$ гэвэл $A = 10k + d$ ба

$$A^2 = (10k + d)^2 = 20(5k^2 + kd) + d^2$$

тул A^2 тооны 10-тын орны цифр нь сондгой байх бүрэн нөхцөл нь d^2 -ийн аравтын орны цифр сондгой байх болно. Ийм байх хоёр л цифр байгаа: $d = 4, d = 6$. Эндээс 1-ээс 2019 хүртэлх тоонууд дотор 4 эсвэл 6 цифрээр төгссөн хэдэн тоо байгааг тоолоход хангалттай юм. 4, 14, 24, 34, ..., 2014 дараалалд 202 ширхэг тоо, 6, 16, 26, 36, ..., 2016 дараалалд мөн 202 ширхэг тоо нийт $202 + 202 = 404$ ширхэг тоо байна.

Бодлого VII-2. 2019×2019 хүснэгтийн бүх нүдэнд бүхэл тоонуудыг бичив. Эдгээр нь бүгд нэгэн зэрэг тэгтэй тэнцүү биш байсан бол аль ч 2×2 ба 3×3 хүснэгт дотор бичигдсэн тоонуудын нийлбэр тэгтэй тэнцүү байж болох уу?

Бодолт. **Хариу:** Болно.

1	-1	1	-1	1	-1	...
-1	1	-1	1	-1	1	...
0	0	0	0	0	0	...
1	-1	1	-1	1	-1	...
-1	1	-1	1	-1	1	...
0	0	0	0	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱.

Бодлого VII-3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

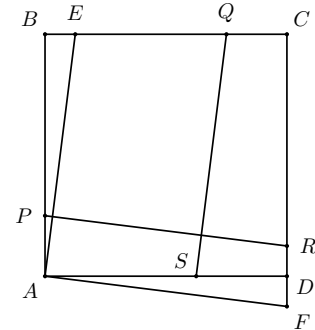
Бодолт. A цэгийг дайрсан QS шулуунтай параллел шулуун BC шулуунтай E цэгт, A цэгийг дайрсан PR шулуунтай параллел шулуун CD шулуунтай F цэгт огтлолцдог байг. Тэгвэл $AS = EQ$, $AP = RF$ учраас

$$AP + AS + CQ + CR = EC + CF = 2a$$

буюу $EC = 2a - CF$ болно.

$$\begin{aligned} BE &= a - EC = a - (2a - CF) \\ &= CF - a = CF - CD = DF \end{aligned}$$

ба $AB = AD$, $\angle ABE = \angle ADF = 90^\circ$ тул $\triangle ABE = \triangle ADF$ болох ба $AE = AF$ байна. Эндээс $SQ = PR$ байна.



Бодлого VII-4. Цифр бүр нь өөртэйгээ тэнцүү удаа орсон 7 оронтой тоо хэдэн ширхэг байх вэ? Жишээ нь 1224444 тоонд 1 цифр 1 удаа, 2 цифр 2 удаа, 4 цифр 4 удаа орсон байна.

Бодолт. **Хариу:** 169 ширхэг.

7 нь ялгаатай тоонуудын нийлбэрт $7 = 1 + 2 + 4$, $7 = 1 + 6$, $7 = 2 + 5$, $7 = 3 + 4$, $7 = 7$ гэж 4 янзаар задарна. $7 = 1 + 2 + 4$ үед 4 цифрийг $\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$, хоёр ширхэг 2 цифрийг $\binom{3}{2} = 3$ янзаар, үлдэх нэг ширхэг 1 цифрийг 1 янзаар байрлуулах тул $35 \cdot 3 = 105$ боломж бий. $1 + 6 = 7$ бол нэг ширхэг 1 цифрийг 7 янзаар байрлуулна. $2 + 5 = 7$ гэвэл хоёр ширхэг 2 цифрийг $\binom{7}{2} = 21$ янзаар байрлуулна. $3 + 4 = 7$ бол $\binom{7}{3} = 35$ ширхэг тоо үүснэ. $7 = 7$ үед 7777777 гэсэн 1 ширхэг тоо байна. Иймд бодлогын нөхцөлийг хангах $105 + 7 + 21 + 35 + 1 = 169$ ширхэг тоо байна.

VIII анги

Бодлого VIII-1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

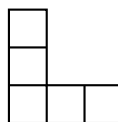
Бодолт. **Хариу:** Болохгүй.

Тэгш n -ийн хувьд сүүлийн цифр нь 3 юмуу 7 байна. Харин сондгой n -ийн хувьд 3-т хуваахад 2 үлдэгдэгдэл өгнө. Аль ч тохиолдолд бүхэл тооны квадрат байж чадахгүй.

Бодлого VIII-2. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

Бодолт. **VII-3** бодолтыг харна уу.

Бодлого VIII-3. 8×8 хүснэгтийн нүднүүдийг улаан, хөх, шар өнгийн аль нэгээр будав.



Зурагт өгсөн булан дүрсийг хүснэгтийн хаана ч авсан түүний нүднүүд дотор дээрх 3 өнгөөр будагдсан нүднүүд олддог байхаар хүснэгтийг будах ялгаатай аргын тоог n гэе. Тэгвэл $n \geq 6^8$ гэдгийг батал.

Бодолт. 5 нүдтэй булан дүрс 1×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийг агуулна. 8×8 хүснэгтийн дурын мөрийг өгөгдсөн 3 өнгөөр, уг мөрийн хаана ч 1×3 тэгш өнцөгт авахад тэгш өнцөгтийг 3 нүд өөр, өөр өнгөтэй байхаар будах ялгаатай аргын тоо 6-тай тэнцүү. Иймд

у	х	ш	у	х	ш	у	х
у	ш	ч	у	ш	х	у	ш
х	у	ш	х	у	ш	х	у
х	ш	у	х	ш	у	х	у
ш	у	ч	ш	у	х	ш	у
ш	х	у	ш	х	у	ш	х

Иймд 8×8 хүснэгтийн аль ч мөрийн 1×3 тэгш өнцөгтийн 3 нүд өөр, өөр өнгөтэй байхаар будах ялгаатай аргын тоо нь 6^8 -тэй тэнцүү. Ийм будалт бодлогын нөхцөлийг хангах нь ойлгомжтой. Эндээс $n \geq 6^8$ болно.

Бодлого VIII-4. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор ялгаатай тоо хамгийн олондоо хэд байж болох вэ?

Бодолт. **Хариу:** 999 тоо.

Хэрэв эдгээр 2000 тоон дотор хоорондоо ялгаатай 1000 тоо байдаг гээд тэдгээрийг

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{1000}$$

гэж эрэмбэлсэн гэе. Үлдсэн 1000 тоог мөн

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{1000}$$

гэж эрэмбэлье. Дараа нь

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{1000}, b_{1000})$$

гэж 1000 хос үүсгэе. Тэгвэл

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_2 < \dots < a_{1000} + b_{1000}$$

болоход хүрч зөрчилд хүрнэ. Иймд эдгээр 2000 тоон дотор 1000-аас цөөн тооны ялгаатай тоонууд байна. Харилцан ялгаатай тоонууд нийт 999 байж болох жишээ нь

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{1002}, 2, 3, 4, \dots, 998, 999$$

гэсэн 2000 тоо юм.

IX анги

Бодлого IX-1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n$ тоо бүхэл тооны квадрат болох уу?

Бодолт. **VIII-1** бодолтыг харна уу.

Бодлого IX-2. $n = x + y + (x, y) + [x, y]$ байхаар x, y натурал тоо олддог бол n натурал тоог сайн тоо гэе. Эхний 2019 натурал тоон дотор хэдэн сайн тоо байгаа вэ? Энд (x, y) -ээр x, y тоонуудын ХИЕХ-г, $[x, y]$ -ээр x, y тоонуудын ХБЕХ-г тэмдэглэв.

Бодолт. **Хариу:** 1008 сайн тоо бий.

Ерөнхий тохиолдолд $n > 2$, тэгш тоо бүр сайн тоо, сондгой тоо бүр сайн тоо биш гэж баталъя. Хэрэв x ба y нь тэгш сондгойгоороо ижил тоонууд байвал $x, y, (x, y), [x, y]$ тоонууд тэгш сондгойгоорой ижилхэн тоонууд байх тул тэдгээрийн нийлбэр тэгш тоо байна. Хэрэв x, y нь тэгш сондгойгоорой өөр, өөр тоонууд байвал (x, y) сондгой тоо, $[x, y]$ тэгш тоо тул $x, y, (x, y), [x, y]$ гэсэн 4 тооны яг 2 нь тэгш 2 нь сондгой тоо байна. Иймд эдгээрийн нийлбэр тэгш тоо. Түүнчлэн $x, y \geq 1$ гэдгээс $n \geq 4$ байх нь ойлгомжтой. Нөгөө талаас n нь 2-оос их дурын тэгш тоо бол $x = 1, y = \frac{n}{2} - 1$ гэж сонговол $(x, y) = 1$ ба $[x, y] = y = \frac{n}{2} - 1$ тул

$$x + y + (x, y) + [x, y] = n$$

болж 2-оос их тэгш тоо бүр сайн тоо болов.

Бодлого IX-3. Өгөгдсөн 2000 бүхэл тоог дурын байдлаар 1000 хосд хуваагаад хос бүрийн тоонуудын нийлбэрийг бодоход нийлбэрүүд дунд хоорондоо тэнцүү хоёр тоо ямагт олдож байв. Тэгвэл эдгээр тоон дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байж болох вэ?

Бодолт. **VIII-4** бодолтыг харна уу.

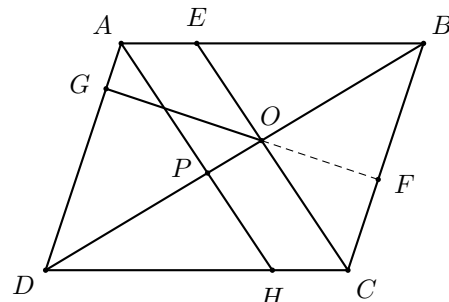
Бодлого IX-4. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE : EB = 1 : 3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF : FC = 3 : 2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG : GD = 1 : 4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Бодолт. $EC \cap BD = O$ гэе. A цэгийг дайруулан EC -тэй параллел шулуун татъя. Энэ шулуун BD -тэй P цэгт, CD -тэй H цэгт огтлолцдог байг.

Тэгвэл

$$\frac{OP}{OB} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$$

байна. Хэрэв $OP = x$ гэвэл $OB = 3x$ байна. $AECH$ параллелограмм учир $AE = CH$. Иймд $DH = EB$, $\angle PHD = \angle OEB$, $\angle PDH = \angle EBO$ учир $\triangle DPH = \triangle BOE$. Иймд $DP = OB = 3x$. Хэрэв $AG = y$ гэвэл $DG = 4y$ тул $BC = AD = 5y$ байна. Иймд $BF = 3y, FC = 2y$ болно.



$$\frac{DG}{BF} = \frac{4y}{3y} = \frac{4}{3}, \quad \frac{DO}{OB} = \frac{DP + OP}{OB} = \frac{3x + x}{3x} = \frac{4}{3}$$

$\angle GDO = \angle OBF$ гэдгээс $\triangle DGO \sim \triangle BFO$ тул $\angle GOD = \angle BOF$ ба эндээс G, O, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Х анги

Бодлого X-1. $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a^4 + 3} + \frac{1}{b^4 + 3} + \frac{1}{c^4 + 3} \geq \frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт. $x > 0$ бол $x^4 + 3 = x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 4x$ байх тул $\frac{x^4}{x^4 + 3} \leq \frac{x^3}{4}$ байна. Эндээс

$$\frac{a^4}{a^4 + 3} + \frac{b^4}{b^4 + 3} + \frac{c^4}{c^4 + 3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4} = \frac{3}{4}$$

болох ба

$$\frac{1}{a^4 + 3} + \frac{1}{b^4 + 3} + \frac{1}{c^4 + 3} = \frac{1}{3} \left(3 - \frac{a^4}{a^4 + 3} - \frac{b^4}{b^4 + 3} - \frac{c^4}{c^4 + 3} \right) \geq \frac{1}{3} \left(3 - \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

болж тэнцэтгэл биш батлагдлаа. Баталгааны явцаас тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл $a = b = c = 1$ болно.

Бодлого Х-2. $ABCD$ параллелограммын AB тал дээр E цэгийг $AE : EB = 1 : 3$ байхаар, BC тал дээр F цэгийг $BF : FC = 3 : 2$ байхаар, AD тал дээр G цэгийг $AG : GD = 1 : 4$ байхаар тус тус авав. Тэгвэл EC, GF, BD шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

Бодолт. **IX-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого Х-3. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ болог. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг *шидэт биш квадрат* гээ. Шидэт биш квадратад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодолт. **Хариу:** 48.

$S_1, S_2, \dots, S_{10} \geq 5$ байх нь ойлгомжтой. Эдгээр тоонуудыг өсөх эрэмбээр $T_1 < T_2 < \dots < T_{10}$ гэж бичвэл $T_1 \geq 5, T_2 \geq 6, \dots, T_{10} \geq 14$ байна. Иймд хүснэгтэд бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэрийг S гэвэл

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + \dots + S_{10}) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2 + \dots + T_{10}) \geq \frac{1}{2}(5 + 6 + \dots + 14) = \frac{1}{2} \cdot 95 = 47\frac{1}{2}$$

болж $S \geq 48$ болно. Одоо $S = 48$ байх жишээ дурдахад хангалттай. Тухайлбал

1	1	1	1	1
1	1	1	2	2
1	1	2	3	3
1	2	2	3	3
2	3	3	3	4

Бодлого Х-4. $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ байг. Ямар нэг натурал тоо n -ийн хувьд $f(n)$ нь яг зургаан ялгаатай натурал тоон хуваагчтай бол $n^3 - n + 1$ нь натурал тооны квадрат болохыг батал.

Бодолт. $f(1) = 3, f(2) = 49$ тоонууд яг зургаан хуваагчгүй. Иймд $n \geq 3$. Яг зургаан хуваагчтай тоо нь p^5 эсвэл p^2q (энд p, q ялгаатай анхны тоонууд) хэлбэртэй болохыг хялбархан харж болно. Түүнчлэн

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)$$

байна. $(n^3 - n + 1, n^2 + n + 1) = d$ гээ. Тэгвэл

$$d \mid (n - 2) = (n - 1)(n^2 + n + 1) - (n^3 - n + 1)$$

бөгөөд эндээс

$$d \mid (n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 2) = 7$$

болж $d = 1$ эсвэл $d = 7$ байна.

$d = 1$ байг.

Энэ тохиолдолд $f(n)$ -ийн нэг үржигдэхүүн p^2 -тай нөгөө нь q -тэй тэнцүү байх ба

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

гэдгээс $n^3 - n + 1 = p^2$ байхаас аргагүй болж батлах зүйл гарна.

$d = 7$ байг.

Энэ тохиолдолд $7^2 \mid f(n)$ болж $f(n) = 7^2 q$ эсвэл $f(n) = 7^5$ болно. (энд $q \neq 7$ анхын тоо)

Аль ч тохиолдолд $n^2 + n + 1$ ба $n^3 - n + 1$ үржигдэхүүнүүдийн аль нэг нь 7-той тэнцүү болно. Гэвч $n \geq 3$ үед ийм байх боломжгүй.

Жич: $f(3) = 325 = 5^2 \cdot 11$, $f(5) = 3751 = 11^2 \cdot 31$ тоонууд яг зургаан хуваагчтай.

XI анги

Бодлого XI-1. $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{a^4 + 3} + \frac{1}{b^4 + 3} + \frac{1}{c^4 + 3} \geq \frac{3}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт. **X-1** бодолтыг харна уу.

Бодлого XI-2. a_n дараалал $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$, ($n \geq 1$) рекуррент томъёогоор өгөгдөв. $a_1 = 1$ ба $a_{2018} = 3$ бол a_{2019} хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодолт. $a_2 = x$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{x+1}{1} = x+1, & a_4 &= \frac{x+1+1}{x} = \frac{x+2}{x}, & a_5 &= \frac{\frac{x+2}{x}+1}{x+1} = \frac{2}{x} \\ a_6 &= \frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{x+2}{x}} = 1, & a_7 &= \frac{1+1}{\frac{2}{x}} = x, & a_8 &= x+1 \end{aligned}$$

буюу a_n дараалал 5 үетэй болов. $a_{2018} = a_3 = x+1 = 3$ гэдгээс $x = 2$ ба $a_{2019} = a_4 = \frac{2+2}{2} = 2$ байна.

Бодлого XI-3. Урдаасаа болон ардаасаа ижилхэн уншигддаг натурал тоог *толин тоо* гэе. (палиндром тоо) Жишээлбэл 12321, 2004002 толин тоонууд. 9 оронтой m гэсэн тоог баруунаас зүүн тийш урвуу эрэмбээр бичихэд гарах 9 оронтой тоог n гэе. Хэрэв mn үржвэр толин тоо бөгөөд оронгийн тоо нь сондгой бол m -ийн авч болох хамгийн их утгыг ол.

Бодолт. **Хариу:** $m = 220000001$.

$m = \overline{a_8 a_7 \dots a_0}$, $n = \overline{a_0 a_1 \dots a_8}$ ба $a_8, a_0 \neq 0$ болог. mn үржвэр сондгой оронтой тоо гэдгээс уг тооны оронгийн тоо 17-той тэнцүү.

$$mn = \overline{b_{16} b_{15} \dots b_1 b_0}$$

болог. Энд $b_{16} = b_0$, $b_{15} = b_1, \dots, b_9 = b_7$ юм. Түүнчлэн

$$b_k = a_0 a_{8-k} + a_1 a_{9-k} + \dots + a_{k-1} a_7 + a_k a_8, \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

болохыг хялбархан харж болно. Эндээс

$$b_8 = a_0^2 + \dots + a_8^2$$

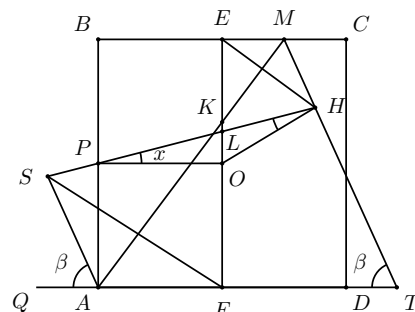
ба $b_8 \leq 9$ гэдгээс m -ийн аль ч цифр 2-оос ихгүй. Эндээс m тооны бичлэгт хамгийн олондоо 2 ширхэг 2-ийн цифр л орж болно. $a_0 > 0$ тул $a_0 = 1$, $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, 6$ гэсэн хамгийн их утгатай байж болно. Энэ тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодлого XI-4. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E , AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF -тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E -тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.

Бодолт. AB -ийн дундажийг P гэе. $PH \cap EF = L$ байг. $MH \cap AD = T$ гэе. A цэгийг дайрсан MH -тай параллел шулуун PH -тай S цэгт огтлолцдог байг. $\angle HPO = \angle PHO = x$, $\angle MTA = \angle SAQ = \beta$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} \angle HSA &= \beta + x, \angle SPA = 180^\circ - 90^\circ - x = 90^\circ - x, \\ \angle EOH &= 180^\circ - \angle EMH = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta \end{aligned}$$

байна. $\triangle PHO$ -ийн өнцгүүдийн нийлбэр $2x + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ байна. Эндээс $\beta = 90^\circ - 2x$ ба $\angle HSA = \beta + x = 90^\circ - 2x + x = 90^\circ - x = \angle SPA$ гэдгээс $SA = PA = AF$. Мөн $EM = MH$ ба $\angle EMH = 180^\circ - \beta = \angle SAF$ тул $SF \parallel EH$ гэдгээс $\triangle SLF \sim \triangle HLE$ ба эндээс $\frac{SF}{EH} = \frac{FL}{LE}$ байна. Иймд $\triangle SAF \sim \triangle HME$ тул $\frac{SF}{EH} = \frac{AF}{EM} = \frac{FK}{KE}$ байна. Эндээс $\frac{FL}{LE} = \frac{FK}{KE}$ тул $K = L$ байна.



XII анги

Бодлого XII-1. O төвтэй $ABCD$ квадратын BC талын дундаж E , AD талын дундаж F байг. EC хэрчим дээр M цэгийг авсан ба AM нь EF -тэй K цэгт огтлолцоно. OM шулууны хувьд E -тэй тэгш хэмтэй цэгийг H гэе. Тэгвэл KH шулуун AB талын дунджийг дайрна гэж батал.

Бодолт. **XI-4** бодолтыг харна уу.

Бодлого XII-2. $(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Бодолт. Хэрэв

$$(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$$

бол

$$(2020 - 56\sqrt{1301})^m = (56 - 2020\sqrt{1301})^n$$

биелэнэ. Гэтэл энэ тэнцэлийн зүүн гар талын модуль нь 1-ээс бага, баруун гар талын модуль нь 1-ээс их юм.

Бодлого XII-3. n өгөгдсөн натурал тоо байг. Тэгвэл дараах хоёр нөхцөлийг хангах (x_1, y_1, z_1) , $(x_2, y_2, z_2), \dots$ сөрөг биш бүхэл тоон гуравт хамгийн олондоо хэдэн ширхэг байж болох вэ?

- (i) Аливаа i дугаарын хувьд $x_i + y_i + z_i = n$ байна.
- (ii) $x_1, x_2, x_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $y_1, y_2, y_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй; $z_1, z_2, z_3, \dots$ тоонууд дунд ижил тоо байхгүй.

Бодолт. Ийм s ширхэг гуравт байдаг гэе. Тэгвэл нэг талаас

$$S = \sum_{i=1}^s (x_i + y_i + z_i) = sn$$

ба нөгөө талаас

$$S_1 = \sum_{i=1}^s x_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^s y_i, \quad S_3 = \sum_{i=1}^s z_i$$

нийлбэрүүд дор хаяж $0 + 1 + 2 + \dots + (s-1) = \frac{(s-1)s}{2}$ ба $S = S_1 + S_2 + S_3$ тул

$$3 \cdot \frac{(s-1)s}{2} \leq sn$$

байна. Эндээс $s \leq \frac{2n}{3} + 1$ болох ба s бүхэл тоо тул $s \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1$ байна. Одоо $s = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1$ болох жишээ байгуулъя.

Хэрвээ $n = 3k$ бол $s = 2k + 1$ байна. Энэ тохиолдолд

$$\begin{aligned} &(0, k+1, 2k-1), (1, k+2, 2k-3), (2, k+3, 2k-5), \dots, (k-1, 2k, 1), \\ &(0, k, 2k), (2, k-1, 2k-1), (4, k-2, 2k-2), \dots, (2k, 0, k), \\ &(1, 2k, k-1), (3, 2k-1, k-2), (5, 2k-2, k-3), \dots, (2k-1, k+1, 0) \end{aligned}$$

гэхэд болно. Хэрвээ $n = 3k + 1$ бол $s = 2k + 1$ байна. Дээрх жишээний гуравтуудын эхний координатыг 1, 1-ээр ихэсгэвэл хүссэн гуравтуудыг өгнө. Хэрвээ $n = 3k - 1$ бол $s = 2k$ байна. Дээрх жишээний гуравтуудын эхний координатыг 1, 1-ээр багасгахад хамгийн эхний гуравтаас бусад нь сөрөг биш эерэг тоо тул $2k$ ширхэг гуравт оршин байна. Иймд хамгийн олондоо $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil + 1$ ширхэг гуравт болов.

Бодлого XII-4. $f(x)$ функц $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй бөгөөд аливаа бодит x тооны хувьд

$$20f(19x) = f(x) + x^2$$

тэнцэтгэл биелдэг бол $f(x) < \frac{x}{2019}$ тэнцэтгэл бишийн бүх бүхэл шийдийг ол.

Бодолт. **Хариу:** $x = 1, 2, 3$.

$x = 0$ үед $20f(0) = f(0)$ гэдгээс $f(0) = 0$ болно. $x \mapsto \frac{x}{19}$ гэвэл

$$f(x) = \frac{1}{20}f\left(\frac{x}{19}\right) + \frac{x^2}{20 \cdot 19^2}$$

болно. Энд $x \mapsto \frac{x}{19^{k-1}}$ гэж орлуулаад $\frac{1}{20^{k-1}}$ -ээр үржүүлбэл

$$\frac{1}{20^{k-1}}f\left(\frac{x}{19^{k-1}}\right) = \frac{1}{20^k}f\left(\frac{x}{19^k}\right) + \frac{x^2}{(20 \cdot 19^2)^k}$$

болно. Эдгээрийг $k = 1, \dots, n$ нэмбэл

$$f(x) = \frac{1}{20^n}f\left(\frac{x}{19^n}\right) + x^2\left(\frac{1}{20 \cdot 19^2} + \dots + \frac{1}{(20 \cdot 19^2)^n}\right)$$

болно. Одоо $f(x)$ функц $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй болохыг ашиглан $n \rightarrow \infty$ хязгаар авбал

$$f(x) = 0f(0) + x^2 \frac{\frac{1}{20 \cdot 19^2}}{1 - \frac{1}{20 \cdot 19^2}} = \frac{x^2}{7219}$$

болно. Эндээс $f(x) < \frac{x}{2019}$ нөхцөлийг $x(2019x - 7219) < 0$ гэж бичиж болох тул тэнцэтгэл бишийн бүхэл шийдүүд $x = 1, 2, 3$ болно.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. Ямар нэг n натурал тооны хувьд $m = n - S(n)$ гэж бичигдэх m натурал тоог сайн тоо гэж нэрлэе. 2019-өөс хэтрэхгүй хэчнээн ширхэг сайн тоо байх вэ? Энд $S(n)$ нь n тооны цифрүүдийн нийлбэр.

Бодолт. **Хариу:** 202 ширхэг тоо

5 буюу түүнээс дээш оронтой тооноос цифрүүдийнх нь нийлбэрийг хасахад 2019-ээс их тоо гарах нь ойлгомжтой юм. Иймд зөвхөн 4 ба түүнээс цөөн оронтой тоонуудыг авч үзэхэд хангалттай. $m = n - S(n)$ ба $n = \overline{abcd}$ гэвэл $m = 999a + 99b + 9c$ болно. Энд $a \in \{0, 1, 2\}$ ба $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ байна.

$$m = 999a + 99b + c = 999a' + 99b' + 9c'$$

бол $a = a', b = b', c = c'$ байх нь ойлгомжтой. $a = 0 \vee 1$ үед b, c нь тус бүр 10 боломжтой ба үүнээс $a = b = c = 0$ үед натурал тоо үүсэхгүй тул нийт $2 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 199$ ширхэг сайн тоо байна. Харин $a = 2$ үед $m \leq 2019$ байхын тулд $b = 0, c = 0, 1, 2$ байх тул 3 ширхэг сайн тоо байна. Иймд нийт 202 ширхэг сайн тоо байна.

Бодлого ББ-2. Аль ч хоёрынх нь нийлбэр ялгавартаа хуваагддаг, 2019 ширхэг натурал тоо оршин байх уу?

Бодолт. Ийм тоонуудыг индукцээр байгуулж болно. $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангах тоонууд байг.

$$N = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i < j} (a_j - a_i)$$

гэвэл

$$N, a_1 + N, a_2 + N, \dots, a_n + N$$

тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана. Учир нь $a_i \mid N$ тул $N, a_i + N$ тоонуудын хувьд $a_i \mid a_i + 2N$ байна. Мөн $a_j - a_i \mid a_i + a_j$ ба $a_j - a_i \mid N$ тул $a_i + N, a_j + N$ тоонуудын хувьд $a_j - a_i \mid a_i + a_j + 2N$ юм.

Бодлого ББ-3. a талтай $ABCD$ квадратын AB тал дээр P цэгийг, BC тал дээр Q цэгийг, CD тал дээр R цэгийг, AD тал дээр S цэгийг тус тус авав. Хэрэв $AP + AS + CQ + CR = 2a$ байсан бол $PR = QS$ гэж батал.

Бодолт. VII-3 бодолтыг харна уу.

Бодлого ББ-4. 5×5 хүснэгтийн нүд бүрд натурал тоо бичжээ. Хүснэгтийн мөрнүүдэд бичсэн тоонуудын нийлбэр S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , багануудад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр $S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ болог. Хэрэв эдгээр 10 тоо бүгд ялгаатай байвал ийм хүснэгтийг “шидэт биш квадрат” гее. Шидэт биш квадратад бичигдсэн бүх тоонуудын нийлбэр хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодолт. X-3 бодолтыг харна уу.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. O төвтэй тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд хоорондоо перпендикуляр байв. AB талын дундаж E , BC талын дундаж F , CD талын дундаж G , AD талын дундаж H бол

$$2(OE + OF + OG + OH) = AB + BC + CD + DA$$

гэж батал.

Бодолт. $\angle EOB = \angle ADB, \angle DOG = \angle DAC$ ба $BD \perp AC$ тул $\angle ADB + \angle DAC = 90^\circ$ байна. Эндээс $\angle EOB = \angle ODG, \angle DOG = \angle EBO, OB = OD$ тул $\triangle EBO = \triangle DGO$. Иймээс $OG = EB = \frac{AB}{2}$ тул $AB = 2OG$ байна. Үүнтэй төстэйгээр $BC = 2OH, CD = 2OE, DA = 2OF$. Эдгээрийг нэмбэл

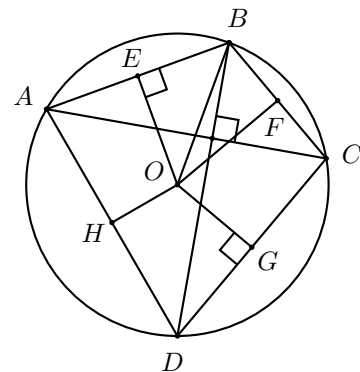
$$2(OE + OF + OG + OH) = AB + BC + CD + DA$$

болно.

Бодлого ДБ-2. $(2020 + 56\sqrt{1301})^m = (56 + 2020\sqrt{1301})^n$ байх m, n натурал тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.

Бодолт. XII-2 бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-3. $56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq 4312$ тэнцэтгэл бишийг батал.



Бодолт. $77 - x - 2y + 4z = t$ гэе. Кошийн тэнцэтгэл бишээр

$$(x + 2y - 4z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + (-4)^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 21(x^2 + y^2 + z^2)$$

тул $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(77 - t)^2}{21}$ байна. Иймд

$$56(x^2 + y^2 + z^2) + (77 - x - 2y + 4z)^2 \geq \frac{56}{21}(77 - t)^2 + t^2 = \frac{11}{3}(t - 56)^2 + 56 \cdot 77 \geq 4312$$

байна. Кошийн тэнцэтгэл биш $(x, y, z) = (s, 2s, -4s)$ үед тэнцэлдээ хүрэх ба $t = 56$ үед $77 - s - 4s - 16s = 56$ гэдгээс $s = 1$ байх хэрэгтэй. Иймд $(x, y, z) = (1, 2, -4)$ үед тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ.

Бодлого ДБ-4. $u_1 = v_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$$

гэж тодорхойлогдсон u_n, v_n дарааллуудын ерөнхий гишүүний томъёог ол.

Бодолт. $u_{n+1} + v_{n+1} = 5(u_n + v_n)$ гэдгээс $u_n + v_n = 5^{n-1}(u_1 + v_1) = 2 \cdot 5^{n-1}$ болно. Нөгөө талаас $2u_{n+1} - v_{n+1} = 4u_n - 2v_n = 2(2u_n - v_n)$ гэдгээс $2u_n - v_n = 2^{n-1}(2u_1 - v_1) = 2^{n-1}$ болно. Эндээс

$$u_n = \frac{1}{3}(2 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}), \quad v_n = \frac{1}{3}(4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1})$$

байна.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиадын II Даваа

Монголын Математикийн 55-р Олимпиадын III даваа уламжлалын дагуу 7-12 анги, бага болон дунд ангийн багш гэсэн нийт 8 ангиллаар 2019 оны 03 сарын 28, 29 өдрүүдэд орон даяар явагдлаа. Хотын олимпиадыг дүүргүүдэд хуваан явуулсан ба дүүрэг тус бүр 4 сурагч, 2 багшийн (дунд ангийн) бүрэлдэхүүнтэй багийг УМО-д оролцуулах боломжтой болсон нь энэ удаагийн олимпиадын онцлог байв. Цаашид Баянгол, Баянзүрх, Сонгино Хайрхан, Сүхбаатар, Хан Уул, Чингэлтэй дүүргүүд дангаараа Багануур, Налайх, Багахангай дүүргүүд нэгдэж 1 баг бүрдүүлэхээр болсон.

Бодлогууд

VII анги

Бодлого VII-1. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрд нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ.

Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого VII-2. Натурал n тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $s(n)$ гэж тэмдэглэе.

$s(n^2) + 2s(n - 1) = 2019$ байх n тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого VII-3. $a + b + c = d$ байх ямар ч a, b, c, d дөрвөл (заавал ялгаатай байх албагүй) бүгд ижил өнгөөр будагдаагүй байхаар 1, 2, 3, 4, ... тоонуудыг улаан эсвэл хөх өнгөөр будаж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ц. Галмандах)

Бодлого VII-4. 2×4 хэмжээтэй шоколадны цуглуулгын нүд бүрд өөр өөр амттай шоколад байв. Бат хоёроос олонгүй хөрш нүдэндээ (ерөнхий талтай) шоколадтай аль нэг нүднээс шоколад авч иддэг. Бат хэдэн янзаар шоколадны цуглуулгаа идэж дуусгаж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

VIII анги

Бодлого VIII-1. $n!$ нь k ширхэг 0 цифрээр төгсдөг натурал n тоо олддоггүй бол натурал k тоог онцгой гэе. Онцгой тоонуудыг багаас их рүү нь жагсааж бичихэд 55-д ямар тоо бичигдэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодлого VIII-2. 2, 3, ..., 2019 тоонууд бичигдсэн картууд байв. Бат, Цэцэг хоёр ээлж, ээлжээр нэг карт сонгох ба бүх карт сонгогдсоны дараа сонгосон картууд дээрх тоонуудын нийлбэрийг авахад аль сүүлийн цифр томтой тоглогч хожно. Бат карт сонгож эхлэх бол зөв тогловол хэн нь хожих вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого VIII-3. n тооны бүх хуваагчдыг өсөх эрэмбээр нь $1 < d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $1 < d_1 + 1 < d_2 + 1 < \dots < d_k + 1 < m$ тоонууд m тооны бүх хуваагчид болдог байх бүх (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого VIII-4. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 7$, б) $n = 8$ үед 1, 2, ..., $2n - 1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

IX анги

Бодлого IX-A1. Зарим натурал тоог *сайн* тоо гэх ба сайн тоонууд дараах чанаруудтай гэе. Үүнд:

- а) 55 сайн тоо.
- б) n сайн тоо бол n тооны бүх хуваагч сайн тоо.
- в) $n > m > 1$ сайн тоонууд бол $nm + 1$ сайн тоо.

2019 сайн тоо гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого IX-A2. $\angle ABC = 120^\circ$ бөгөөд $AB = BC$ байх адил хажуут гурвалжин өгөгдөв. Хавтгай дээр $\angle ADB = 60^\circ$ байх D цэг, AC тал дээр $AF = 2FC$ байхаар F цэг авав. Хэрэв DC хэрчмийн дундаж цэг E бол $\angle BEF$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого IX-A3. $0 \leq a \leq b \leq c$ тоонуудын хувьд

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) \geq (ac + b)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого IX-B1. Аль ч таван тооных нь нийлбэр үлдсэн хоёр тоондоо хуваагддаг 7 натурал тоо өгөгдсөн бол эдгээр тоонууд дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого IX-B2. $AC = CB$ байх ABC адил хажуут гурвалжны AB суурь дээр M, N цэгүүдийг $2\angle MCN = \angle ACB$ байхаар сонгов. AM, MN, NB хэрчмүүд ямар нэг гурвалжны талууд болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого IX-Б3. 2019-с хэтэрдэггүй 1515 ширхэг ялгаатай натурал тоо өгөгдөв. 3 оронтой ямар ч тоог хоёр өгөгдсөн тооны ялгавар хэлбэртэй бичиж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

X анги

Бодлого X-A1. Дурын натурал n тооны хувьд $a^n + b^n + 2n$ тоо d тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон (a, b, d) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодлого X-A2. ω тойрог ABC гурвалжны AB ба BC талыг харгалзан E ба C цэгт шүргэдэг байв. E цэгийг дайрах AC шулуунтай параллель шулуун BC талыг D цэгт огтолно. ED ба AC шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгүүд нь харгалзан K ба H байг. BK шулуун AC шулуунтай G цэгт огтлолцох бол $AN = CG$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого X-A3. $0 \leq a \leq b \leq c$ тоонуудын хувьд

$$(a + c)^2(b + 1)^2 \geq (a + b + c + 1)(ab + bc + ca + abc)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого X-Б1. O_1 төвтэй ω_1 тойрог нь O_2 төвтэй ω_2 тойрогтой P ба Q цэгүүдэд огтлолцоно. O_1P шулуун ω_2 тойргийг N цэгт, O_2P шулуун ω_1 тойргийг M цэгт тус тус дахин огтлох бол M , O_1 , Q , O_2 , N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого X-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 15 оронтой 999-д хуваагдах тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого X-Б3. Шатрын хөлөг дээр тэмээ бүр яг хоёр тэмээ идэж чаддаг байхаар хамгийн олондоо хэдэн тэмээ байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

XI анги

Бодлого XI-A1. $(a^2 + c^2)(b^2 + 1) = (ac + b)^2 + 25$ байх бүх натурал тоон $a < b < c$ гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-A2. ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгчүүд татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. B цэгийг дайрсан PA шулуунтай параллель шулуун AC , AD шулуунуудтай харгалзан E , F цэгүүдэд огтлолцох бол $BE = BF$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-A3. $n \geq 2$ гэе. $1, 2, \dots, n$ дугаартай n зогсоол дээр $1, 2, \dots, n$ дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг зөв гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XI-B1. O төвтэй ω тойргийн EF диаметр авъя. ω тойргийн A ба B цэгүүд EF шулуун нэг талд оршдог ба EF диаметр дээр орших P цэгийн хувьд $\angle APE = \angle BPF$ бол A, O, P, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-B2. Сөрөг биш $a, b, c \geq 0$ тоонуудын хувьд

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 2$$

бол $\max\{a, b, c\}$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-B3. $1, 2$ цифрүүдээр бичигдэх $\underbrace{9 \dots 9}_{2019}$ тоонд хуваагдах хамгийн бага натурал тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

XII анги

Бодлого XII-A1. $a, b, c > 1$ ба a, b, c дараалал геометр прогресс, харин $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ дараалал арифметик прогресс үүсгэдэг бол уг арифметик прогрессын ялгаврын авч болох утгуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XII-A2. O төвтэй ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгч татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. CE нь ω тойргийн диаметр байг. DE шулууны AO ба BO шулуунтай огтлолцох цэгүүдийг харгалзан X ба Y гэвэл $OP^2 = OX \cdot OY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XII-A3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн $n(2n + 1)$ нүдэнд 1 , бусад нүдэнд 0 гэж бичив. Ялгаатай хоёр мөр сонгон авч нэг мөрний i -р тоог нөгөө мөрний i -р тоонд үржүүлээд эдгээр n үржвэрийг нэмье. Ингэж олсон нийлбэр нь $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ -с багагүй байх ялгаатай хоёр мөр олдоно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XII-B1. K цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэх ω_1 ба ω_2 тойргуудын төвүүд O_1 ба O_2 байв. O_1O_2 шулуун ω_1 ба ω_2 тойргуудыг K цэгээс ялгаатай A ба B цэгүүдэд огтолно. AB хэрчмийн дундаж цэг дээр төвтэй тойрог ω_1 ба ω_2 тойргуудыг дөрвөн цэгээр огтлоно. Энэ дөрвөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд K цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XII-Б2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \dots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \dots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XII-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. $\overline{ABCABCBBB}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх тоонд хуваагддаг байх бүх ялгаатай A, B, C цифрүүдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-А2. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрд нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ.

Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-А3. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 15$, б) $n = 16$ үед 1, 2, ..., $2n - 1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ББ-Б1. Ах, дүү 2 гэрээсээ сургууль руугаа зэрэг гарч дүү нь ахаасаа 39 минутын дараа сургууль дээрээ очив. Ахын хурдыг 40 хувиар багасгаж, дүүгийн хурдыг 25 хувиар ихэсгэхэд тэд зэрэг сургууль дээрээ очиж чадах байв. Дүү сургууль руугаа хэдэн минут алхсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 10 оронтой 99-д хуваагдах тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ББ-Б3. Дараалсан 2 тоо хөрш нүдэнд байхаар 2, 3, 4, 5, 6 гэсэн таван тоог дараах хүснэгтэд хэдэн янзаар нэмж бичиж болох вэ? Нэг нүдэнд нэгээс олон тоо бичихгүй.

	1			

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. $n \geq 2, k \geq 2$ гэе. $a_1, \dots, a_n \geq 0$ тоонуудын арифметик дунджийг A гэвэл

$$2^{k-1}(|a_1 - A|^k + \dots + |a_n - A|^k) \leq (|a_1 - A| + \dots + |a_n - A|)^k$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого ДБ-А2. $n \geq 2$ гэе. $1, 2, \dots, n$ дугаартай n зогсоол дээр $1, 2, \dots, n$ дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг зөв гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-А3. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω ба $\angle B > \angle C$ гэе. ω тойргийн A цэгийг агуулах BC нумын дундаж цэгийг T ба ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэе. ω тойрог дотор орших E цэгийн хувьд $AE \parallel BC$ ба $\angle AEI = 90^\circ$ байг. TE шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэг нь P ба $\angle B = \angle IPB$ бол $\angle A$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого ДБ-Б1. 2019-н тоог аль ч дараалсан таван a, b, c, d, e тооных нь хувьд $a - b + c - d + e = 55$ байхаар тойрог дээр байрлуулж болдог бол уг тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого ДБ-Б2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \dots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \dots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого ДБ-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд

VII анги

Бодлого VII-1. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрд нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ.

Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу:**

3	11	4	4	11	6	6	11	10	7	11	12	9	11	16
7	6	5	9	7	5	13	9	5	15	10	5	19	12	5
8	1	9	8	3	10	8	7	12	8	9	13	8	13	15

Эхний багана дахь тоонуудыг a , b , c гэвэл мөр, багана дахь тоонуудын нийлбэр тэнцүү гэдгээс шидэт квадрат маань

a	11	$b + c - 11$
b	$a + c - 5$	5
c	$b - 6$	$a + 6$

хэлбэртэй болно. Одоо диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр мөн ижил $a + b + c$ болохыг анзаарвал $b = 2a + 1$, $c = 8$ буюу шидэт квадрат маань

a	11	$2a - 2$
$2a + 1$	$a + 3$	5
8	$2a - 5$	$a + 6$

хэлбэртэй болно. Хаа нэгтээ 9 бичигдэнэ гэдгээс $a = 3, 4, 6, 7, 9$ байх боломжтой.

Бодлого VII-2. Натурал n тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $s(n)$ гэж тэмдэглэе.

$s(n^2) + 2s(n - 1) = 2019$ байх n тоо олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. **Хариу:** олдохгүй.

$n - s(n)$ тоо 9-д хуваагддаг гэдгийг тэмдэглэе. $s(n^2) + 2s(n - 1) - 2019 = 0$ тоо 9-д хуваагдах тул $(s(n^2) - n^2) + 2(s(n - 1) - (n - 1)) - 2019 + n^2 + 2(n - 1)$ тоо 9-д хуваагдана. Эндээс $n^2 + 2n - 2021 = (n + 1)^2 - 2016 - 6$ тоо 9-д хуваагдах болно. $2016 = 9 \cdot 224$ тул $(n + 1)^2 - 6$ тоо 9-д хуваагдах ёстой. Нөгөө талаас натурал тооны квадрат 9-д хуваахад 0, 1, 4, 7 үлдэгдэл өгөх тул $(n + 1)^2 - 6$ тоо 9-д хуваагдахгүй болж зөрчил үүснэ.

Бодлого VII-3. $a + b + c = d$ байх ямар ч a, b, c, d дөрвөл (заавал ялгаатай байх албагүй) бүгд ижил өнгөөр будагдаагүй байхаар 1, 2, 3, 4, ... тоонуудыг улаан эсвэл хөх өнгөөр будаж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Ц. Галмандах)

Бодолт. Хариу: болохгүй.

Тийм будалт байхгүй гэж харуулъя. Эсрэгээс нь тийм будалт олддог гэе. Энэ будалтад 1 улаанаар будагдсан гэж үзье. Тэгээд цаашид n тоо улаанаар будагдсан бол n^R , хөх бол n^B гэнэ. $a + b + c = d$ ижил өнгөөр будагдаагүй гэдгээс

$$1^R + 1^R + 1^R = 3 \Rightarrow 3 - \text{хөх}, \quad 3^B + 3^B + 3^B = 9 \Rightarrow 9 - \text{улаан}, \quad 1^R + 4 + 4 = 9^R \Rightarrow 4 - \text{хөх}$$

Эндээс харахад $1^R + 1^R + 9^R = 11 \Rightarrow 11\text{-хөх}$, $3^B + 4^B + 4^B = 11 \Rightarrow 11\text{-улаан}$. Зөрчил.

Бодлого VII-4. 2×4 хэмжээтэй шоколадны цуглуулгын нүд бүрд өөр өөр амттай шоколад байв. Бат хоёроос олонгүй хөрш нүдэндээ (ерөнхий талтай) шоколадтай аль нэг нүднээс шоколад авч иддэг. Бат хэдэн янзаар шоколадны цуглуулгаа идэж дуусгаж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Хариу: 6720.

T дүрстэй шоколадны цуглуулгыг хоёроос олонгүй хөрш нүдэндээ шоколадтай нүднээс идсээр дуусгах боломжийн тоог $f(T)$ гэе. n нүдтэй T дүрсийн бүх нүд хоёроос олонгүй хөрштэй бол $f(T) = n!$ байна. Эндээс жишээлбэл

$$f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}\right) = 4!, \quad f\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}\right) = 3 \times 3!$$

ба

$$f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right) = 3f\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}\right) = 3 \times 4! + 3 \times 3!$$

болно.

Одоо $f\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}\right) = 4f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right)$ ба

$$f\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}\right)$$

болохыг ашиглан тохиолдол салган бодож нэгтгэвэл бодлогын хариу

$$4(4(3 \cdot 4! + 3 \cdot 3!) + (3 \cdot 3! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 5! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 4!) + (2+2)(3 \cdot 3! + 3 \cdot 4!) + 2(3 \cdot 3! + 3 \cdot 4! + 5!)) = 6720$$

гарна.

VIII анги

Бодлого VIII-1. $n!$ нь k ширхэг 0 цифрээр төгсдөг натурал n тоо олддоггүй бол натурал k тоог онцгой гэе. Онцгой тоонуудыг багаас их рүү нь жагсааж бичихэд 55-д ямар тоо бичигдэх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хариу: 279.

$5^k | n$, $5^{k+1} \nmid n$ ба $(n-1)!$ тоо m ширхэг 0-ээр төгсөх бол $n!$ тоо $m+k$ ширхэг 0-ээр төгсөнө. Иймд $k \geq 2$ үед $m+1$, $m+2$, ..., $m+k-1$ гэсэн $k-1$ ширхэг тоо онцгой тоотой болно. Жишээ нь $24!$ тоо 4 ширхэг 0-ээр, $25!$ тоо 6 ширхэг 0-ээр төгсөх учир эхний онцгой тоо 5 байна. $1 \cdot 5^2, 2 \cdot 5^2, 3 \cdot 5^2, \dots, 45 \cdot 5^2$ тоо бүр дор хаяж 1 онцгой тоог үүсгэнэ. Иймд 46 онцгой тоо үүснэ.

Мөн $1 \cdot 5^3, 2 \cdot 5^3, 3 \cdot 5^3, \dots, 9 \cdot 5^3$ тоонууд дахин 9 онцгой тоо үүсгэнэ. 5^4 тоо дахин 1 онцгой тоо үүсгэнэ. Нийт $45+9+1=55$ онцгой тоо үүссэн байна. $(45 \cdot 5^2)!$ тоо

$$\frac{45 \cdot 5^2}{5} + \frac{45 \cdot 5^2}{5^2} + \frac{45 \cdot 5^2}{5^3} + \frac{45 \cdot 5^2}{5^4} = 225 + 45 + 9 + 1 = 280$$

ширхэг тэгээр төгсөнө. Эндээс 55 дахь онцгой тоо 279 байна.

Бодлого VIII-2. 2, 3, ..., 2019 тоонууд бичигдсэн картууд байв. Бат, Цэцэг хоёр ээлж, ээлжээр нэг карт сонгох ба бүх карт сонгогдсоны дараа сонгосон картууд дээрх тоонуудын нийлбэрийг авахад аль сүүлийн цифр томтой тоглогч хожно. Бат карт сонгож эхлэх бол зөв тогловол хэн нь хожих вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** Бат хожно.

Тоонуудаа (2, 1002), (3, 1003), ..., (1000, 2000); (2001, 2011), ..., (2009, 2019); (1001, 2010) гэж хосуудад хуваая. Бат эхлээд 1001-ийг сонгоно. Үүнээс цааш хэрэв Цэцэг Батын сонгосон тоотой хос тоог сонговол Бат дураар өөр нэгийг сонгоно, хэрэв Цэцэг Батын сонгосон тоотой хос биш өөр тоог сонговол Бат Цэцэгийн сонгосон тоотой хос тоог сонгоно.

Бүх картыг сонгоод дуусахад Батын сонгосон картууд дээрх тоонуудын нийлбэр 5, Цэцэгийн сонгосон картууд дээрх тоонуудын нийлбэр 4 байна. Иймд Бат хожно.

Бодлого VIII-3. n тооны бүх хуваагчдыг өсөх эрэмбээр нь $1 < d_1 < d_2 < \dots < d_k < n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $1 < d_1 + 1 < d_2 + 1 < \dots < d_k + 1 < m$ тоонууд m тооны бүх хуваагчид болдог байх бүх (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** $(n, m) = (4, 9), (8, 15)$.

$k = 1$ бол $n = p^2$ хэлбэртэй байх бөгөөд $m = (p + 1)^2$ болох ба $p, p + 1$ хоёул анхны тоо байх тул $p = 2$ болно. Иймд энэ тохиолдолд $(n, m) = (4, 9)$ байна.

$k \geq 2$ болог. $n = d_1 d_k = d_2 d_{k-1}$ ба $m = (d_1 + 1)(d_k + 1) = (d_2 + 1)(d_{k-1} + 1)$ тул $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1}$ болно. Эндээс $d_1 + \frac{n}{d_1} = d_2 + \frac{n}{d_2}$ болох бөгөөд тэнцүүгийн тэмдгийн нэг талд гаргаад эмхтгэвэл $(d_1 - d_2) \left(1 - \frac{n}{d_1 d_2} \right) = 0$ болно. Иймд $n = d_1 d_2$ буюу $k = 2$ байна.

d_1 ба $d_1 + 1$ хоёул анхны тул $d_1 = 1$ байна. Эндээс $d_2 = 4$ эсвэл $d_2 \geq 3$ анхны тоо. Мөн ижлээр $d_2 + 1 = 9$ эсвэл $d_2 + 1 \geq 5$ анхны тоо. Ганц боломж нь $d_2 = 4$. Иймд $(n, m) = (8, 15)$ болно.

Бодлого VIII-4. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 7$, б) $n = 8$ үед 1, 2, ..., $2n - 1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** а) болохгүй, б) болно.

а) Хүснэгтийн багануудаа зүүнээс баруун 1, 2, ..., 7, мөрнүүдээ дээрээс доош 1, 2, ..., 7 гэж дугаарлая. Мөн i -р мөр, j -р баганын огтлолцолд бичигдсэн тоог a_{ij} гэе. Мөн $1 \leq i \leq 7$ үед $S_i = a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{7i} + a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i7} - a_{ii}$ нийлбэрийг тэмдэглэе. Энэ нийлбэрт a_{ii} тоо нэг л удаа нэмэгдэнэ. S_i бүр 1, 2, ..., 15 гэсэн тоонуудыг нэг удаа агуулах бөгөөд $S_1, S_2, \dots, S_7$ гэсэн 7 ширхэг нийлбэр байх тул $S_1 + S_2 + \dots + S_7$ нийлбэрт тоо бүр сондгой удаа

байна. Нөгөө талаас $i \neq j$ байх i, j -ийн хувьд a_{ij} элемент S_i, S_j хоёуланд нь нэмэгдэнэ. Диагональ дээр бичигдэхгүй тоо 1, 2, ..., 15 дундаас олдох бөгөөд тэр тоо нийт нэмэгдэхүүнд тэгш удаа орох болж зөрчил үүснэ. Иймд болохгүй.

б) Эхлээд 4×4 дээр байгуулъя.

1	2	3	4
5	1	7	3
6	4	1	2
7	6	5	1

Одоо 8×8 -ийг байгуулахдаа 4 ширхэг 4×4 -д хувааж байгаад дээрх санааг ашиглая.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	11	3	13	5	15	7
10	4	1	2	14	8	5	6
11	10	9	1	15	14	13	5
12	6	7	8	1	2	3	4
13	12	15	7	9	1	11	3
14	8	12	6	10	4	1	2
15	14	13	12	11	10	9	1

IX анги

Бодлого IX-A1. Зарим натурал тоог *сайн* тоо гэх ба сайн тоонууд дараах чанаруудтай гэе. Үүнд:

- а) 55 сайн тоо.
- б) n сайн тоо бол n тооны бүх хуваагч сайн тоо.
- в) $n > m > 1$ сайн тоонууд бол $nm + 1$ сайн тоо.

2019 сайн тоо гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. 55 сайн тоо тул 5, 11 сайн тоо болно. Иймд $56 = 5 \cdot 11 + 1$ сайн тоо болох тул 2, 4, 7, 8 сайн тоо болно. $36 = 5 \cdot 7 + 1$ сайн тоо тул 6 сайн тоо болно. Иймд $25 = 4 \cdot 6 + 1$, $126 = 5 \cdot 25 + 1$ сайн тоо болох бөгөөд $1009 = 8 \cdot 126 + 1$ сайн гэдгээс $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ тул 2019 сайн тоо болов.

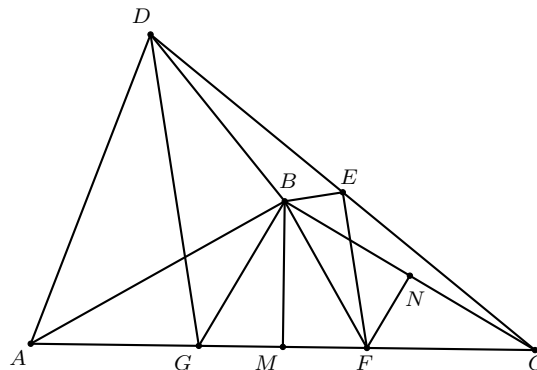
Бодлого IX-A2. $\angle ABC = 120^\circ$ бөгөөд $AB = BC$ байх адил хажуут гурвалжин өгөгдөв. Хавтгай дээр $\angle ADB = 60^\circ$ байх D цэг, AC тал дээр $AF = 2FC$ байхаар F цэг авав. Хэрэв DC хэрчмийн дундаж цэг E бол $\angle BEF$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** $\angle BEF = 90^\circ$.

AF хэрчмийн дундаж цэгийг G , AC хэрчмийн дундаж цэгийг M , F цэгээс BC руу буулгасан перпендикулярын суурийг N гэе. ABC адил хажуут гурвалжин тул $BM \perp AC$ байна.

$\angle FCN = 30^\circ$ тул $FN = \frac{FC}{2} = \frac{GF}{2} = MF$ болно. $\angle BMF = \angle BNF = 90^\circ$ тул $\triangle MBF = \triangle NBF$ болно. Иймд $\angle MBF = \angle FBN = 30^\circ$ болох GBF адил хажуут гурвалжин гэдгийг ашиглавал $\angle GBM = \angle MBF = 30^\circ$ болох бөгөөд эндээс GBF зөв гурвалжин болно. $\angle AGB = 120^\circ$ тул $AGBD$ багтсан дөрвөн өнцөгт болох тул $\angle GDB = \angle BAG = 30^\circ = \angle ADG$ болно. EF нь GCD гурвалжны дундаж шугам, ME нь ADC гурвалжны дундаж шугам гэдгээс $GD \parallel EF$, $AD \parallel ME$ болох тул $\angle ADG = \angle MEF = 30^\circ$ болно. Эндээс $MBEF$ багтсан дөрвөн өнцөгт болох тул $\angle BEF = 90^\circ$ болно.



Бодлого IX-A3. $0 \leq a \leq b \leq c$ тоонуудын хувьд

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) \geq (ac + b)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $0 \leq a \leq 1$ үед

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) - (ac + b)^2 = (c^2 - b^2)(1 - a^2) + (bc - a)^2 \geq 0$$

тул үнэн. $a > 1$ үед $c \geq 1$ гэдгээс

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) - (ac + b)^2 = (b^2 - a^2)(c^2 - 1) + (ab - c)^2 \geq 0$$

тул үнэн. Тэнцэтгэл $0 \leq x \leq 1 \leq y$ хувьд (x^2, x, x) ба (y, y, y^2) дээр биелнэ.

Бодлого IX-B1. Аль ч таван тооных нь нийлбэр үлдсэн хоёр тоондоо хуваагддаг 7 натурал тоо өгөгдсөн бол эдгээр тоонууд дотор хамгийн олондоо хэдэн ялгаатай тоо байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. **Хариу:** 2.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 5 тоонууд бодлогын нөхцөл хангах тул 2 ялгаатай тоотой жишээ олдоно. Одоо 2-оос хэтрэхгүй гэж харуулъя. Тоонуудаа $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_7$ гэе.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ба $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ нийлбэрүүд a_7 -д хуваагдах тул $a_6 - a_1$ ялгавар a_7 -д хуваагдана. $a_6 - a_1 < a_7$ гэдгээс $a_1 = a_6$ болно. Иймд $a_1 = \dots = a_6$ байна.

Бодлого IX-B2. $AC = CB$ байх ABC адил хажуут гурвалжны AB суурь дээр M, N цэгүүдийг $2\angle MCN = \angle ACB$ байхаар сонгов. AM, MN, NB хэрчмүүд ямар нэг гурвалжны талууд болно гэж батал.

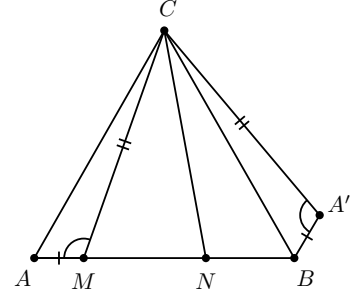
(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодолт. ACB гурвалжны гадна A' цэгийг $MA = A'B, MC = A'C, \angle AMC = \angle BA'C$ байхаар авъя. ТӨТ шинжээр $\triangle AMC = \triangle BA'C$ болно.

Өгсөн нөхцөлөөс

$$\begin{aligned}\angle NCA' &= \angle NCB + \angle BCA' \\ &= \angle NCB + \angle ACM \\ &= \angle ACB - \angle MNC = \angle MNC\end{aligned}$$

болно. Эндээс $MC = CA'$, $\angle MCN = \angle BCA'$, $MC = CA'$ тул ТӨТ шинжээр $MN = NA'$ болно. Эндээс AM , MN , NB хэрчмүүдээр гурвалжин байгуулж болох нь батлагдав.



Бодлого IX-Б3. 2019-с хэтэрдэггүй 1515 ширхэг ялгаатай натурал тоо өгөгдөв.

3 оронтой ямар ч тоог хоёр өгөгдсөн тооны ялгавар хэлбэртэй бичиж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $100 \leq N < 1000$ нь гурван оронтой тоо болог. Үлдэгдэлтэй хуваах дүрмээр $2019 = 2Np + r$, $0 \leq r < 2N$ гэж бичье. $2N < 2000$ тул $p \geq 1$ байна. Иймд $2019 < 2Np + 2N \leq 4Np$ байх ба эндээс $Np > 504$ буюу

$$Np + r = 2019 - Np < 1515 \quad (\diamond)$$

байна. Одоо $A = \{1, 2, \dots, 2Np\}$, $B = \{2Np + 1, \dots, 2019\}$ гээд A олонлогийг Np ширхэг олонлогт дараах байдлаар хуваая. $1 \leq i \leq N$ ба $0 \leq j \leq p - 1$ хувьд

$$A_{ij} = \{2jN + i, (2j + 1)N + i\}$$

гэвэл A нь A_{ij} олонлогуудын үл огтлолцох нэгдэл болно.

$\{1, 2, \dots, 2019\} = A \cup B$ ба B олонлог r элементтэй тул өгөгдсөн 1515 тооноос ядаж $1515 - r$ нь A олонлогт агуулагдана. $(\diamond)$ -с $Np < 1515 - r$ тул Дирихлейн зарчмаар ямар нэг A_{ij} олонлог 2 өгөгдсөн тоо агуулах ба энэ 2 тооны ялгавар N байна.

Х анги

Бодлого X-A1. Дурын натурал n тооны хувьд $a^n + b^n + 2n$ тоо d тоонд хуваагддаг байх бүх натурал тоон (a, b, d) гурвалыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $(a, b, d) = (\text{дурын}, \text{дурын}, 1), (\text{тэгш}, \text{тэгш}, 2), (\text{сондгой}, \text{сондгой}, 2)$.

Дээрх гурвалууд шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $d \geq 2$ гээд d тооны анхны p хуваагчийг авъя. $n = 1$ үед $a + b + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ болох ба $n = p$ үед Фермагийн бага теоремоос $a + b \equiv a^p + b^p + 2p \equiv 0 \pmod{p}$ болно. Эндээс $p = 2$ байна.

$4 \mid d$ гэвэл $a + b + 2 \equiv 0 \pmod{4}$ ба $2a^2 = a^2 + (a + 2)^2 \equiv a^2 + b^2 + 4 \equiv 0 \pmod{4}$ гэдгээс $a \equiv 0 \pmod{2}$ байна. Мөн ижлээр $b \equiv 0 \pmod{2}$ ба энэ нь $a^3 + b^3 + 6 \equiv 0 \pmod{4}$ гэдэгт зөрчинө. Иймд $d = 2$ байна. Энэ үед $a \equiv b \pmod{2}$ байх нь илт.

Бодлого X-A2. ω тойрог ABC гурвалжны AB ба BC талыг харгалзан E ба C цэгт шүргэдэг байв. E цэгийг дайрах AC шулуунтай параллель шулуун BC талыг D цэгт огтолно. ED ба AC шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгүүд нь харгалзан K ба H байг. BK шулуун AC шулуунтай G цэгт огтлолцох бол $AH = CG$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $EK \parallel HC$ гэдгээс $\angle ECH = \angle KEC$ буюу $CK = EH$ ба $\frac{CG}{CA} = \frac{DK}{DE}$ байна.

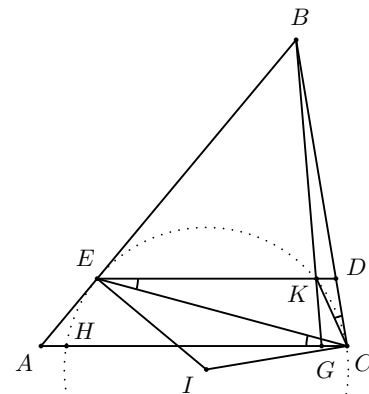
DC нь шүргэгч гэдгээс $\angle DCK = \angle DEC$ буюу $DKC \sim DCE$ байна. Эндээс

$$\left(\frac{CK}{CE}\right)^2 = \frac{DC}{DE} \cdot \frac{DK}{DC} = \frac{DK}{DE}$$

Яг адил $AEH \sim ACE$ болох ба эндээс $\left(\frac{EH}{EC}\right)^2 = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AH}{AE} = \frac{AH}{AC}$ байна. Иймд

$$\frac{CG}{AC} = \frac{DK}{DE} = \frac{CK^2}{CE^2} = \frac{EH^2}{EC^2} = \frac{AH}{AC}$$

буюу $AH = CG$ болж батлагдана.



Бодлого Х-А3. $0 \leq a \leq b \leq c$ тоонуудын хувьд

$$(a+c)^2(b+1)^2 \geq (a+b+c+1)(ab+bc+ca+abc)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хоёр бодолт хийе.

Адилтгал ашигласан бодолт: Хялбарчилбал

$$(a+c)^2(b^2+1) + (b+1)^2(a^2+c^2) \geq 2(a+c)(b+1)(ac+b)$$

гэж батлахтай ижил болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$(a+c)^2(b^2+1) + (b+1)^2(a^2+c^2) \geq 2(a+c)(b+1)\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+1)}$$

болох тул

$$(a^2+c^2)(b^2+1) \geq (ac+b)^2$$

гэж батлахад хангалттай. Энэ нь $0 \leq a \leq 1$ үед

$$(a^2+c^2)(b^2+1) - (ac+b)^2 = (c^2-b^2)(1-a^2) + (bc-a)^2 \geq 0$$

тул үнэн ба $a > 1$ үед $c \geq 1$ гэдгээс

$$(a^2+c^2)(b^2+1) - (ac+b)^2 = (b^2-a^2)(c^2-1) + (ab-c)^2 \geq 0$$

тул үнэн. Тэнцэтгэл $0 \leq a \leq 1 \leq c$ хувьд (a^2, a, a) ба (c, c, c^2) дээр биелнэ.

Дискриминант ашигласан бодолт: Квадрат

$$\begin{aligned} P(x) &= (b+1)(x-a)(x-c) + (a+c)(x-b)(x-1) \\ &= (a+b+c+1)x^2 - 2(a+c)(b+1)x + (ab+bc+ca+abc) \end{aligned}$$

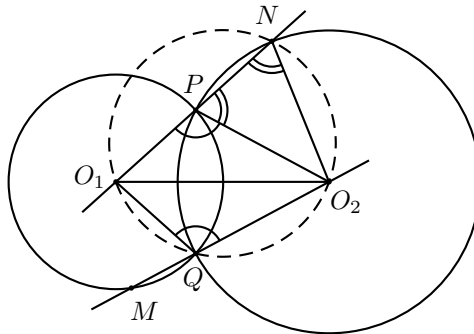
олон гишүүнтийг авч үзье.

$P(x)$ -ийн ахлах гишүүний коэффициент эерэг ба $P(b) = (b+1)(b-a)(b-c) \leq 0$ байна. Иймд $P(x)$ бодит язгууртай ба эндээс $P(x)$ -ийн дискриминант ≥ 0 байх болж бодлого бодогдоно. Тэнцэтгэл биелэх нөхцөлийг $P(b) = P'(b) = 0$ гэж бичиж болох ба хялбарчилбал дээрх нөхцөл гарна.

Бодлого Х-Б1. O_1 төвтэй ω_1 тойрог нь O_2 төвтэй ω_2 тойрогтой P ба Q цэгүүдэд огтлолцоно. O_1P шулуун ω_2 тойргийг N цэгт, O_2P шулуун ω_1 тойргийг M цэгт тус тус дахин огтлох бол M , O_1 , Q , O_2 , N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $O_1P = O_1Q$ ба $O_2P = O_2Q$ гэдгээс $\triangle O_1PO_2 \cong \triangle O_1QO_2$ тул $\angle O_1PO_2 = \angle O_1QO_2$ байна. Мөн $\angle O_1NO_2 = \angle NPO_2 = 180^\circ - \angle O_1PO_2 = 180^\circ - \angle O_1QO_2$ тул O_1 , Q , O_2 , N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Яг адил M , O_1 , Q , O_2 цэгүүд нэг тойрог дээр оршиж батлагдана.



Бодлого Х-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 15 оронтой 999-д хуваагдах тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** 125.

999-д хуваагдах 15 оронтой тоог $A = \overline{a_{15}a_{14}\dots a_1}$ гэж тэмдэглэе. Ямар ч эерэг бүхэл n тооны хувьд $10^{3n} - 1 : 10^3 - 1 = 999$

$$A \equiv \overline{a_{15}a_{14}a_{13}} + \overline{a_{12}a_{11}a_{10}} + \overline{a_9a_8a_7} + \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_3a_2a_1} \pmod{999} \quad (*)$$

Сүүлийн гурван оронтой 5-н тооны нийлбэр 1110-аас бага, 555-аас их бөгөөд 999-д хуваагдах учраас уг нийлбэр 999 болно. Иймд

$$a_{15} + a_{12} + a_9 + a_6 + a_3 = a_{14} + a_{11} + a_8 + a_5 + a_2 = a_{13} + a_{10} + a_7 + a_4 + a_1 = 9$$

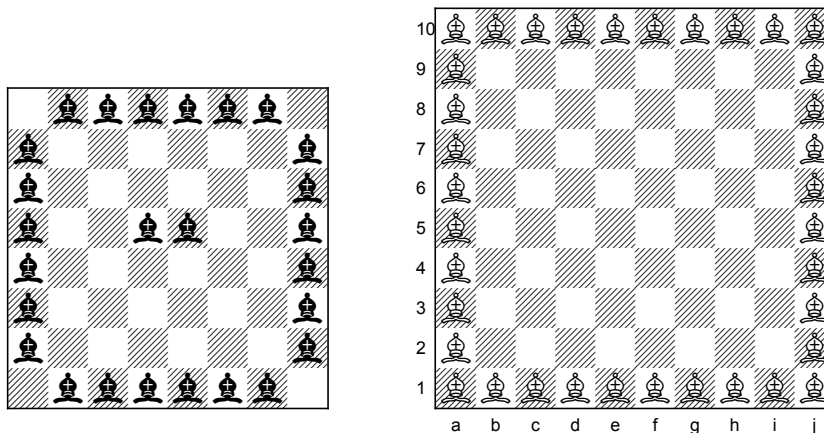
болох тул дээрх 3 нийлбэр тус бүрд нэг ширхэг 1, 4 ширхэг 2 цифр орно. Ингэж бичигдэх 15 оронтой тоо бүр 999-д хуваагдах нь (*)-ээс тодорхой юм. 3-т хуваагдах (мөн 1 үлдэгдэл, 2 үлдэгдэл өгөх) дугаартай аль нэг цифрийг 1 гэж сонгох боломж 5 учраас нийт 1, 2 цифрээр бичигдэх 15 оронтой 999-д хуваагдах тоонуудын тоо 125 болно.

Бодлого Х-Б3. Шатрын хөлөг дээр тэмээ бүр яг хоёр тэмээ идэж чаддаг байхаар хамгийн олондоо хэдэн тэмээ байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** 26.

26 тэмээ нөхцөл хангахаар байрлуулж болно (зураг хар). Одоо энэ нь дээд зааг болохыг харуулъя. Шатрын хөлгөө 10×10 болгож томруулж ирмэгээр нь 36 цагаан тэмээ байрлуулъя. $b2-i9$ -д байрлах 8×8 хөлөг дотор хар тэмээнүүд нөхцөл хангахаар байрлуулсан гэе. Хар тэмээ болгон яг 2 цагаан тэмээ идэж чадна. Нөгөө талаас $a1, b1, c1, h1, i1, j1$ дээрх цагаан тэмээг хамгийн олондоо 1 хар тэмээ, $d1, \dots, g1$ дээрх цагаан тэмээг хамгийн олондоо 2 хар тэмээ идэж чадна. Бусад цагаан тэмээний хувьд мөн ижил. Иймд хамгийн олондоо $(5 \cdot 1 + 4 \cdot 2) \cdot 4/2 = 26$ хар тэмээ байна.



XI анги

Бодлого XI-A1. $(a^2 + c^2)(b^2 + 1) = (ac + b)^2 + 25$ байх бүх натурал тоон $a < b < c$ гурвалыг ол.
(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $(1, 2, 3)$.

$(1, 2, 3)$ шийд болохыг хялбархан шалгаж болох тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. $a \geq 1, b \geq a + 1, c \geq b + 1$ тул $c \leq 3$ гэж харуулахад хангалттай. $c \geq 4$ гэвэл

$$(a^2 + c^2)(b^2 + 1) - (ac + b)^2 = (b^2 - a^2)(c^2 - 1) + (ab - c)^2 \geq (2a + 1)(c^2 - 1) \geq 3 \cdot 15$$

болж зөрчил гарна.

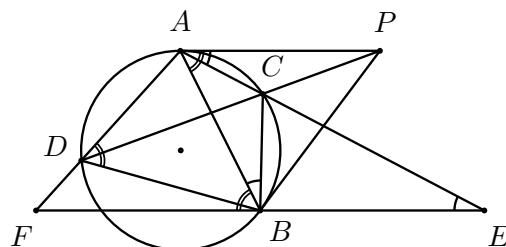
Бодлого XI-A2. ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгчүүд татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. B цэгийг дайрсан PA шулуунтай параллель шулуун AC, AD шулуунуудтай харгалзан E, F цэгүүдэд огтлолцох бол $BE = BF$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. PA шүргэгч ба $PA \parallel EF$ гэдгээс $\angle ABC = \angle PAC = \angle AEB$ буюу $ABC \sim AEB$ байна.

Эндээс $\frac{BE}{BC} = \frac{AB}{AC}$ болно. Яг адилаар $\angle ABF = \angle PAB = \angle ADB$ буюу $ABF \sim ADB$ гэдгээс $\frac{BF}{BD} = \frac{AB}{AD}$ байна. Иймд $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$ гэж батлахад хангалттай.

PA ба PB шүргэгч гэдгээс $PCA \sim PAD$ ба $PBC \sim PDB$ байна. Эндээс $\frac{AC}{AD} = \frac{PC}{PA}$ ба $\frac{BC}{BD} = \frac{PB}{PD}$ болно. Нөгөө талаас $PA = PB$ тул $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$ болж батлагдана.



Бодлого XI-A3. $n \geq 2$ гэе. $1, 2, \dots, n$ дугаартай n зогсоол дээр $1, 2, \dots, n$ дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг зөв гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. i дугаартай зогсоолыг $n + 1 - i$ гэж шинээр дугаарлахад зогсоолууд мөн л $1, 2, \dots, n$ тоогоор дугаарлагдана. Зөв байрлуулалтын хувьд машин бүрийн дугаар дээр уг машин зогссон зогсоолын шинэ дугаарыг нэмэхэд гарах n нийлбэр бүгд ялгаатай байна. Учир нь k дугаартай i зогсоолд зогссон машины шинэ зогсоолын дугаар ба машины дугаарын нийлбэр $n + 1 + (k - i)$ юм.

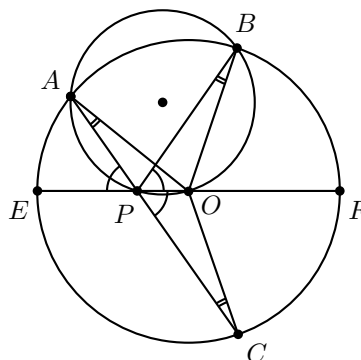
Иймд машины болон зогсоолын дугаарын нийлбэрүүд бүгд ялгаатай байх байрлалын тоог сондгой гэж үзүүлэхтэй манай бодлого ижил юм. Энэ чанартай байрлалыг цаашид зөв гэе. i дугаартай зогсоолд x_i дугаартай машин зогссон байрлалыг $(x_1, \dots, x_n)$ гэж тэмдэглэе. $(1, \dots, n)$ байрлал зөв учраас ямар нэг i дугаарын хувьд $x_i \neq i$ байх зөв байрлалын тоог тэгш гэж үзүүлэхэд хангалттай.

$(x_1, \dots, x_n)$ байрлал өгөгдсөн үед x_i дугаартай зогсоолд i дугаартай машиныг зогсоох замаар шинэ байрлал байгуулъя. Хэрэв анхны байрлал зөв бол шинэ байрлал мөн зөв байна. Одоо энэ хоёр байрлал ялгаатай гэдгийг үзүүлэе. $(x_1, \dots, x_n)$ зөв учраас $x_i \neq i$ байх ямар нэг i дугаар олдоно. Энэ байрлалын i дугаартай машин y_i дугаартай зогсоолд зогссон гэвэл $x_i \neq y_i$ байна. Эсрэг тохиолдолд $i + x_i = y_i + i$ болж зөрчил гарна. Шинээр байгуулсан зөв байрлалын i дугаартай зогсоолд y_i дугаартай машин зогсох тул $(x_1, \dots, x_n)$ -с ялгаатай. Үүгээр бодлого бодогдов.

Бодлого XI-B1. O төвтэй ω тойргийн EF диаметр авъя. ω тойргийн A ба B цэгүүд EF шулуун нэг талд оршдог ба EF диаметр дээр орших P цэгийн хувьд $\angle APE = \angle BPF$ бол A, O, P, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. AP шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгийг C гэе. Тэгвэл $\angle BPF = \angle APE = \angle CPF$ гэдгээс B ба C цэгүүд нь EF шулууны хувьд тэгш хэмтэй цэгүүд байна. Иймд $\triangle BPO \cong \triangle CPO$ болох ба $OA = OC$ гэдгээс $\angle OBP = \angle OCP = \angle OAP$ тул A, O, P, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.



Бодлого XI-B2. Сөрөг биш $a, b, c \geq 0$ тоонуудын хувьд

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 2$$

бол $\max\{a, b, c\}$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $\sqrt{5} - 1$.

$M = \max\{a, b, c\}$ гэе. Эхлээд $M \leq \sqrt{5} - 1$ гэж харуулъя.

$$\frac{2-c}{2} = \frac{a+b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2-c^3}{2}}$$

тул $4(2-c^3) - (2-c)^3 \geq 0$ байна. Эндээс $3c(c^2+2c-4) \leq 0$ буюу $c \leq \sqrt{5} - 1$ болно. Мөн ижлээр $a, b \leq \sqrt{5} - 1$ тул $M \leq \sqrt{5} - 1$ байна.

Эцэст нь $(a, b, c) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}-1\right)$ гурвал бодлогын нөхцөл хангах тул $M = \sqrt{5} - 1$ утга авна.

Бодлого XI-Б3. 1, 2 цифрүүдээр бичигдэх $\underbrace{9 \dots 9}_{2019}$ тоонд хуваагдах хамгийн бага натурал тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $\underbrace{1 \dots 1}_{2019} \underbrace{2 \dots 2}_{2019} \underbrace{2 \dots 2}_{2019} \underbrace{2 \dots 2}_{2019} \underbrace{2 \dots 2}_{2019}$.

$n = 2019$ ба $B = \underbrace{1 \dots 1}_n$ гэж тэмдэглэе. Эхлээд $9B$ -д хуваагдах тооны цифрүүдийн нийлбэр $9n$ -с багагүй гэдгийг үзүүлэе. A нь 1 ба 2 цифрээр бичигдэх $9B$ -д хуваагдах тоо болог. A тооны n -д хуваахад k (энд $0 \leq k < n$) үлдэгдэл өгөх дугаартай цифрүүдийн нийлбэрийг S_k гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $A \equiv \sum_{k=0}^{n-1} 10^k S_k \pmod{9B}$ байна. Иймээс

$$A \equiv \sum_{k=0}^{n-2} (S_k - S_{n-1}) 10^k \equiv 0 \pmod{B}.$$

A тооны оронгийн тоог m гэвэл S_k нь $[m/n] + 1$ -ээс ихгүй, $[m/n]$ -ээс багагүй тооны цифрүүдийн нийлбэр болно. Хэрэв A тооны цифрүүдийн нийлбэр $9n$ -с ихгүй гэвэл түүний оронгийн тоо $9n$ -ээс бага байна. Иймд $m < 9n$ буюу $[m/n] < 9$ болох тул ямар ч k дугаарын хувьд

$$|S_k - S_{n-1}| \leq 2([m/n] + 1) - [m/n] \leq 10$$

биелнэ. Иймд

$$\sum_{k=0}^{n-2} |S_k - S_{n-1}| 10^k \leq 10 \sum_{k=0}^{n-2} 10^k < B$$

болох учраас (1)-ээс дурын k хувьд $S_k = S_{n-1}$ болно. A тооны цифрүүдийн нийлбэр nS_0 болох ба улмаар

$$\sum_{k=0}^{n-1} 10^k S_k = S_0 B \leq 9B$$

болох тул $A \equiv 0 \pmod{9B}$ гэдгээс $S_0 = 9$ болно. Бид хамгийн бага тоог хайж буй тул $S_0 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Иймд $m = 5n$ болох тул хариунд буй тоо хамгийн бага нь байна.

ХII анги

Бодлого ХII-A1. $a, b, c > 1$ ба a, b, c дараалал геометр прогресс, харин $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ дараалал арифметик прогресс үүсгэдэг бол уг арифметик прогрессын ялгаврын авч болох утгуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** $0, -3/2$.

Геометр прогрессын ногдворыг q гэвэл $b = aq, c = aq^2$ болно. $t = \log_a q$ гэж тэмдэглэвэл арифметик прогресс үүсгэх $\log_a b + \log_c a = 2 \log_b c$ нөхцөлөөс

$$1 + t + \frac{1}{1 + 2t} = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{t}}$$

болно. Эндээс $t = 0$ эсвэл t нь

$$2t^2 - 3t - 3 = 0$$

тэгшитгэл ийн шийдээр тодорхойлогдоно. Арифметик прогрессын ялгавар

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + 2t} - (1 + t) \right) = -\frac{2t^2 + 3t}{2(1 + 2t)}$$

болно. $t = 0$ үед арифметик прогрессын ялгавар 0 . $t \neq 0$ үед тэгшитгэлээс ялгавар

$$-\frac{2t^2 + 3t}{2(1 + 2t)} = -\frac{3 + 6t}{2(1 + 2t)} = -\frac{3}{2}$$

болно.

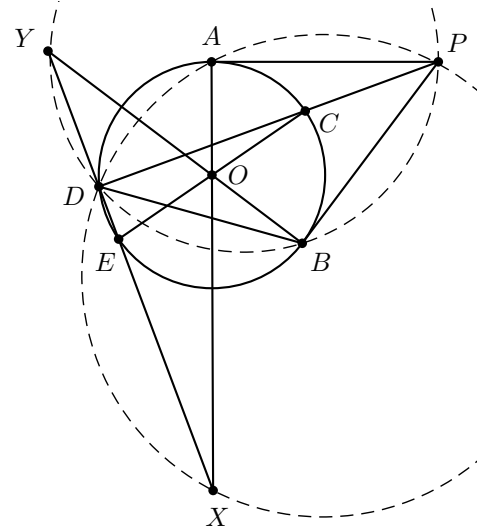
Бодлого ХII-A2. O төвтэй ω тойргийн гадна орших P цэгээс ω тойрогт PA ба PB шүргэгч татав. P цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг C ба D цэгт огтолно. CE нь ω тойргийн диаметр байг. DE шулууны AO ба BO шулуунтай огтлолцох цэгүүдийг харгалзан X ба Y гэвэл $OP^2 = OX \cdot OY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $\angle PDY = 90^\circ = \angle PBY$ гэдгээс Y, D, B, P цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle PYO = \angle PDB$ байна. Яг адил X, D, A, P цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба $\angle PXO = \angle PDA$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} \angle PYO + \angle YPO &= \angle POB \\ &= \frac{\angle AOB}{2} \\ &= \angle ADB \\ &= \angle ADP + \angle BDP \\ &= \angle PYO + \angle PXO \end{aligned}$$

тул $\angle PXO = \angle YPO$ байна. Мөн $\angle YOP = \angle POX$ тул $YOP \sim POX$ буюу $\frac{OX}{OP} = \frac{OP}{OY}$ болж батлагдана.



Бодлого XII-A3. $2n \times 2n$ хүснэгтийн $n(2n+1)$ нүдэнд 1, бусад нүдэнд 0 гэж бичив. Ялгаатай хоёр мөр сонгон авч нэг мөрний i -р тоог нөгөө мөрний i -р тоонд үржүүлээд эдгээр n үржвэрийг нэмье. Ингэж олсон нийлбэр нь $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ -с багагүй байх ялгаатай хоёр мөр олдоно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. k дугаар баганад байх нэгийн тооны тоог n_k , i ба j -р мөрний харгалзах тоонуудыг үржүүлж бүгдийг нь нэмэхэд гарах нийлбэрийг n_{ij} гэе. Эдгээр n_{ij} тоонуудын хамгийн ихийг N -ээр тэмдэглэж $N \geq \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ болохыг үзүүлье. Хүснэгтийн i -р мөр, k -р дугаар баганад бичигдсэн тоог A_{ik} -р тэмдэглэж

$$P = \{(A_{ik}, A_{jk}) : A_{ik}A_{jk} = 1, i < j, 1 \leq i, j, k \leq 2n\}$$

олонлогийн элементийн тоог 2 аргаар тооцъё.

a) k -р баганад байгаа нэгийн тоо n_k учраас 1 бичигдсэн i ба j мөрийг сонгох боломжийн тоо $\binom{n_k}{2}$ болно. Бүх n_k тооны нийлбэр нийт 1-ийн тоотой тэнцүү учраас

$$|P| = \sum_k \binom{n_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_k n_k^2 - (2n^2 + n) \right).$$

b) i ба j ($i < j$) мөр бэхлэгдсэн үед энэ хоёр мөрөнд байх P олонлогийн элементийн тоо n_{ij} -тэй тэнцүү. Иймд $|P| = \sum_{i < j} n_{ij}$ болох тул $\binom{2n}{2} N \geq |P|$.

Кошийн тэнцэл бишээр

$$\sum_k n_k^2 \geq \frac{(\sum_k n_k)^2}{2n} = \frac{(2n+1)^2 n}{2}$$

байх учраас

$$\binom{2n}{2} N \geq |P| \geq \frac{1}{4} ((2n+1)^2 n - 2(2n^2 + n)).$$

Иймд $4N \geq 2n+1$ болох тул $4N \geq 2n+2$. Үүгээр бодлого бодогдов.

Бодлого XII-B1. K цэгт гадаад байдлаар шүргэлцэх ω_1 ба ω_2 тойргуудын төвүүд O_1 ба O_2 байв. O_1O_2 шулуун ω_1 ба ω_2 тойргуудыг K цэгээс ялгаатай A ба B цэгүүдэд огтолно. AB хэрчмийн дундаж цэг дээр төвтэй тойрог ω_1 ба ω_2 тойргуудыг дөрвөн цэгээр огтлоно. Энэ дөрвөн цэгт оройтой дөрвөн өнцөгтийн диагоналиуд K цэгт огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. Өгөгдсөн нөхцлүүдээс

$$JO_2 = \frac{AB}{2} - O_2B = O_1K + O_2K - O_2B = O_1K = O_1M$$

байна. Яг адилаар $O_1J = O_2N$ болно. Мөн $JM = JN$ тул $\triangle O_1MJ \cong \triangle O_2JN$ байна. Иймд $\angle MO_1K = \angle NO_2K$ гэдгээс $\angle O_1KM = \angle O_2KN$ буюу M, N, K цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Бодлого XII-B2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \dots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \dots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $m = n$.

$P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) + x$ олон гишүүнт ба $a_1 = 1, \dots, a_n = n$ тогтмол биш арифметик прогрессын хувьд $P(1) = 1, \dots, P(n) = n$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болно. Иймд $m = n$ байх жишээ олдоно.

Одоо $m \leq n$ гэж баталъя. n зэргийн $P(x)$ олон гишүүнт ба тогтмол биш $a_1, \dots, a_m$ арифметик прогресс бодлогын нөхцөл хангадаг гэе. Энд $d = a_2 - a_1 \neq 0$ ба $D = P(a_2) - P(a_1)$ гэвэл $1 \leq k \leq m$ хувьд $a_k = d(k-1) + a_1$ ба $P(a_k) = D(k-1) + P(a_1)$ байна.

Одоо $r = D/d$ гэж тэмдэглээд $Q(x) = P(x) - (x-a_1)r - P(a_1)$ олон гишүүнтийг авч үзье. $1 \leq k \leq m$ хувьд $Q(a_k) = P(a_k) - P(a_1) - (a_k - a_1)r = D(k-1) - d(k-1)r = 0$ болно. Иймд $a_1, \dots, a_m$ нь n зэргийн $Q(x)$ олон гишүүнтийн ялгаатай язгуурууд болох тул $m \leq n$ байна.

Бодлого XII-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $(n, m) = (2, 5)$.

$(n, m) = (2, 5)$ шийд болох нь илт тул өөр шийдгүй гэж харуулъя. Хоёр бодолт хийе.

Индукц ашигласан бодолт: $n = 1$ үед $1^m < m^1 + m + 1$ тул шийдгүй.

$n = 2$ үед $m \leq 4$ шийдгүй болохыг шалгахад төвөггүй. Индукцээр $m \geq 6$ хувьд

$$2^m > m^2 + m + 2 \quad (\dagger)$$

гэж харуулъя. $m = 6$ үед $2^6 = 64 > 44 = 6^2 + 2 + 6$ үнэн ба $m \geq 6$ хувьд үнэн гэвэл

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &\geq 2 \cdot (m^2 + m + 2) \\ &= m^2 + m^2 + 2m + 4 \\ &> m^2 + 3m + 4 \\ &= (m+1)^2 + (m+1) + 2 \end{aligned}$$

тул $m+1$ хувьд үнэн. Иймд $n = 2, m \neq 5$ шийдгүй.

$n \geq 3$ гээд ахиад тохиолдолд салгая.

$m = 1$ үед $n^1 < 1^n + 1 + n$ тул шийдгүй.

$m = 2$ үед дурын $n \geq 1$ хувьд $n^2 < 2^n + 2 + n$ байна. Үнэхээр, $n \leq 5$ хувьд шалгахад төвөггүй ба $n \geq 6$ хувьд $(\dagger)$ -с

$$2^n + 2 + n > 2^n > n^2 + n + 2 > n^2$$

байна. Иймд $m = 2$ үед шийдгүй.

$m \geq 3$ гээ. $m > n \geq 3$ хувьд

$$n^m > m^n + m + n. \quad (\ddagger)$$

гэж харуулъя. Эхлээд $e = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2.72 < \frac{74}{27}$ болохыг саная. $m = n+1$ үед

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^n}((n+1)^n + (n+1) + n) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{2}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &\leq e + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} \\ &< 3 \\ &\leq n \end{aligned}$$

тул үнэн. Одоо $m > n$ хувьд үнэн гээд $m+1$ тохиолдлыг авч үзье. Энд

$$n \geq 3 \geq e \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$$

болохыг анзаарвал

$$n^{m+1} > n(m^n + m + n) > (m+1)^n + n(m+n) > (m+1)^n + (m+1) + n$$

болно. Индукцээр дурын $m > n \geq 3$ хувьд үнэн.

Эцэст нь $n \geq m \geq 3$ гэе. $n = m$ үед илт шийдгүй ба $n > m \geq 3$ үед $(\dagger)$ -с

$$m^n + m + n > m^n > n^m + n + m > n^m$$

болох тул шийдгүй.

Илтгэгч функц ашигласан бодолт: $(\dagger)$, $(\ddagger)$ тэнцэтгэл бишүүдийг илтгэгч функц ашиглан баталъя.

$(\dagger)$ -ийн баталгаа. $m \geq 6$ тул

$$2^m = (1+1)^m > 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(5-2)}{6} + m + 1 = m^2 + m + 2$$

байна.

$(\ddagger)$ -ийн баталгаа. $k = m - n \geq 1$ ба $r = \frac{k}{n} > 0$ гэвэл $e^r \geq 1 + r + \frac{r^2}{2}$ тул $e^k = e^{rn} \geq \left(1 + r + \frac{r^2}{2}\right)^n \geq (1+r)^n + n(1+r)^{n-1} \frac{r^2}{2}$ болох ба эндээс $e^k \geq (1+r)^n + n(1+r)^2 \frac{r^2}{2}$ байна. Иймд

$$n^k \geq 3^k > e^k \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n + \frac{(n+k)^2 k^2}{2n^3}$$

болох ба $n^{n-3}(n+k)^2 k^2 \geq (n+k)^2 \geq (n+k)n + nk \geq 4n + 3k > 2(2n+k)$ тул

$$n^{n+k} > (n+k)^n + (n+k) + n$$

байна.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. $\overline{ABCABCBBB}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх тоонд хуваагддаг байх бүх ялгаатай A, B, C цифрүүдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу:** 306306000.

Нөхцөл хангах тоог $n = \overline{ABCABCBBB}$ гэе. n тоо 5-д хуваагдах тул $B = 5$ эсвэл 0 байна. Мөн n тэгш тоо тул $B = 0$ болно. n тоо 9-д хуваагдах тул $2(A + C)$ тоо 9-д хуваагдана. Эндээс $A + C$ нь 9-д хуваагдана. n тоо 16-д хуваагдах тул $C000$ тоо 16-д хуваагдах ёстой. Эндээс C тэгш байх ёстой. Иймд $A = 7, C = 2$ эсвэл $A = 5, C = 4$ эсвэл $A = 3, C = 6$ эсвэл $A = 1, C = 8$ байх боломжуудтай. Эндээс 108108000, 306306000, 504504000, 702702000 гэсэн тоонуудаас 17-д хуваагдах нь 306306000 тоо л юм.

Бодлого ББ-А2. Аль ч мөр, аль ч багана ба хоёр диагоналийн дагуух тоонуудын нийлбэр ижил байхаар нүд бүрд нь натурал тоо бичигдсэн 3×3 хэмжээтэй квадратыг шидэт квадрат гэдэг. Шидэт квадратын хоёр тоо зурагт дүрсэлсэн байдлаар өгөгджээ.

Хаа нэгтээ 9 бичигдэхээр шидэт квадратыг гүйцээж бөглө (бүх боломжит байдлаар).

	11	
		5

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **VII-1** бодолтыг харна уу.

Бодлого ББ-А3. $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зүүн дээд булангаас баруун доод булан хүртэлх диагональ дээр орших нүд бүрийн хувьд уг нүдийг агуулах мөр баганад ижил тоо байдаггүй байхаар а) $n = 15$, б) $n = 16$ үед 1, 2, ..., $2n - 1$ тоонуудыг байрлуулж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** а) болохгүй, б) болно.

а) Хүснэгтийн багануудаа зүүнээс баруун 1, 2, ..., 15, мөрнүүдээ дээрээс доош 1, 2, ..., 15 гэж дугаарлая. Мөн i -р мөр, j -р баганын огтлолцолд бичигдсэн тоог a_{ij} гэе. Мөн $1 \leq i \leq 15$ үед $S_i = a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{15i} + a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{i15} - a_{ii}$ нийлбэрийг тэмдэглэе. Энэ нийлбэрт a_{ii} тоо нэг л удаа нэмэгдэнэ. S_i бүр 1, 2, ..., 29 гэсэн тоонуудыг нэг удаа агуулах бөгөөд $S_1, S_2, \dots, S_{15}$ гэсэн 15 ширхэг нийлбэр байх тул $S_1 + S_2 + \dots + S_{15}$ нийлбэрт тоо бүр сондгой удаа байна. Нөгөө талаас $i \neq j$ байх i, j -ийн хувьд a_{ij} элемент S_i, S_j хоёуланд нь нэмэгдэнэ. Диагональ дээр бичигдэхгүй тоо 1, 2, ..., 29 дундаас олдох бөгөөд тэр тоо нийт нэмэгдэхүүнд тэгш удаа орох болж зөрчил үүснэ. Иймд болохгүй.

б) **VIII-4** бодолттой төстэйгээр байгуулагдана.

Бодлого ББ-Б1. Ах, дүү 2 гэрээсээ сургууль руугаа зэрэг гарч дүү нь ахаасаа 39 минутын дараа сургууль дээрээ очив. Ахын хурдыг 40 хувиар багасгаж, дүүгийн хурдыг 25 хувиар ихэсгэхэд тэд зэрэг сургууль дээрээ очиж чадах байв. Дүү сургууль руугаа хэдэн минут алхсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу:** 75 минут.

Дүүгийн хурдыг x , ахын хурдыг y , сургууль болон гэр хоорондын замыг S гэе. $x < y$ бөгөөд өгсөн нөхцөлүүдийг систем тэгшитгэл болгон бичвэл:

$$\begin{cases} \frac{S}{y} + 39 = \frac{S}{x} \\ \frac{S}{0.6y} = \frac{S}{1.25x} \end{cases}$$

болно. $0.6y = 1.25x$ гэдгээс $12y = 25x$ болно. Эхний нөхцөлийг хувиргавал

$$39 = S \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = S \left(\frac{y - x}{yx} \right) = S \cdot \frac{12y - 12x}{12yx} = S \cdot \frac{13x}{25x^2} = \frac{13S}{25x}$$

болно. Эндээс $\frac{S}{x} = 75$ минут болж дүүгийн гэр сургуулийн хооронд алхсан хугацаа гарна.

Бодлого ББ-Б2. 1, 2 цифрээр бичигдэх 10 оронтой 99-д хуваагдах тоо хэд байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **Хариу:** 25.

99-д хуваагдах 10 оронтой тоог $\overline{a_{10}a_9 \dots a_1}$ гэж тэмдэглэе. Энэ тооны цифрүүдийн нийлбэр 10-аас их 20-с бага бөгөөд 9-д хуваагдах тул 18 байна. Иймд 2 ширхэг 1, 8 ширхэг 2 цифрээс бүтсэн тоо байх ёстой болно. 11-д хуваагдах тооны шинжээр

$$a_{10} + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 - a_9 - a_7 - a_5 - a_3 - a_1$$

илэрхийлэл 11-д хуваагдана. Энэ илэрхийллийн утга 5-аас бага, -5 -аас их байх учраас 0 байхаас өөрцгүй. Иймд сондгой (мөн тэгш) дугаартай цифрүүдийн аль нэг нь 1, бусад нь 2 болно. Ингэж бичигдэх 10 оронтой тоо бүр 9 ба 11 тоонууд харилцан анхны учир 99-д хуваагдана. Аль нэг сондгой (мөн тэгш) дугаартай цифрийг 1 гэж сонгох боломж 5 учраас нийт 1, 2 цифрээр бичигдэх 10 оронтой 99-д хуваагдах тоонуудын тоо 25 болно.

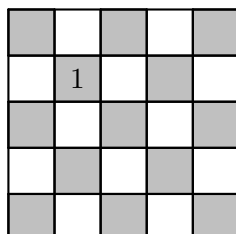
Бодлого ББ-Б3. Дараалсан 2 тоо хөрш нүдэнд байхаар 2, 3, 4, 5, 6 гэсэн таван тоог дараах хүснэгтэд хэдэн янзаар нэмж бичиж болох вэ? Нэг нүдэнд нэгээс олон тоо бичихгүй.

	1			

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу:** 94.

Зүүн дээд булангаас хар, цагаанаар шатрын хөлөг шиг будсан гэе. Тэгвэл дараалсан тоонууд хөрш нүдэнд байх тул сондгой тоонууд ижил өнгөтэй нүдэнд, тэгш тоонууд ижил өнгөтэй нүдэнд байрлах болно. Эндээс 1 болон 6-ын тоо өөр өнгөтэй нүдэнд байрлах тул 6-ын тоо хар нүднүүдэд байрлаж чадахгүй бөгөөд зөвхөн цагаан нүдэнд байрлана.



Одоо диагоналиас доош байрлах 6 нүдэнд 6 байрлах үед боломжийг тоолоод 2-оор үржихэд бодлогын хариу гарна. Энэ боломжийг хялбархан

$$3 + 5 + 7 + 12 + 10 + 10 = 47$$

гэдгийг тоолж болох ба иймд нийт хариу 94 болно.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. $n \geq 2, k \geq 2$ гэе. $a_1, \dots, a_n \geq 0$ тоонуудын арифметик дунджийг A гэвэл

$$2^{k-1}(|a_1 - A|^k + \dots + |a_n - A|^k) \leq (|a_1 - A| + \dots + |a_n - A|)^k$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $y_1, \dots, y_l \geq 0$ ба $z_1, \dots, z_m \geq 0$ хувьд $y_1 + \dots + y_l = z_1 + \dots + z_m = B$ гэе. Энэ үед

$$(y_1^k + \dots + y_l^k) + (z_1^k + \dots + z_m^k) \leq (y_1 + \dots + y_l)^k + (z_1 + \dots + z_m)^k = 2B^k$$

болох нь илт. Энд $\{y_1, \dots, y_l\} = \{a_i - A \mid a_i \geq A\}$ ба $\{z_1, \dots, z_m\} = \{A - a_i \mid A > a_i\}$ гэж авахад бодлого мөрдөх ба зөвхөн $(A + a, A - a, A, A, \dots, A)$ хэлбэртэй дарааллын сэлгэмэл дээр тэнцэтгэл биелнэ.

Бодлого ДБ-А2. $n \geq 2$ гэе. 1, 2, ..., n дугаартай n зогсоол дээр 1, 2, ..., n дугаартай n машиныг байрлуулав. Машин бүрийн дугаараас уг машин зогссон зогсоолын дугаарыг хасахад гарах n ялгавар бүгд ялгаатай байвал энэ байрлуулалтыг зөв гэж нэрлэе. Нийт зөв байрлуулалтын тоо сондгой гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. **ХИ-А3** бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-А3. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог ω ба $\angle B > \angle C$ гэе. ω тойргийн A цэгийг агуулах BC нумын дундаж цэгийг T ба ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэе. ω тойрог дотор орших E цэгийн хувьд $AE \parallel BC$ ба $\angle AEI = 90^\circ$ байг. TE шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэг нь P ба $\angle B = \angle IPB$ бол $\angle A$ өнцгийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. ω тойргийн төв нь O ба TM нь ω тойргийн диаметр байг. PI шулууны ω тойргийг огтлох шинэ цэгийг Q гэе. Тэгвэл M нь BC нумын дундаж цэг байх ба A, I, M нэг шулуун дээр оршино. $AE \parallel BC$ ба $\angle AEI = 90^\circ$ гэдгээс $IE \perp BC$ байна. Мөн $TM \perp BC$ тул $IE \parallel TM$ болно.

Иймд $\angle AIE = \angle AMT = \angle APT$ гэдгээс A, P, I, E нэг тойрог болно. Эндээс $\angle APQ = \angle API = 180^\circ - \angle AEI = 90^\circ$ буюу A, O, Q нэг шулуун дээр оршино. Иймд

$$\angle BPI = \angle BPQ = \angle BAQ = 90^\circ - \angle ACB$$

тул $\angle B = \angle BPI = 90^\circ - \angle ACB$ буюу $\angle B + \angle C = 90^\circ$ гэдгээс $\angle A = 90^\circ$ байна.

Бодлого ДБ-Б1. 2019-н тоог аль ч дараалсан таван a, b, c, d, e тооных нь хувьд $a-b+c-d+e = 55$ байхаар тойрог дээр байрлуулж болдог бол уг тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Тоонуудаа $a_0, a_1, \dots, a_{2018}$ гээд дурын $i \geq 0$ хувьд

$$x_i = a_i \pmod{2019} - 55$$

гэж тэмдэглэе. Өгсөн нөхцөлөөс дурын $i \geq 0$ хувьд $x_i - x_{i+1} + x_{i+2} - x_{i+3} + x_{i+4} = 0$ болно. Мөн ижлээр $x_{i+1} - x_{i+2} + x_{i+3} - x_{i+4} + x_{i+5} = 0$ тул $x_{i+5} = -x_i$ байна. Эндээс дурын $k \geq 0$ хувьд $x_{i+5k} = (-1)^k x_i$ болох ба $k = 404$ гэвэл $x_{i+2020} = x_i$ болно. Иймд $x_{i+1} = x_{i+2020} = x_i$ болох тул x_i тогтмол болох ба өгсөн нөхцөлөөс $x_i = 0$ болно. Энэ нь $0 = a_1 = \dots = a_{2018} = 55$ гэсэн үг.

Бодлого ДБ-Б2. $n \geq 2$ гэе. n зэргийн бодит $P(x)$ олон гишүүнт ба $m \geq 1$ урттай тогтмол биш $a_1, \dots, a_m$ арифметик прогресс $P(a_1), \dots, P(a_m)$ дараалал мөн тогтмол биш арифметик прогресс болохоор олддог байх m тооны хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **XII-Б2** бодолтыг харна уу.

Бодлого ДБ-Б3. $n^m = m^n + m + n$ байх бүх натурал тоон (n, m) хосыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **XII-Б3** бодолтыг харна уу.

Монголын Математикийн 55-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Математикийн 55-р Олимпиад

Улаанбаатар хот

Улсын Математикийн 55-р Олимпиад (УМО-55) 2019 оны 04 сарын 29-нөөс 05 сарын 04-нийг хүртэлх өдрүүдэд Улаанбаатар хотод явагдсан. “Шинэ үе” сургуулийн нэрэмжит болон зохион байгуулагдсан энэ удаагийн улсын олимпиад

- Хагас зуун жилийн түүхтэй Монголын Математикийн Олимпиадын үйл ажиллагаанд идэвх зүтгэлтэй оролцон ажиллаж байсан үе үеийн төлөөлөлд хүндэтгэл үзүүлснээрээ
- Нийслэлийн дүүрэг бүрийг төлөөлсөн авьяаслаг сурагчдаар эгнээгээ тэлсэн, зохион байгуулалтын болон комиссын үйл ажиллагаанд IMO-гийн туршлагаас нэвтрүүлснээрээ

шинэлэг байлаа.

Манай улсын 21 аймаг, Улаанбаатар хотын 9 дүүргээс шалгарсан дунд ангиллын 101, ахлах ангиллын 83, нийт 184 сурагч, 60 багш оюун ухаан авьяас чадвараа сорихоор УМО-55-д шалгаран оролцсон.

Талархал

УМО-55-ыг хүлээн авч амжилттай зохион байгуулсан МУАБ Ү. Маам захиралтай “Шинэ Үе” сургуулийн хамт олонд нийт оролцогчдынхоо нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье. БСШУСЯ, МУИС, Улаанбаатар хотын захирагчийн ажлын алба тус олимпиадад санхүү, сурталчилгаа, үйл ажиллагаа, зохион байгуулалтын дэмжлэг үзүүлэн ММОХ-той хамтран ажиллалаа.

УМО-55-д оролцогчдын Тангараг

Монгол улсын ерөнхий боловсролын сургуулийн сурагч/багш би нөхөрсөг харилцааг эрхэмлэж өөрийн оюун чадвараа дайчлан Улсын Математикийн 55-р Олимпиадад ёс зүйтэй, үнэнч шударга оролцохоо ТАНГАРАГЛАЖ байна.

Мэргэжлийн Хороо

УМО-55-ын мэргэжлийн үйл ажиллагааг их сургуулиудын багш, оюутнууд болон хүрээлэнгийн эрдэм шинжилгээний ажилчдын бүрэлдэхүүнтэй бодлогын комисс, засах комисс, үйл ажиллагаа хариуцсан комисс тус тус гүйцэтгэлээ.

1. **Бодлогын комисс:** УМО-55-д дэвшигдсэн бодлогуудыг төрөл, шинэлэг байдал, хүнд хөнгөнийг харгалзан сонгон шалгаруулах, засах аргачлал бэлтгэх ажлыг хариуцан гүйцэтгэсэн.

Комиссын ахлагч: Др. Ү. Отгонбаяр (Математикийн Хүрээлэнгийн захирал)

Гишүүн: Др. Ү. Батзориг (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

Др. Г. Батзаяа (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

Мс. Т. Базар (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

2. **Засах комисс:** Ангилал бүрийн 1 бодлогыг хоёроос цөөнгүй хүнтэй бүлэг хамтарч бодлогын комиссын гаргасан засах аргачлалын дагуу оролцогчдын материалыг засах, бодолт хамгаалуулах ажлыг гүйцэтгэсэн.

Комиссын ахлагч: Б. Батбаясгалан (ММОХ-ны гишүүн)

Гишүүн: Др. Ү. Отгонбаяр (Математикийн Хүрээлэнгийн захирал)

Др. Б. Баяржаргал (МУИС-ийн математикийн багш)

Др. Г. Баярмагнай (ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал)

Др. Т. Хулан (МУИС-ийн математикийн багш)

Др. Н. Ууганбаатар (МУИС-ийн математикийн багш)

Др. Э. Азжаргал (МУБИС-ийн математикийн багш)

Др. Л. Буянтогтох (МУБИС-ийн математикийн багш)

Др. У. Батзориг (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

Др. Г. Батзаяа (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

Мс. Ш. Доржсэмбэ (МУБИС-ийн математикийн багш)

Мс. Т. Базар (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)

Э. Оргил-Эрдэнэ (МУИС-ийн оюутан)

Ч. Баянбат (МУИС-ийн оюутан)

Г. Баяржавхлан (МУИС-ийн оюутан)

М. Буянбилэг (МУИС-ийн оюутан)

Х. Санжаахүү (МУИС-ийн оюутан)

Б. Төрбат (МУИС-ийн оюутан)

3. **Үйл ажиллагаа хариуцсан комисс:** УМО-55-д оролцогчдод сэдэв тараах, материал хураан авах, шифрлэх, асисент багш нарыг чиглүүлэх зэрэг бодолт явагдсан 2 өдрийн турш олон нийттэй харилцах комиссын үйл ажиллагааг хариуцан ажилласан.

Комиссын ахлагч: Др. Б. Баяржаргал (МУИС-ийн математикийн багш)

Гишүүн: Др. Б. Сандагдорж (МУБИС-ийн математикийн багш)

Др. Д. Даянцолмон (МУИС-ийн математикийн багш)

Др. Н. Аргилсан (СЭЗДС-ийн математикийн багш)

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Дунд ангиллын (ДА) даамлаар Др. У. Батзориг ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
ДА-A1	Алгебр	У. Батзориг	Ч. Баянбат, Н. Ууганбаатар
ДА-A2	Геометр	Т. Базар	Ш. Доржсэмбэ, Т. Базар
ДА-A3	Тооны онол	У. Батзориг	Б. Төрбат, У. Батзориг
ДА-B1	Тооны онол	Г. Батзаяа	М. Буянбилэг, Г. Баяржавхлан
ДА-B2	Геометр	Н. Өлзийнасан	Т. Хулан, Э. Азжаргал
ДА-B3	Комбинаторик	Б. Баяржаргал	Б. Баяржаргал

Ахлах ангиллын (АА) даамлаар Др. Г. Батзаяа ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
АА-A1	Комбинаторик	Г. Батзаяа	Г. Батзаяа, Г. Баяржавхлан
АА-A2	Геометр	Т. Хулан	Т. Хулан, М. Буянбилэг
АА-A3	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай, Э. Оргил-Эрдэнэ
АА-B1	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Ш. Доржсэмбэ, Х. Санжаахүү
АА-B2	Комбинаторик	Б. Төрбат	Б. Төрбат, Ч. Баянбат
АА-B3	Геометр	Г. Батзаяа	Г. Батзаяа, Г. Баярмагнай

Дундын багшийн даамлаар Др. Ү. Отгонбаяр ажиллалаа.

Бодлого	Төрөл	Зохиогч	Зассан
ДБ-A1	Тооны онол	Г. Баярмагнай	Б. Батбаясгалан, Э. Азжаргал
ДБ-A2	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Ү. Отгонбаяр, Б. Баяржаргал
ДБ-A3	Геометр	Г. Батзаяа	Л. Буянтогтох, Х. Санжаахүү
ДБ-B1	Тооны онол	Т. Базар	Т. Базар, Э. Оргил-Эрдэнэ
ДБ-B2	Комбинаторик	У. Батзориг	У. Батзориг, Л. Буянтогтох, Б. Батбаясгалан
ДБ-B3	Алгебр	Ү. Отгонбаяр	Ү. Отгонбаяр

Медальт байранд шалгарсан багш сурагчид

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 55 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН АХЛАХ АНГИЛАЛ

Овог	Нэр	Сургууль	A1	A2	A3	B1	B2	B3	Σ	Медаль	
1	Эрдэнэбат	Эрдэнэбилэг	11-р сургууль	7	7	7	7	7	6	41	Алт
2	Отгонбаяр	Мишээл	Шинэ Монгол	7	7	7	7	7	3	38	Мөнгө
3	Батсайхан	Батмэнд	1-р сургууль	7	7	7	7	6	1	35	Мөнгө
4	Мөнхбат	Өнөболд	1-р сургууль	7	7	7	6	2	2	31	Мөнгө
5	Цацрал	Ганхөлөг	Сант	7	7	7	7	3	0	31	Мөнгө
6	Амар	Нямдаваа	Сант	7	7	1	7	7	0	29	Хүрэл
7	Гомбоцэрэн	Батбуяан	Олонлог	7	7	7	7	0	0	28	Хүрэл
8	Шинэбаяр	Билэгжаргал	11-р сургууль	6	7	0	4	7	0	24	Хүрэл
9	Амарзаяа	Пүрэвзаяа	Олонлог	7	7	2	1	7	0	24	Хүрэл
10	Алтан-Од	Алтансүх	11-р сургууль	7	7	7	2	0	0	23	Хүрэл
11	Гансүх	Мөнхтүшиг	Шинэ үе	7	7	2	2	3	1	22	Хүрэл
12	Батсайхан	Долгормаа	Олонлог	4	7	0	2	7	0	20	Хүрэл
13	Василь	Маралгүн	1-р сургууль	7	7	0	6	0	0	20	Хүрэл
14	Жавхланбаатар	Тэмүүлэн	1-р сургууль	1	7	2	7	2	0	19	Хүрэл

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 55 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН ДУНД АНГИЛАЛ

	Овог	Нэр	Сургууль	A1	A2	A3	B1	B2	B3	Σ	Медаль
1	Батжаргал	Адьяатөмөр	1-р сургууль	7	7	7	0	7	7	35	Алт
2	Лувсандорж	Оргилболд	Орчлон	7	7	6	7	0	7	34	Мөнгө
3	Болдбаатар	Хантүшиг	11-р сургууль	7	6	0	7	7	7	34	Мөнгө
4	Дэлгэрдалай	Энэрэлт	Сант	7	3	0	7	7	7	31	Мөнгө
5	Батбилэгт	Баясгалан	1-р сургууль	7	7	7	0	0	7	28	Мөнгө
7	Батбаяр	Билгүүн	Сант	7	7	2	7	3	0	26	Хүрэл
8	Очирхүү	Эрхэсболд	Сант	6	0	7	7	0	6	26	Хүрэл
10	Шинэзул	Билгүүдэй	Сант	7	0	7	7	0	0	21	Хүрэл
11	Ялалт	Түвшинсанаа	Сант	7	0	7	0	0	7	21	Хүрэл
12	Бат Амгалан	Билэгдэмбэрэл	11-р сургууль	7	2	2	7	1	0	19	Хүрэл
13	Батлхагва	Тэнүүнсайхан	Шинэ үе	7	0	0	4	0	6	17	Хүрэл
14	Болдбаатар	Мөнх Оргил	1-р сургууль	7	0	5	0	0	5	17	Хүрэл

МОНГОЛЫН МАТЕМАТИКИЙН 55 ДУГААР ОЛИМПИАДЫН БАГШ АНГИЛАЛ

Овог	Нэр	Сургууль	A1	A2	A3	B1	B2	B3	Σ	Медаль	
1	Батмөнх	Ганбат	Эрдмийн хишиг	7	7	1	7	1	2	25	Алт
2	Мягмар	Батбилэг	Орчлон	7	5	0	7	3	2	24	Мөнгө
3	Банзрагч	Зоригтбаатар	Дэлгэрмөрөн	7	0	1	7	7	0	22	Хүрэл
4	Мөнхтоогоо	Гантогтох	Орчлон	7	3	0	7	5	0	22	Хүрэл
5	Шар	Уранчимэг	Олонлог	7	0	0	7	7	0	21	Тусгай шагнал

Багийн дүн

Баг	Дундаж оноо	Байр
1 Чингэлтэй Дүүрэг	19.33	1
2 Сүхбаатар Дүүрэг	17.46	2
3 Хан Уул Дүүрэг	14.88	3
4 Баянзүрх Дүүрэг	14.28	4
5 Хөвсгөл аймаг	13.38	5
6 Баянгол Дүүрэг	12.85	6

тус тус эзэллээ. Мөн 13.14 оноо авсан “Шинэ үе” зочин багийн хамт олонд ирэх жилийн УМО-56-д оролцох 1 эрхийг олголоо.

Нийт 35 багш, сурагч шалгарч шагнал хүртсэнээс СБД 2 алт 6 мөнгө, 13 хүрэл, БГД 1 алт 3 хүрэл, ХУД 2 мөнгө, Хөвсгөл 1 мөнгө, 2 хүрэл, БЗД 1 мөнгө, ЧД 3 хүрэл, 1 тусгай шагнал хүртэж олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа.

УМО-56

2019-2020 оны хичээлийн жилд явагдах Улсын математикийн 56-р олимпиадыг УМО-ын анхны аварга МУИС-ийн багш ШУ-ны доктор, профессор Ц. Баясгалан асаны нэрэмжит болгон зохион явуулахаар тогтсон. Монголын Математикийн Олимпиадын Хорооны шилжин явах тугийг түүний шавь нар (Функционал анализын спец курсийн оюутнууд), “Космо трейд” ХХК-ийн ерөнхий захирал Б. Батбаасан нар хүлээн авлаа.

ОУМО-60

ОУМО-60 олимпиад 7-р сарын 11-22 хооронд Их Британи Умард Ирландын Нэгдсэн Вант Улсын Баттын Их сургууль дээр зохион байгуулагдана. Энэ хичээлийн жилд ОУМО-д оролцох багийн шалгаруулалт орон даяар ЕБС-ийн нийт сурагчдыг хамарч нээлттэй 2 шаттайгаар явагдаж дүнгээ гаргалаа. УМО-55-ын болон II шатны 2 удаагийн сорилын онооны нийлбэрээр

1. Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч М. Өнөболд
2. Олонлог сургуулийн сурагч А.Пүрэвзаяа
3. Нийслэлийн 11-р сургуулийн сурагч Э. Эрдэнэбилэг
4. Шинэ Монгол сургуулийн сурагч О. Мишээл
5. Нийслэлийн 1-р сургуулийн сурагч Б. Батмэнд
6. Олонлог сургуулийн сурагч Б. Долгормаа

нар оролцохоор шалгарлаа.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Др. Г. Баярмагнай
2019 оны 05 дугаар сарын 04

Бодлогууд

Дунд ангилал

Бодлого ДА-1. $-3 \leq x, y \leq 3$ тоонуудын хувьд

$$0 \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \leq 164$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого ДА-2. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ бөгөөд $\angle BCD < 90^\circ$ байх $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. P, Q цэгүүдийг $\angle APC = \angle AQC = \angle BCD$ байхаар харгалзан CB, CD цацрагууд дээрээс авав. $BCDE$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болдог E цэгийн хувьд EDB гурвалжныг багтаасан тойргийн төв PQ хэрчмийн дундаж цэг болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ДА-3. Натурал m, n тоонуудын хувьд $A = m^4 + 3m^2n^2 + n$ тоо

$$B = n^3 + 4mn^2 + 3m^2n + 4m^3 - 1$$

тоонд хуваагддаг бол B тоо ямар нэг анхны тооны 4 зэрэгтэд хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого ДА-4. Натурал n тооны хамгийн том анхны тоон хуваагчийг $P(n)$ гэж тэмдэглэе. $P(n - 1), P(n), P(n + 1)$ тоонууд бүгдээрээ $2\sqrt{n}$ тооноос бага байдаг $n \geq 2^{2019}$ тоо олдоно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого ДА-5. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC талыг E цэгт шүргэх ба AI шулуун BC талыг F цэгт огтолно. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог AEF гурвалжныг багтаасан тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолдог бол $\angle ADI = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого ДА-6. Сондгой тооны сурагчтай анги байв. Сурагч бүр ядаж нэг найзтай ба ерөнхий найзтай ямар ч хоёр сурагч ялгаатай тооны найзтай байв.

а) Яг 3 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?

б) Яг 6 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Ахлах ангилал

Бодлого АА-1. $2n$ оройтой олон өнцөгт бүрийн хувьд түүнийг тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваадаг, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ багтдаг диагональ татаж чаддаг байх бүх $n \geq 2$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого АА-2. ABC гурвалжны A, C цэгүүдийг дайрсан тойрог AB, BC хэрчмүүдийг харгалзан B цэгээс ялгаатай M, K цэгүүдэд огтолдог байв. BKM гурвалжныг багтаасан тойрог AK хэрчимтэй D цэгт огтлолцдог ба BD шулуун MK хэрчимтэй S цэгт, AC хэрчимтэй L цэгт огтлолцдог байв. AB тал дээр T цэгийг $\angle ALT = \angle CBL$ байхаар авсан бол TS шулуун AK шулуунтай параллель гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого АА-3. Дурын натурал $k \geq 1$ тооны хувьд 7^k тоонд хуваагдах

$$1 + 2^n + 3^n$$

хэлбэрийн тоо олдоно гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого АА-4. $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1 - a_1 a_2 \dots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого АА-5. 20×20 хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр будахыг будалт гэе. Өгөгдсөн P будалтын хувьд хүснэгтээ хоёроос олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд шугамын дагуу хуваахад нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтийн тоо хамгийн багадаа $n(P)$ байдаг гэе. $n(P)$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Төрбат)

Бодлого АА-6. I төвтэй ω тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AD, BC шулуунууд Q цэгт, харин AB, CD шулуунууд P цэгт огтлолцдог бөгөөд B цэг AP хэрчим дээр, D цэг AQ хэрчим дээр байв. PBD, QBD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан X, Y гэе. PY, QX шулуунууд R цэгт огтлолцдог бол $RI \perp BD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. $p \geq 2$ анхны тоо ба p тоотой харилцан анхны a, b натурал тоонууд өгөгдөв. $(a^{p-1} - 1) + 55(b^{p-1} - 1)$ нийлбэр p^2 -д хуваагддаг бол $(a^{p(p-1)} - 1) + 55(b^{p(p-1)} - 1)$ нийлбэр p^3 -д хуваагдана гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-2. $0 < x_0 < 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n$$

байдаг $\{x_n\}$ дарааллын хувьд $\{n(1 - x_n)\}$ дараалал зааглагдсан гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого ДБ-3. I төвтэй ω тойргийг багтаасан, O төвтэй Ω тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диаголиуд E цэгт огтлолцоно. ω тойрог AD, AB талуудыг харгалзан P, Q цэгүүдэд шүргэх ба E цэгээс PQ шулуунд буулгасан перпендикулярын суурь T бол AO ба IT шулуунууд Ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого ДБ-4. $a_1^2 + \dots + a_n^2$ нийлбэр $(a_1 + \dots + a_n)^2 - 1$ тоог хуваадаг байх $a_1, \dots, a_n$ натурал тоонууд олддог чанартай хамгийн бага натурал $n \geq 2$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ДБ-5. Огторгуйд өгөгдсөн тэг биш 7 вектороос хоорондох өнцөг нь хурц байх хоёр вектор сонгож чадна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Батзориг)

Бодлого ДБ-6. Сондгой тоо k ба бүхэл коэффициенттэй k зэргийн $Q(X)$ олон гишүүнт өгөгдөв. Дурын бүхэл n тооны хувьд $P(n) = Q(m)$ байх бүхэл m тоо олддог чанартай бүх бодит коэффициенттэй k зэргийн $P(X)$ олон гишүүнтийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд

Дунд ангилал

Бодлого ДА-1. $-3 \leq x, y \leq 3$ тоонуудын хувьд

$$0 \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \leq 164$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $|x|, |y| \leq 3$ гэдгээс

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \leq (|x|^2 + 1)(|y|^2 + 1) + 4(|x| + 1)(|y| + 1) \leq 164$$

болох ба $(x, y) = (-3, -3)$ үед тэнцэтгэл биелнэ. Нөгөө талаас

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) = (xy + 1)^2 + (x + y - 2)^2 \geq 0$$

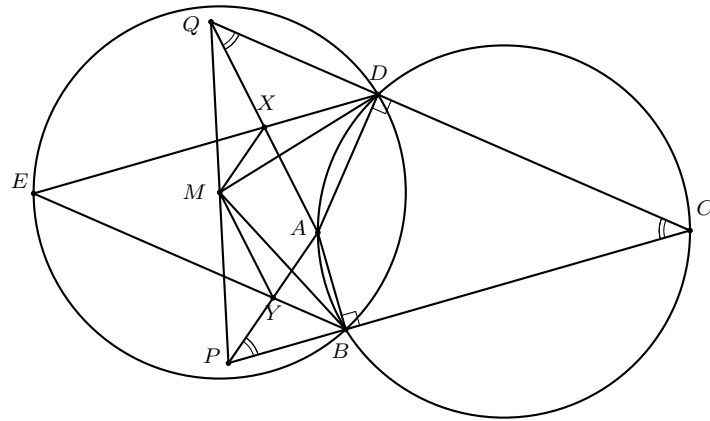
ба $\{x, y\} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ үед тэнцэтгэл биелнэ. Энд $-3 \leq 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \leq 3$ болохыг анзаарья.

Бодлого ДА-2. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ бөгөөд $\angle BCD < 90^\circ$ байх $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. P, Q цэгүүдийг $\angle APC = \angle AQC = \angle BCD$ байхаар харгалзан CB, CD цацрагууд дээрээс авав. $BCDE$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болдог E цэгийн хувьд EDB гурвалжныг багтаасан тойргийн төв PQ хэрчмийн дундаж цэг болно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $\angle BCD = \angle AQC = \angle APC = \gamma$, PQ хэрчмийн дундаж цэгийг M гэе. $BCDE$ параллелограмм учраас $\angle QDE = \angle QCP = \angle EBP = \gamma$ тул QXD, PYB адил хажуут гурвалжнууд болно.

$\angle QDA = \angle PBA = 90^\circ$ учраас $QX = XD = XA, BY = YP = YA$ болно. Эндээс X, Y цэгүүд харгалзан QA, PA хэрчмүүдийн дундаж цэгүүд болох бөгөөд $QM = MP$ тул $MXAY$ параллелограмм болно. $EX \parallel PC, MX \parallel PA$ учраас $\angle EXM = \angle APC = \gamma$ болно. Яг адилаар $MY \parallel QA, QC \parallel BE$ тул $\angle AQC = \angle MYE = \gamma$ болно. Иймд $\angle MXD = \angle MYB = 180^\circ - \gamma$ болно. $MX = YA = YB, XD = XA = MY$ тул ТӨТ шинжээр $\triangle MXD = \triangle BYM$ болох тул $MD = MB$ болов. Эцэст нь



$$\begin{aligned} \angle XAY &= 360^\circ - \angle QAD - \angle PAB - \angle BAD \\ &= 360^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \gamma) - (180^\circ - \gamma) \\ &= 3\gamma \end{aligned}$$

гэдгээс

$$\begin{aligned}\angle DMB &= \angle XMY - \angle XMD - \angle YMB \\ &= \angle XAY - \angle XMD - \angle XDM \\ &= 3\gamma - (180^\circ - \angle MXD) \\ &= 2\gamma\end{aligned}$$

болно. $\angle DMB = 2\angle DEB$ ба $MD = MB$ тул M нь EDB гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болох нь батлагдав.

Бодлого ДА-3. Натурал m, n тоонуудын хувьд $A = m^4 + 3m^2n^2 + n$ тоо

$$B = n^3 + 4mn^2 + 3m^2n + 4m^3 - 1$$

тоонд хуваагддаг бол B тоо ямар нэг анхны тооны 4 зэрэгтэд хуваагдана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $B = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ гэж ялгаатай анхны тооны зэрэгтүүдийн үржвэрт задалъя. Ямар нэг $1 \leq i \leq k$ хувьд $\alpha_i \geq 4$ гэж батлах хэрэгтэй.

Эсрэгээс нь бүх $1 \leq i \leq k$ хувьд $\alpha_i \leq 3$ гэж үзье. Одоо $C = p_1 \dots p_k$ гэж тэмдэглэвэл $B \leq C^3$ байна. $B \mid A$ гэдгээс

$$B \mid A + nB = m^4 + 3m^2n^2 + n + n(n^3 + 4mn^2 + 3m^2n + 4m^3 - 1) = (m + n)^4$$

болох ба эндээс $C \mid (m + n)^4$ болно. C нь ялгаатай анхны тоонуудын үржвэр тул $C \mid m + n$ болох ба эндээс

$$n^3 + 4mn^2 + 3m^2n + 4m^3 - 1 = B \leq C^3 \leq (m + n)^3$$

болно. Эндээс $mn^2 + 3m^3 - 1 \leq 0$ гэсэн илт зөрчилд хүрнэ.

Бодлого ДА-4. Натурал n тооны хамгийн том анхны тоон хуваагчийг $P(n)$ гэж тэмдэглэе. $P(n-1), P(n), P(n+1)$ тоонууд бүгдээрээ $2\sqrt{n}$ тооноос бага байдаг $n \geq 2^{2019}$ тоо олдоно гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $n = 4m^4$ гэвэл $n-1 = (2m^2-1)(2m^2+1)$ ба $n+1 = (2m^2+2m+1)(2m^2-2m+1)$ гэдгээс $P(n-1), P(n), P(n+1)$ тоонууд $2m^2+2m+1$ тооноос хэтрэхгүй. Иймд $2m^2+2m+1 < 2\sqrt{n} = 4m^2$ ба $2^{2019} < n = 4m^4$ байх хангалттай том натурал m тоо сонгоход бодлого бодогдоно.

Бодлого ДА-5. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC талыг E цэгт шүргэх ба AI шулуун BC талыг F цэгт огтолно. ABC гурвалжныг багтаасан тойрог AEF гурвалжныг багтаасан тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолдог бол $\angle ADI = 90^\circ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ACB = 2\gamma$, $\angle ABC = 2\beta$ гэе. I нь багтсан тойргийн төв учраас AI нь биссектрисс болж $\angle AIC = \angle BAI = \alpha$, $\angle IBE = \angle IBA = \beta$ байна. AI шулуун ω тойрогтой огтлолцох цэгийг K гэе.

$$\begin{aligned}\angle CDE &= \angle ADE - \angle ADC = \\ &= (180^\circ - \angle AFE) - \angle ABC = \\ &= (180^\circ - (180^\circ - \angle AFC)) - \angle ABC = \\ &= \angle FAC + \angle FCA - \angle ABC = \\ &= 180^\circ - \alpha - 2\gamma - 2\beta = \alpha\end{aligned}$$

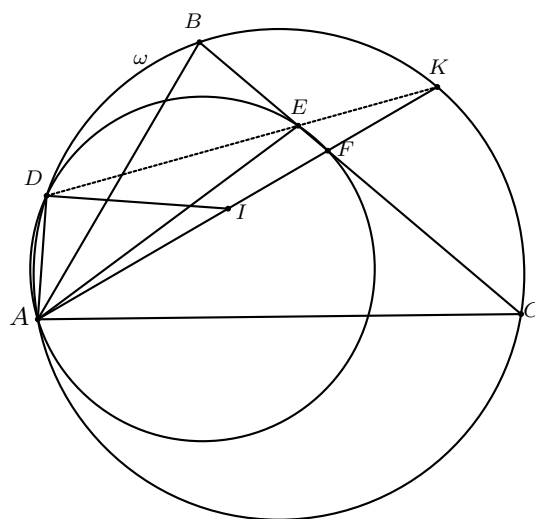
болно.

Эндээс $\angle CDK = \angle CAK = \alpha$ тул D, E, K цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Иймд

$$\angle BDK = \angle EBK = \alpha, \angle KBC = \angle KAC = \alpha$$

болно. Мөн $\angle BDK = \angle EBK$ ба $\angle DKB = \angle BKE$ гэдгээс $\triangle BDK \sim \triangle EBK$ болох тул $\frac{DK}{BK} = \frac{BK}{EK}$ байна. Эндээс $BK^2 = DK \cdot EK$ болно.

$$\begin{aligned}\angle BIK &= 180^\circ - \angle BIA \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \angle IBA - \angle IAB) \\ &= \alpha + \beta \\ &= \angle IBC + \angle CAK \\ &= \angle IBK\end{aligned}$$



тул BKI нь адил хажуут гурвалжин болж $BK = IK$ болов. $IK^2 = BK^2 = DK \cdot EK$ тул $\frac{IK}{DK} = \frac{EK}{IK}$ ба $\angle EKI = \angle IKD$ гэдгээс $\triangle EKI \sim \triangle IKD$ болно. Иймд $\angle ADK = \angle IEK$ болов. Эцэст нь

$$\begin{aligned}\angle IDA &= \angle ADE - \angle IDE = (\angle ADB - \angle BDE) - \angle EIF = \\ &= ((180^\circ - 2\gamma) - \alpha) - (\angle BIF - \angle BIE) = \\ &= 180^\circ - 2\gamma - \alpha - (180^\circ - \angle BIA) - (180^\circ - \angle IBE - \angle IEB) = \\ &= 180^\circ - 2\gamma - \alpha - (\alpha + \beta - 90^\circ + \beta) = 180^\circ - 2\gamma - 2\alpha - 2\beta + 90^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$

болж батлах зүйл батлагдав.

Бодлого ДА-6. Сондгой тооны сурагчтай анги байв. Сурагч бүр ядаж нэг найзтай ба ерөнхий найзтай ямар ч хоёр сурагч ялгаатай тооны найзтай байв.

- Яг 3 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?
- Яг 6 найзтай сурагч үргэлж олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу:** а) олдоно, б) олдохгүй.

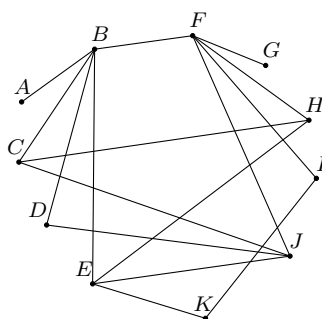
Сурагчид оройтой, найзууд ирмэгтэй граф авч үзье.

а) Орой бүрээс 1 ирмэг гарсан байвал оройн тоо тэгш байх болж зөрчилд хүрнэ.

Орой бүрээс хамгийн ихдээ 2 ирмэг гардаг гэе. Тэгвэл граф маань холбоос хэсгүүдэд хуваагдах ба аль нэг хэсэг нь сондгой тооны оройтой байна. Уг хэсэг сондгой оройтой учир дор хаяж гурван орой байгаа. Тэгвэл бүх оройгоос нь 2 ирмэг гардаг бол уг граф нь цикл байхаас өөр аргагүй болох ба 1 орой алгассан хоёр оройн зэрэг 2 болж зөрчил гарна. Иймд 1 ирмэг гарсан орой олдоно. Энэ үед граф маань зам болох ба энэ үед бодлогын нөхцлийг хангах сондгой оройтой граф бас олдохгүй.

Эндээс ядаж нэг оройгоос 3-аас багагүй тооны ирмэг гарна. Энэ үед хамгийн олон ирмэг гарсан A оройгоог авч үзье. Тэгвэл уг оройгоос n ирмэг гарсан гэвэл n нь дор хаяж гурав байгаа. Мөн уг оройгоос гарсан аливаа 2 орой нь A оройтой холбогдсон тул эдгээрээс гарсан ирмэгийн тоонууд бүгд ялгаатай бөгөөд 1-ээс багагүй бөгөөд n -ээс хэтрэхгүй учир $1, 2, 3, \dots, n$ гэсэн ирмэгүүд бүгд гарсан байна. Иймд 3 ирмэг гарсан орой олдоно.

б) 6 үед үргэлж олдох албагүй.



Ахлах ангилал

Бодлого АА-1. $2n$ оройтой олон өнцөгт бүрийн хувьд түүнийг тэнцүү тооны оройтой хоёр олон өнцөгтөд хуваадаг, уг олон өнцөгтөд бүхлээрээ багтдаг диагональ татаж чаддаг байх бүх $n \geq 2$ тоог ол.

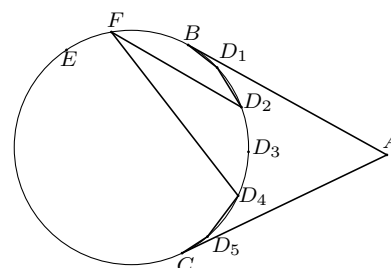
(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $n = 2$ үед дурын $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн дотор орших диагональ олдоно гэж баталхад хангалттай. Дөрвөн өнцөгт гүдгэр үед илэрхий. Хотгор үед $\angle A$ өнцгийг хурц гэвэл AC диагональ түүний дотор оршино.

Одоо $n \geq 3$ үед тийм диагоналийг агуулаагүй $2n$ өнцөгт олдоно гэж батлая. A цэгээс ω тойрогт AB, AC шүргэгчүүд татаад A цэгтэй ойр BC нум дээр дурын ялгаатай $D_1, D_2, \dots, D_{2n-3}$ цэгүүдийг энэ дарааллаар авъя. AD_{n-2} шулуун (AD_{n-1} нь гол диагональ юм) ω тойргийг дахин E цэгээр огтлодог гээд D_{n-2} цэгийг агуулаагүй BE нум дээр F цэг сонгоё. Тэгвэл

$$ABD_1D_2 \dots D_{n-2}FD_nD_{n+1} \dots D_{2n-3}C$$

олон өнцөгт тийм диагональ агуулахгүй болж батлагдана. Зургагт $n = 4$ үеийг үзүүлэв.



Бодлого AA-2. ABC гурвалжны A, C цэгүүдийг дайрсан тойрог AB, BC хэрчмүүдийг харгалзан B цэгээс ялгаатай M, K цэгүүдэд огтлолдог байв. BKM гурвалжныг багтаасан тойрог AK хэрчимтэй D цэгт огтлолцдог ба BD шулуун MK хэрчимтэй S цэгт, AC хэрчимтэй L цэгт огтлолцдог байв. AB тал дээр T цэгийг $\angle ALT = \angle CBL$ байхаар авсан бол TS шулуун AK шулуунтай параллель гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. A цэгийг дайрсан BL шулуунтай параллель шулуун TL шулууныг E цэгт, B цэгийг дайрсан TL шулуунтай параллель шулуун AE шулууныг F цэгт огтлолдог байг. $\angle BKM = \angle BAC$ ба $\angle CBL = \angle ALT$ гэдгээс $\triangle ATL \sim \triangle KSB$ төсөөтэй байна. Эндээс $\angle ETA = \angle DSK$ гэж

гарна. Мөн $AF \parallel BL$ тул $\angle EAM = \angle MBD = \angle MKD$ болно. Иймд

$$\triangle ETA \sim \triangle DSK \quad (\dagger)$$

байна. $ET \parallel FB$ учир $\triangle ETA \sim \triangle FBA$ байна. $\triangle ATL \sim \triangle KSB$ тул $(\dagger)$ -с

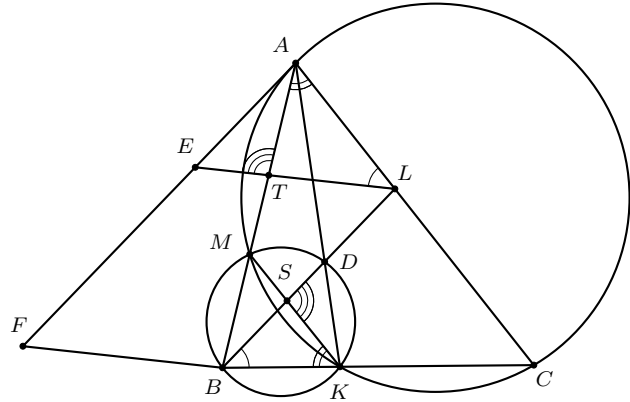
$$\triangle AEL \sim \triangle KDB \quad (\ddagger)$$

гэж мөрдөн гарна. Одоо $\frac{AT}{SD} = \frac{AB}{BD}$ гэж харуулъя. $ET \parallel FB$ тул $\frac{AT}{ET} = \frac{AB}{FB}$ болох

ба эндээс $\frac{AT}{SD} = \frac{ET}{SD} \cdot \frac{AB}{FB}$ болно. $(\dagger)$ ба $(\ddagger)$ -с

$$\frac{ET}{SD} = \frac{EL}{BD} \text{ тул } \frac{AT}{SD} = \frac{EL}{BD} \cdot \frac{AB}{FB} \text{ гэж гарах бөгөөд } EBFL \text{ параллелограмм болохыг санавал}$$

$$\frac{AT}{SD} = \frac{AB}{BD} \text{ болж батлагдав.}$$



Бодлого AA-3. Дурын натурал $k \geq 1$ тооны хувьд 7^k тоонд хуваагдах

$$1 + 2^n + 3^n$$

хэлбэрийн тоо олдоно гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт.

Зэрэг өргөх бодолт: $n = 2 \cdot 7^{k-1}$ үед $1 + 2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{7^k}$ болохыг баталъя. $3 \equiv -4 \pmod{7}$ учраас зэргийг өргөх леммээр ямар ч натурал $i \geq 1$ тооны хувьд $3^{7^{i-1}} \equiv -4^{7^{i-1}} \pmod{7^i}$ биелнэ. Иймд $3^n \equiv 4^n \pmod{7^k}$ болох тул $1 + 2^n + 4^n \equiv 0 \pmod{7^k}$ гэж үзүүлэхэд хангалттай.

$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ учраас зэргийг өргөх леммээр ямар ч натурал $i \geq 1$ тооны хувьд $2^{3 \cdot 7^{i-1}} \equiv 1 \pmod{7^i}$ биелнэ. Иймд

$$(2^n - 1)(4^n + 2^n + 1) \equiv 0 \pmod{7^k}.$$

Фермагийн бага теоремоор $2^n \equiv 2^2 \pmod{7}$ тул $2^n - 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$ болсноор бодлого бодогдов.

Хувиргалт ашигласан бодолт: $n = 3 \cdot 7^{k-1} + 1$ болог. $1 + 2^n + 3^n = 3(3^{n-1} + 1) + 2(2^{n-1} - 1)$ хэлбэрт бичье. Зэргийг өргөх леммээр $3^{n-1} + 1 \equiv 2^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{7^k}$ болохыг үзүүлснээр бодлого бодогдоно.

Бодлого АА-4. $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$ тоонуудын хувьд

$$\frac{1 - a_1 a_2 \dots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $0 \leq x, y \leq 1$ бол $x + y \leq 1 + xy$ гэдгээс

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\leq 1 + a_1 a_2 \\ a_1 a_2 + a_3 &\leq 1 + a_1 a_2 a_3 \\ &\vdots \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n &\leq 1 + a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

болох ба бүгдийг нь нэмбэл

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (n - 1) + a_1 a_2 \dots a_n$$

болно. Энд $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ба $p = a_1 a_2 \dots a_n$ гэвэл $1 + s \leq n + p$ болох ба $0 \leq p \leq 1$ тул

$$(1 - p)(1 + s) \leq (1 - p)(n + p) = n - (n - 1)p - p^2 \leq n$$

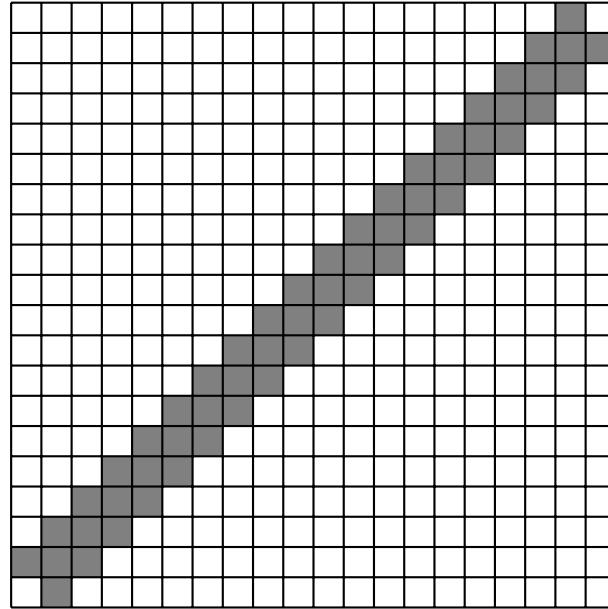
болж бодлого бодогдлоо. Тэнцэтгэл аль нэг нь 0, бусад нь 1 үед биелнэ.

Бодлого АА-5. 20×20 хүснэгтийн зарим нүдийг хар өнгөөр будахыг будалт гэе. Өгөгдсөн P будалтын хувьд хүснэгтээ хоёроос олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд шугамын дагуу хуваахад нэгээс олонгүй тооны хар нүдтэй тэгш өнцөгтийн тоо хамгийн багадаа $n(P)$ байдаг гэе. $n(P)$ тооны авч болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Төрбат)

Бодолт. $n(P) \leq 20$ гэж баталъя. 20×20 хүснэгтийн дурын 1 мөрийг авч үзье. Одоо энэ мөрөнд 0 юмуу 1 ширхэг хар нүд байвал шууд бүхэлд нь 1 тэгш өнцөгт болгоё. Харин түүнээс олон тэгш тооны хар нүдтэй бол бүх нүднүүдээ 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж чадна, эсвэл сондгой тооны хар нүдтэй бол баруун захын нүднээс баруун талын бүх нүднүүдээ 1 тэгш өнцөгт болгоод үлдсэн нүднүүдийг 2, 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж чадна. Иймд 1 мөрийг 1-ээс олонгүй хар нүдтэй тэгш өнцөгтүүдэд хувааж чадна. Нийт 20 мөр байх тул хамгийн олондоо 20 байна.

Зурагт үзүүлснээр хараар будвал бодлогын нөхцөл хангахыг баталъя. Голын диагональ дээрх хар нүднүүдэд 2, бусад хар нүднүүдэд 1 гэж бичье. Аль ч хоёр 1 гэсэн нүд хамт 1 тэгш өнцөгтөд орж чадахгүй, мөн адилаар аль ч хоёр 2 гэсэн нүд хамт 1 тэгш өнцөгтөд орж чадахгүй. Иймд 1 ба 2 гэсэн нүднүүд цугтаа нэг хүснэгтэнд орж 2 хар нүдтэй болно. Иймд 38 ширхэг 1 гэсэн нүд, 18 ширхэг 2 гэсэн нүд байгаа тул хамгийн олондоо 18 ширхэг 2 хар нүдтэй тэгш өнцөгт байна. Эндээс үлдсэн 20 ширхэг 1 гэсэн нүднүүд бүгдээрээ 1, 1-ээрээ тэгш өнцөгтөд орох тул $n(P) = 20$ байна.



Бодлого АА-6. I төвтэй ω тойргийг багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. AD, BC шулуунууд Q цэгт, харин AB, CD шулуунууд P цэгт огтлолцдог бөгөөд B цэг AP хэрчим дээр, D цэг AQ хэрчим дээр байв. PBD, QBD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан X, Y гээ. PY, QX шулуунууд R цэгт огтлолцдог бол $RI \perp BD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. ω тойрог AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан M, N, K, L цэгүүдэд шүргэх ба $T = MN \cap KL, S = BD \cap PQ$ гээ. ω тойргийн хувьд Z цэгийн поляр шулууныг ℓ_Z гэж тэмдэглэе.

Тэгвэл $T \in \ell_B$ ба $T \in \ell_D$ тул $B \in \ell_T$ ба $D \in \ell_T$ байна. Эндээс $\ell_T = BD$ буюу $IT \perp BD$ болно. Яг адил $E = NC \cap ML$ гэвэл $\ell_E = AC$ болох ба $T \in \ell_E$ тул $T \in AC$ байна. Эндээс $(QTPS)$ гармоник тул $I(QTPS)$ харандаа болно.

ω тойрог ба PBD, QBD гурвалжнуудын радиус нь r, r_1, r_2 байг. $S' = XY \cap PQ$ гэвэл IPQ гурвалжны хувьд Менелайн теоремоор $\frac{IP}{XP} \cdot \frac{XS'}{YS'} \cdot \frac{YQ}{IQ} = 1$ байна.

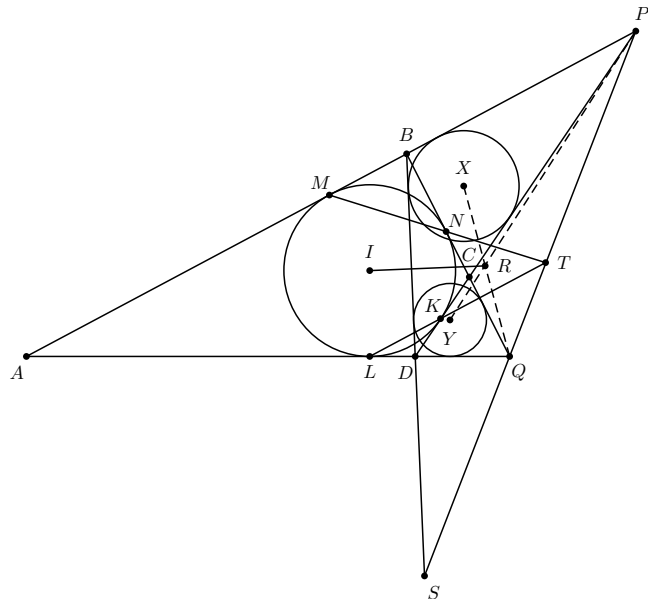
Нөгөө талаас $\frac{IP}{XP} = \frac{r}{r_1}$ ба $\frac{YQ}{IQ} = \frac{r_2}{r}$ гэд-

гээс $\frac{XS'}{YS'} = \frac{r_1}{r_2}$ болох тул $S = S'$ бол-

но. Эндээс $Z = IT \cap XY$ гэвэл $I(QTPS)$ харандаа тул $(YZXS)$ гармоник буюу

$\frac{XZ}{YZ} = \frac{r_1}{r_2}$ байна. Иймд IZ, PY, QX шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж баталхад хангалттай ба

энэ нь IPQ гурвалжны хувьд Чевийн теоремоор дээрх тэгшитгэлийг ашиглаад хялбар батлагдана.



Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. $p \geq 2$ анхны тоо ба p тоотой харилцан анхны a, b натурал тоонууд өгөгдөв. $(a^{p-1} - 1) + 55(b^{p-1} - 1)$ нийлбэр p^2 -д хуваагддаг бол $(a^{p(p-1)} - 1) + 55(b^{p(p-1)} - 1)$ нийлбэр p^3 -д хуваагдана гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $p = 2$ үед илэрхий тул $p \geq 3$ гэе. Эхлээд x нь p -тэй харилцан анхны тоо бол

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^{(p-1)k} \equiv p \pmod{p^2}$$

гэж харуулъя. Үнэхээр, Фермагийн бага теоремоор $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ тул $k \geq 1$ үед

$$x^{(p-1)k} = ((x^{p-1} - 1) + 1)^k \equiv k(x^{p-1} - 1) + 1 \pmod{p^2}$$

байна. Иймд $\sum_{k=0}^{p-1} x^{(p-1)k} \equiv \frac{p(p-1)}{2}(x^{p-1} - 1) + p \equiv p \pmod{p^2}$ болно.

Эндээс

$$\begin{aligned} & \frac{a^{p-1} - 1}{p} \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} a^{(p-1)k} \right) + 55 \times \frac{b^{p-1} - 1}{p} \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} b^{(p-1)k} \right) \\ & \equiv p \left(\frac{a^{p-1} - 1}{p} + 55 \times \frac{b^{p-1} - 1}{p} \right) \equiv 0 \pmod{p^2} \end{aligned}$$

болж бодлого бодогдов.

Нэмэлт:

$p \geq 3$ анхны тоо ба p -тэй харилцан анхны $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ бүхэл тоонуудын хувьд

$$p^{k+2} \mid b_1(a_1^{(p-1)p^k} - 1) + b_2(a_2^{(p-1)p^k} - 1) + \dots + b_n(a_n^{(p-1)p^k} - 1)$$

өгүүлбэр ямар нэг $k \geq 0$ тооны хувьд үнэн бол дурын $k \geq 0$ тооны хувьд үнэн байна.

Бодлого ДБ-2. $0 < x_0 < 1$ ба $n \geq 1$ үед

$$x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n$$

байдаг $\{x_n\}$ дарааллын хувьд $\{n(1 - x_n)\}$ дараалал зааглагдсан гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Эхлээд дурын $n \geq 0$ хувьд $0 < x_n < 1$ гэж харуулъя.

$n = 0$ үед үнэн. $n \geq 1$ гээд $0 < x_{n-1} < 1$ гэе.

$|x_n^{2n-1}| = |x_{n-1}| |\cos x_n| \leq |x_{n-1}| < 1$ гэдгээс $|x_n| < 1 < \frac{\pi}{2}$ болох ба эндээс $\cos x_n > \cos 1 > 0$ болно. Мөн $x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n > 0$ гэдгээс $x_n > 0$ болно. Иймд $0 < x_n < 1$ байна.

Одоо дурын $n \geq 1$ хувьд $x_n > x_1 \cos 1$ гэж харуулъя.

$n = 1$ үед илт. $n \geq 2$ гээд $x_{n-1} > x_1 \cos 1$ гэе. $x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n > x_1 \cos^2 1 > x_1^{2n-1} \cos^{2n-1} 1$ гэдгээс $x_n > x_1 \cos 1$ болно.

Эндээс дурын $n \geq 2$ хувьд

$$x_n^n \geq x_n^{2n-1} = x_{n-1} \cos x_n > x_1 \cos^2 1$$

болно. $n \geq 2$ гэе.

Логарифм функц ашигласан бодолт: $x > 0$ үед $1 - x < \log \frac{1}{x}$ болохыг ашиглавал

$$0 < n(1 - x_n) \leq n \log \frac{1}{x_n} < \log \frac{1}{x_1 \cos^2 1}$$

болж бодлого бодогдлоо.

Хязгаар ашигласан бодолт: $b = x_1 \cos^2 1 > 0$ гэвэл $0 < n(1 - x_n) < n(1 - b^{1/n})$ ба $n \rightarrow \infty$ үед

$$\frac{1 - b^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \rightarrow -(b^x)'_{|x=0} = -\log b$$

нийлнэ гэдгээс $n(1 - b^{1/n})$ дараалал зааглагдах болж бодлого бодогдлоо.

Шүргэгч шулуун ашигласан бодолт: $f_n(x) = x^{2n-1} - x_{n-1} \cos x$ функц давхар уламжлалтай ба

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (2n-1)x^{2n-2} + x_{n-1} \sin x \\ f''_n(x) &= (2n-1)(2n-2)x^{2n-3} + x_{n-1} \cos x \end{aligned}$$

тул $0 \leq x \leq 1$ завсар дээр $f'_n(x) > 0$ ба $f''_n(x) > 0$ байна. Иймд $0 \leq x \leq 1$ завсар дээр $f_n(x)$ функц хотгор ба x_n цэг дээрх $f_n(x)$ функцийн графикийн шүргэгч шулуун $x = 1$ шулууныг $f_n(1)$ -ээс доогуур огтлоно гэдгээс

$$f'_n(x_n)(1 - x_n) \leq 1 - x_{n-1} \cos 1 < 1$$

болно. Одоо

$$f'_n(x_n) = (2n-1)x_n^{2n-2} + x_{n-1} \sin x_n > nx_n^{2n-1} > nx_1 \cos^2 1$$

болохыг ашиглавал

$$0 < n(1 - x_n) < \frac{1}{x_1 \cos^2 1}$$

болж бодлого бодогдоно.

Нэмэлт: $n \geq 1$ хувьд $f_n(x) = x^{2n-1} - x_{n-1} \cos x$ гэе.

- (i) $0 \leq x \leq 1$ завсар дээр $f_n(x)$ функц тасралтгүй бөгөөд $f_n(0) = -x_{n-1} < 0$ ба $f_n(1) = 1 - x_{n-1} \cos 1 > 0$ тул завсрын утгын теоремоор $f_n(x_n) = 0$ байх $0 < x_n < 1$ оршин байна. $0 < x < 1$ завсар дээр $f_n(x)$ функц эрс өсөх тул ийм x_n цор ганц байна. Өөрөөр хэлбэл $0 < x_0 < 1$ өгөгдөхөд бодлогын нөхцөл хангах $\{x_n\}$ дараалал нэг утгатай оршин байна.

- (ii) $x_0 > x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots$ байна. Илт $x_1 < x_0$ тул $n \geq 2$ гэе. $0 < x_{n-2}, x_{n-1} < 1$ гэдгээс

$$\begin{aligned} f_n(x_{n-1}) &= x_{n-1}^{2n-1} - x_{n-1} \cos x_{n-1} \\ &= x_{n-1}^2 x_{n-2} \cos x_{n-1} - x_{n-1} \cos x_{n-1} \\ &= (x_{n-1} x_{n-2} - 1) x_{n-1} \cos x_{n-1} \\ &< 0 = f_n(x_n) \end{aligned}$$

болох ба эндээс $x_{n-1} < x_n$ болно. Тухайлбал $n \geq 1$ үед $x_n \geq x_1$ ба $x_n^{2n-1} > x_1 \cos 1$ байна.

(iii) $0 < x < 1$ үед Бернулийн тэнцэтгэл бишээс $(1 - x)^N \geq 1 - Nx$ болохыг ашиглавал

$$x_{n-1} \cos x_n = x_n^{2n-1} \geq 1 - (2n - 1)(1 - x_n) > 1 - 2n(1 - x_n)$$

болох ба $x_n > x_1 \cos 1$ тул

$$n(1 - x_n) > \frac{1 - x_{n-1} \cos x_n}{2} \geq \frac{1 - \cos(x_1 \cos 1)}{2} > 0$$

болох нь мөрдөнө.

(iv) $b = x_1 \cos^2 1$ гэвэл $b^{1/n} \leq x_n < 1$ гэдгээс $n \rightarrow \infty$ үед $x_n \rightarrow 1$ нийлнэ. Одоо $x > -1$ үед $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ болохыг ашиглавал

$$\frac{x_n - 1}{x_n} \leq \log x_n \leq x_n - 1$$

болох ба эндээс

$$x_n \frac{n}{2n-1} \log \frac{1}{x_{n-1} \cos x_n} \leq n(1 - x_n) \leq \frac{n}{2n-1} \log \frac{1}{x_{n-1} \cos x_n}$$

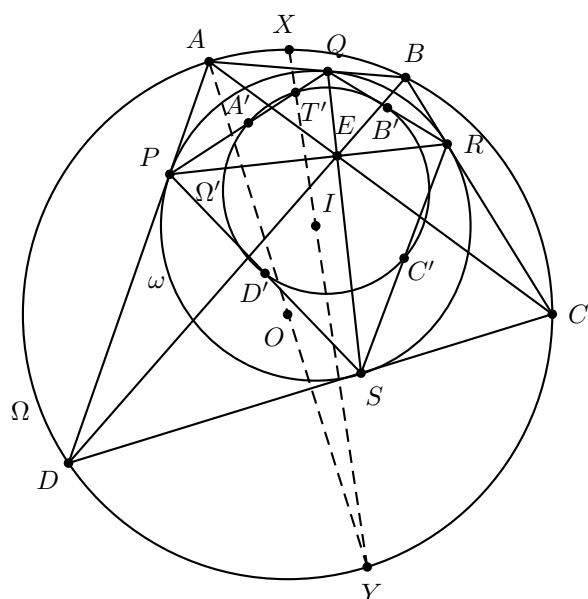
болох тул $n \rightarrow \infty$ үед $n(1 - x_n) \rightarrow \frac{1}{2} \log \frac{1}{\cos 1}$ нийлнэ.

Бодлого ДБ-3. I төвтэй ω тойргийг багтаасан, O төвтэй Ω тойрогт багтсан $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диаголиуд E цэгт огтлолцоно. ω тойрог AD , AB талуудыг харгалзан P , Q цэгүүдэд шүргэх ба E цэгээс PQ шулуунд буулгасан перпендикулярын суурь T бол AO ба IT шулуунууд Ω тойрог дээр огтлолцоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. ω тойрог BC , CD шулуунуудыг R , S цэгүүдэд шүргэх ба PQ , QR , RS , SP хэрчмүүдийн дундаж цэгүүдийг A' , B' , C' , D' гэе. Тэгвэл ω тойргийн хувьд инверсээр A , B , C , D цэгүүдийн дүрүүд A' , B' , C' , D' байна. Ньютоны теоремоор PR , QS шулуунууд E цэгт огтлолцоно. A , B , C , D цэгүүд Ω дээр орших тул A' , B' , C' , D' цэгүүд нэг тойрог дээр орших ба энэ тойргийг Ω' гэе. Нөгөө талаас $A'B' \parallel QS \parallel C'D'$ ба $B'C' \parallel PR \parallel A'D'$ гэдгээс тойрогт багтсан $A'B'C'D'$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм болох тул $A'B'C'D'$ тэгш өнцөгт болно. $T' = EC' \cap PQ$ гэвэл $\angle T'EQ = \angle C'ES = \angle C'SE = \angle RPQ = 90^\circ - \angle T'QE$ тул $\angle QT'E = 90^\circ$ буюу $T = T'$ байна. Эндээс $\angle A'TC' = 90^\circ = \angle A'B'C'$ тул T цэг нь Ω' тойрог дээр оршино.

Одоо TI шулуун Ω тойргийг X , Y цэгүүдэд огтлолдог гэе. Энд A , X цэгүүд BD шулууны нэг талд оршино. Тэгвэл T цэгийн дүр нь X болох тул A , A' , T , X цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $\angle AXI = \angle TA'I = 90^\circ$ гэдгээс AY нь Ω тойргийн диаметр болж батлагдана.



Бодлого ДБ-4. $a_1^2 + \dots + a_n^2$ нийлбэр $(a_1 + \dots + a_n)^2 - 1$ тоог хуваадаг байх $a_1, \dots, a_n$ натурал тоонууд олддог чанартай хамгийн бага натурал $n \geq 2$ тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. **Хариу:** $n = 9$

$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ нийлбэр тэгш бол $S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ нийлбэр тэгш боловч $A^2 - 1$ илэрхийллийн утга сондгой тул зөрчил үүснэ. Иймд A ба S тоонууд хоёул сондгой тоо болно. Сондгой тооны квадрат 8-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгөх ба $(8, S) = 1$ тул $A^2 - 1$ тоо $8S$ тоонд хуваагдана. Эндээс зэрэгт дунджийн тэнцэтгэл бишээр

$$A^2 > A^2 - 1 \geq 8S \geq 8 \frac{A^2}{n}$$

тул $n > 8$ болно. Эндээс $n \geq 9$ болох ба $n = 9$ үед дараах 2 байгуулалт бодлогын нөхцөл хангана.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 1, a_8 = a_9 = 2$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 2$$

Бодлого ДБ-5. Огторгуйд өгөгдсөн тэг биш 7 векторуос хоорондох өнцөг нь хурц байх хоёр вектор сонгож чадна гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. Огторгуйн v, w векторууд хоорондоо хурц өнцөг үүсгэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь тэдний скаляр үржвэр $\langle v, w \rangle > 0$ байх нь илт. Хавтгайд мөн ижил.

Өгөгдсөн векторуудээ $v_1, \dots, v_7$ гэж тэмдэглэе. Эдгээр векторууд дотор эерэг параллель, өөрөөр хэлбэл, $\lambda > 0$ ба $v_i = \lambda v_j$, ($i \neq j$) байх векторууд олддог бол $\langle v_i, v_j \rangle = \lambda \langle v_j, v_j \rangle > 0$ болж бодлого бодогдоно.

Иймд эерэг параллель векторууд олддоггүй гэе. $v_7 = (0, 0, -1)$ байхаар координатын систем сонгоод $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, ($1 \leq i \leq 6$) гэе. Ямар нэг $1 \leq i \leq 6$ хувьд $\langle v_i, v_7 \rangle > 0$ бол бодлого бодогдох тул бүх $1 \leq i \leq 6$ хувьд $-z_i = \langle v_i, v_7 \rangle \leq 0$ буюу $z_i \geq 0$ гэе.

Одоо $u_i = (x_i, y_i)$, ($1 \leq i \leq 6$) гэж тэмдэглэе. $v_1, \dots, v_6$ векторууд дотор v_7 -той сөрөг параллель вектор хамгийн олондоо нэг байна (үгүй бол хоорондоо эерэг параллель хоёр вектор олдох болно). Эндээс $u_1, \dots, u_6$ векторууд ядаж тав нь тэгээс ялгаатай хавтгайн векторууд болох тул хоорондоо хурц өнцөг үүсгэх хоёр вектор олдоно. u_i, u_j векторуудын хоорондох өнцөг хурц бол $\langle u_i, u_j \rangle > 0$ гэдгээс $\langle v_i, v_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle + z_i z_j > 0$ болж бодлого бодогдоно.

Нэмэлт:

n хэмжээст Евклидийн огторгуйд тэг биш $2n + 1$ вектор авахад хоорондох өнцөг нь хурц байх хоёр вектор олдоно.

Бодлого ДБ-6. Сондгой тоо k ба бүхэл коэффициенттэй k зэргийн $Q(X)$ олон гишүүнт өгөгдөв. Дурын бүхэл n тооны хувьд $P(n) = Q(n)$ байх бүхэл m тоо олддог чанартай бүх бодит коэффициенттэй k зэргийн $P(X)$ олон гишүүнтийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $P(X) = Q(aX + b)$, энд a, b бүхэл

Дээрх хариу бодлогын нөхцөл хангах нь илт тул өөр хариугүй гэж харуулъя. $P(X)$ олон гишүүнт бодлогын нөхцөл хангадаг гэе. $P(X), Q(X)$ олон гишүүнтийн ахлах гишүүний коэффициент a_k, b_k эерэг гэж үзэхэд явцуурах зүйлгүй.

Эхлээд дараах чанартай $a > 0, b$ бодит, $c > 0$ болон $N > 0$ тоонууд олдохыг харуулъя.

$$x \geq N \text{ ба } P(x) = Q(y) \text{ бол } |y - (ax + b)| \leq \frac{c}{x} \text{ байна.} \quad (\dagger)$$

$R(X) = P(X) - Q(aX + b)$ нь $\leq k - 2$ зэргийн олон гишүүнт байх $a > 0, b$ бодит тоон хос цор ганц олдоно. $P(x) = Q(y)$ гэе. Энэ үед $Q(y) - Q(ax + b) = P(x) - Q(ax + b) = R(x)$ тул $C > 0$ тоо $x \geq 1$ бол $|Q(y) - Q(ax + b)| \leq Cx^{k-2}$ байхаар олдоно.

$Q(Y) - Q(X) = (Y - X)S(X, Y)$ гэе, энд $S(X, Y) = b_k(X^{k-1} + X^{k-2}Y + \dots + Y^{k-1}) + T(X, Y)$ ба $T(X, Y)$ нь $\leq k - 2$ зэргийн олон гишүүнт байна. Одоо дараах нөхцөл хангах $D > 0$ ба $N > 0$ тоо олдохыг харуулахад хангалттай.

$$x \geq N \text{ ба } P(x) = Q(y) \text{ бол } |S(y, ax + b)| \geq Dx^{k-1} \text{ байна.} \quad (\ddagger)$$

$0 < \mu$ тоог $a_k < b_k \mu^k$ байхаар сонгоё. Дараах чанартай $N_1 > 0$ ба $N_2 > -\frac{b}{a}$ тоонууд олдох нь илт.

(i) $[N_1, +\infty)$ завсар дээр $Q(x)$ эрс өсөх.

(ii) $[N_2, +\infty)$ завсар дээр $\max\{Q(y) \mid y \leq N_1\} + 1 \leq P(x) \leq Q(\mu x)$.

$x \geq N_2$ ба $P(x) = Q(y)$ гэе. Энэ үед $ax + b \geq aN_2 + b > 0$ ба $y \geq N_1 > 0$ байна.

Мөн $y \geq N_1$ ба $Q(y) \leq Q(\mu x)$ гэдгээс $y \leq \mu x$ байна. Эндээс $E > 0$ тоо $T(y, ax + b) \leq Ex^{k-2}$ байхаар олдоно. Иймд $0 < D < b_k a^k$ байхаар авбал $(\ddagger)$ хангах $N \geq N_2$ тоо олдох нь илт. Иймд $(\dagger)$ батлагдлаа.

Бодит r тооны хувьд $\{r\} = \min\{|r - n| \mid n \text{ бүхэл}\}$ гэж тодорхойлбол $\{-r\} = \{r\}$ ба $\{r + s\} \leq \{r\} + \{s\}$ болох нь илт. Иймд $n \geq N$ натурал тооны хувьд $P(n) = Q(m)$ гэвэл

$$\{an + b\} \leq |m - (an + b)| \leq \frac{c}{n}$$

болно. Эхлээд $\{b\} > 0$ гэе. Энэ үед $\{an\} \leq \frac{\{b\}}{2}$ байх n төгсгөлгүй олон олдох тул ийм хангалттай том n тоог авахад $\frac{c}{n} \geq \{an + b\} \geq \{b\} - \{an\} \geq \frac{\{b\}}{2}$ гэж зөрчил гарна. Иймд $\{b\} = 0$ буюу b бүхэл. a иррационал үед $\{an\} > 0.1$ байх n төгсгөлгүй олон олдох ба энэ нь зөрчил. a бүхэл биш рационал үед мөн ижлээр зөрчил гарах нь илт. Иймд a бүхэл. Эцэст нь $m - (an + b)$ бүхэл ба

$$|m - (an + b)| \leq \frac{c}{n}$$

гэдгээс $n > |c|$ үед $m = an + b$ буюу $P(n) = Q(an + b)$ байна. Эндээс $R(X)$ олон гишүүнт хязгааргүй олон язгууртай болох тул $R(X) = 0$ өөрөөр хэлбэл $P(X) = Q(aX + b)$ байна.

Олон Улсын Математикийн 60-р Олимпиад

Олон Улсын Математикийн Олимпиад 2019

Олон Улсын Математикийн 60-р олимпиад 2019 оны 07 сарын 11-22-ны өдрүүдэд Их Британи Умард Ирландын нэгдсэн вант улсын Батт хотод боллоо. Энэ удаагийн олимпиадад 116 орны нийт 621 сурагч оролцов. Монгол улсыг төлөөлөн

MNG1	Э. Эрдэнэбилэг	Нийслэлийн 11 дүгээр сургууль
MNG2	О. Мишээл	Шинэ Монгол сургууль
MNG3	А. Пүрэвзаяа	Олонлог сургууль
MNG4	М. Өнөболд	Нийслэлийн 1 дүгээр сургууль
MNG5	Б. Батмэнд	Нийслэлийн 1 дүгээр сургууль
MNG6	Б. Долгормаа	Олонлог сургууль

болон Др. Г. Баярмагнай (ахлагч), Др. Б. Батзаяа (дэд ахлагч), Др. Ү. Отгонбаяр (А ажиглагч), Д. Алтангэрэл (Шинэ Монгол, С ажиглагч), Б. Бат-Эрдэнэ (УБ-1, С ажиглагч), Ж. Баянбат (УБ-1, С ажиглагч), Г. Номин (ММОХ, С ажиглагч) нар оролцлоо.

Манай улсын баг ОУМО-60-д оролцсон 116 багаас 141 оноогоор 26 дугаар байранд орсон ба хувийн дүнгээр

- М. Өнөболд 32 оноогоор Алтан медаль,
- Э. Эрдэнэбилэг 28 оноогоор Мөнгөн медаль,
- О. Мишээл 23 оноогоор Хүрэл медаль,
- Б. Долгормаа 23 оноогоор Хүрэл медаль,
- Б. Батмэнд 21 оноогоор Хүрэл медаль,
- А. Пүрэвзаяа 14 оноо авч тусгай шагнал

хүртсэн.

2017 онд Бразил улсад явагдсан ОУМО-58-аас эхлэн Филдсийн шагналт математикч Мэриэм Мирзаканигийн нэрэмжит тусгай шагналыг тивээсээ хамгийн өндөр амжилт гаргасан 5 эмэгтэй оролцогчдод олгодог болсон. ОУМО-60-ын М. Мирзаканигийн нэрэмжит тусгай шагналыг Ази тивийг төлөөлөн Б. Долгормаа хүртэв.

ОУМО-60-д оролцоход бүхий л талын туслалцаа үзүүлж хамтарч ажилласан БСШУСЯ, ММОХ, Космо группийн хамт олонд талархал илэрхийлье.

Бодлогууд

Олон Улсын Математикийн 60-р Олимпиадын бодлогуудыг зарим бодолтын хамт толилуулж байна.

Бодлого 1. Бүхэл тоон олонлогийг $\mathbb{Z}$ гэж тэмдэглэе. Дурын бүхэл a, b тоонуудын хувьд

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

байх бүх $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ функцийг ол.

Бодолт. $a \rightarrow 0, b \rightarrow n$ гэвэл

$$f(0) + 2f(n) = f(f(n))$$

$a \rightarrow 1, b \rightarrow n - 1$ гэвэл

$$f(2) + 2f(n - 1) = f(f(n))$$

болно. Эндээс

$$f(n) = f(n - 1) + \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

болно. Эндээс $f(n) = f(0) + \frac{f(2) - f(0)}{2} \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ буюу $f(n) = pn + q, p = \frac{f(2) - f(0)}{2}, q = f(0)$

болно. Үүнийг анхны тэгшитгэлд орлуулбал дурын бүхэл a, b тоонуудын хувьд

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)) \Leftrightarrow$$

$$2pa + q + 2(pb + q) = p(p(a + b) + q) + q \Leftrightarrow$$

$$2p(a + b) + 3q = p^2(a + b) + pq + q$$

биелэнэ. Эндээс $p = 0$ эсвэл $p = 2$ гэж гарах ба $p = 0$ үед $q = 0$ ба $p = 2$ үед q нь дурын бүхэл тоо байж болно. Иймд

$$f(x) = 0 \quad \text{эсвэл} \quad f(x) = 2x + q, \quad q \in \mathbb{Z}$$

гэсэн шийдүүдтэй.

Бодлого 2. ABC гурвалжны BC тал дээр A_1 цэг, AC тал дээр B_1 цэг байрлана. AA_1 хэрчим дээрх P цэг ба BB_1 хэрчим дээрх Q цэгийн хувьд PQ нь AB шулуунтай параллель болог. PB_1 шулуун дээрх P_1 цэгийн хувьд B_1 цэг P, P_1 цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд $\angle PP_1C = \angle BAC$ байдаг гэе. Мөн ижлээр, QA_1 шулуун дээрх Q_1 цэгийн хувьд A_1 цэг Q, Q_1 цэгүүдийн хооронд эдгээртэй давхцахгүйгээр байрлах бөгөөд $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ байдаг гэе.

P, Q, P_1, Q_1 цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Бодлого 3. Нийт 2019 хэрэглэгчтэй нэгэн социал сүлжээний зарим хэрэглэгчид нь найзууд байв. Сүлжээнд A хэрэглэгч B хэрэглэгчтэй найз бол B хэрэглэгч A хэрэглэгчтэй найз байдаг. Дараах үйл явдал давтагдан, хоёр үйл явдал нэгэн зэрэг биш, явагдах боломжтой:

A нь B, C -тэй хоёулантай нь найз, харин B, C хоорондоо найз биш байдаг A, B, C гурван хэрэглэгч найзлалтын төлөвөө B, C хоорондоо найз, харин A нь B -тэй ч найз биш, C -тэй ч найз биш байхаар өөрчилнө. Бусад найзлалтын төлөвт өөрчлөлт орохгүй.

Анх 1010 хэрэглэгч нь тус бүр 1009 найзтай ба 1009 хэрэглэгч нь тус бүр 1010 найзтай байв. Бүх хэрэглэгч нэгээс олонгүй найзтай үлдэх үйл явдлын дараалал олдохыг батал.

Бодлого 4. Дараах нөхцөлийг хангах бүх (k, n) эерэг бүхэл тоон хосыг ол.

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1}).$$

Бодолт. N бүхэл тооны анхны тоон задаргаан дахь p анхны тооны зэргийг $v_p(N)$ гэе. $L_n = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \cdots (2^n - 2^{n-1})$ гэж тэмдэглээд ямар нэг k бүхэл тооны хувьд $L_n = k!$ байдаг гэе. Лежандрин томъёоноос $v_2(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor n/2^i \rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} k/2^i = k$ болох тул

$$k > v_2(k!) = v_2(L_n) = v_2(2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}) = n(n-1)/2$$

тэнцэл биш биелнэ. Зэргийг өргөх леммээр

$$v_3(2^k - 1) = \begin{cases} 0 & k\text{-сондгой} \\ 1 + v_3(k) & k\text{-тэгш} \end{cases}$$

байх учраас

$$v_3(L_n) = \sum_{i \leq n/2} (1 + v_3(2i)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + v_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right) \leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{3^i} < \frac{3}{4}n$$

байна. Түүнчлэн $k \geq 9$ үед $k/3 \leq v_3(k!)$ байх тул (1) ба (2)-оос $n(n-1)/2 < k < 9n/4$ болно. Иймд, $k \leq 8$ үед (1)-ийг мөн ашиглавал, k -аас үл хамааран $n \leq 5$ болно.

$L_1 = 1, L_2 = 3!, 5! < L_3 < 6!, 7! < L_4 < 8!, 10! < L_5 < 11!$ байх учраас $(n, k) = (1, 1)$ эсвэл $(3, 2)$ гэсэн 2 шийдтэй.

Нэмэлт: Энэ бодлого нь бүлгийн онолын нэгэн сонирхолтой асуултад хариулт өгдөг. Тодруулбал, 2 элементтэй талбар дээрх урвуутай $n \times n$ матрицуудын $GL_n(\mathbb{F}_2)$ бүлгийн эрэмбэ L_n байдаг бол S_k орлуулгын бүлгийн эрэмбэ $k!$ байдаг. Дээрх бодлогын хариунаас зөвхөн $(n, k) = (1, 1)$ эсвэл $(3, 2)$ үед л энэ 2 бүлэг изоморф байх боломжтой гэж мөрдөн гарна. Үнэндээ, энэ 2 тохиолдолд бүлгийн изоморфизм оршин байдаг. Өөрөөр хэлбэл, $GL_1(\mathbb{F}_2) \cong S_1$ ба $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ изоморфизм биелдэг.

Бодлого 5. Батт Банкнаас гаргадаг зоос нэг талдаа H , нөгөө талдаа T үсэгтэй. Номин зүүнээс баруун тийш жагсаасан n ширхэг зоостой. Тэр дараах үйлдлийг давтан хийдэг: хэрэв яг $k > 0$ ширхэг зоосны H тал нь дээшээ харсан бол зүүн талаасаа тоолоод k дахь зоосыг эргүүлнэ; үгүй бол бүх зоосны T тал нь дээшээ харсан бөгөөд Номин үйлдэл хийхээ зогсоно. Жишээлбэл, $n = 3$ үед анх THT байрлалаас эхлэхэд $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$ гээд гурван үйлдлийн дараа зогсоно.

- (i) Ямар ч байрлалаас эхэлсэн, Номин төгсгөлөг алхмын дараа зогсохыг батал.
- (ii) Анх C байрлалаас эхлэхэд зогсох хүртэл хийгдэх үйлдлийн тоог $L(C)$ гэе. Жишээлбэл, $L(THT) = 3$ ба $L(TTT) = 0$ байна. C нь бүх боломжит 2^n байрлалаар гүйх үеийн $L(C)$ тоонуудын арифметик дунджийг ол.

Бодлого 6. $AB \neq AC$ байдаг хурц өнцөгт ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй ω тойрог BC, CA, AB талуудыг, харгалзан, D, E, F цэгүүдэд шүргэнэ. D цэгийг дайрсан EF шулуунд перпендикуляр шулуун ω тойргийг дахин R цэгт огтлоно. AR шулуун ω тойргийг дахин P цэгт огтлоно. PCE, PBF гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд дахин Q цэгт огтлолцоно.

DI ба PQ шулуунууд A цэгийг дайрсан AI шулуунтай перпендикуляр шулуун дээр огтлолцохыг батал.