

Гарчиг

Олон Улсын Математикийн 59-р Олимпиад	1
Монголын баг	1
Бодлогууд	3
Бодолтууд	4
Европын охидын математикийн олимпиад	11
Монголын баг	11
Бодлогууд	12
Бодолтууд	14
Бүсийн математикийн олимпиад	19
Бодлогууд	19
Монголын Математикийн 54-р Олимпиадын II Даваа	25
Бодлогууд	25
Бодолтууд	31
Монголын Математикийн 54-р Олимпиадын III Даваа	53
Улсын Математикийн 54-р Олимпиадын дүнгийн тайлан	53
Бодлогууд	58
Бодолтууд	63
Синусын теоремын олимпиадын геометр дэхь хэрэглээ	81
Синусын теорем	81
Дасгалууд	83
Заавар	85

Олон Улсын Математикийн 59-р Олимпиад

Монголын баг

Зохион байгуулалт

Олон улсын математикийн 59-р олимпиад 2018 оны 7 дугаар сарын 4-14 өдрүүдэд Румын улсын Клуж-Напока хотод зохион байгуулагдлаа. Олон улсын математикийн олимпиадыг анхлан санаачилж эхлүүлсэн Румын улс энэ удаагийн олимпиадад өндөр ач холбогдол өгч байгаа нь нээлт, хаалт болон бусад үйл ажиллагаанаас тодорхой харагдаж байлаа.

Олимпиадын нээлтийн үйл ажиллагаанд тус улсын ерөнхийлөгч хүрэлцэн ирж оролцсон бөгөөд дэд ерөнхий сайд болон боловсролын сайд, Румын улсын математикийн нийгэмлэг, Клуж-Напока хотын захиргаа ОУМО-59-ыг амжилттай зохион байгуулахад онцгой анхаарал хандуулсан байна.

Амжилт

Энэ жилийн олимпиадад 107 орны нийт 594 сурагч оролцов. Монгол улсыг төлөөлөн оролцсон багийн бүх гишүүд бүгд медаль хүртэж багийн дүнгээр Бразил болон Энэтхэгийн багуудтай ижил 132 оноо авч 28 дугаар байранд орсон юм.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
М.Лханаажав	Олонлог сургууль	28	Мөнгөн медаль
М.Өнөболд	УБ, 1-р сургууль	23	Хүрэл медаль
Б.Төрбат	Орчлон сургууль	23	Хүрэл медаль
Х.Санжаахүү	Хөвсгөл	22	Хүрэл медаль
М.Мишээл	Шинэ Монгол сургууль	19	Хүрэл медаль
Б.Батмэнд	УБ, 1-р сургууль	17	Хүрэл медаль

Сорил

Олон Улсын Математикийн 59-р Олимпиадад Монгол улсыг төлөөлөн оролцох сурагчдыг сонгон шалгаруулах сорил 2018 оны 2-5 сард орон даяар хоёр үе шаттайгаар явагдаж дүнгээ гаргасан. I шатнаас шалгарсан сурагчид II шатны уламжлалт хэлбэрээр явагдсан 3 удаагийн сорилд (сорил бүр дараалсан 2 өдөр) оролцож өрсөлдсөн. II шатны 3 дахь сорил болох улсын математикийн 54-р олимпиадын XII ангийн ангиллын дүнг нэгтгэснээр шилдэг 6 сурагч ОУМО-59-д оролцохоор шалгарсан. Оролцогчдыг сонгон шалгаруулах сорилуудыг Др. Г.Баярмагнай (МУИС), Др. Ү.Отгонбаяр (МХ¹), Др. Д.Даянцолмон (МУИС) нар зохион байгуулж хариуцан ажиллаа.

¹МУИС-ийн Математикийн хүрээлэн

Бэлтгэл

ОУМО-59-д оролцох сурагчдын бэлтгэл 5 сарын 28-наас 7 сарын 5-ны хооронд явагдаж Др. Г.Баярмагнай, Др. Ү.Отгонбаяр, Др. Б.Батцэнгэл (ММОХ), Др. Г.Батзаяа (МХ) болон Др. У.Батзориг (МХ) нар хичээл зааж багийн бэлтгэлийг хангалаа. Сурагчдыг бэлтгэхдээ ОУМО-ын өмнөх онуудын шилэгдсэн бодлогууд (shortlist), ЕОМО-ын (Европийн охидын математикийн олимпиад) бодлогууд дээр анализ хийх, мөн ОУМО-д амжилттай оролцдог орнуудын шилдэг бодлогууд дээр тулгуурлан бэлтгэсэн бие даалтын материал дээр сурагчдыг ажиллуулахын зэрэгцээ тогтмол хугацаанд “Mock exam” авах, ОУМО-ын A1, B1 түвшний бодлогууд дээр ажиллах, өмнөх онуудын ОУМО-ын бодлогуудын “marking scheme” (оноо тавих аргачлал)-тэй танилцаж оноо цуглуулах зэрэгт анхаарч ажиллав.

Зардал

ОУМО-59-д оролцох 2 багш, 6 сурагчийн бүрэлдэхүүнтэй багийн замын зардлыг БСШУСЯ санхүүжүүлдэг. Энэ жил яамнаас хуваарилсан төсөв хүрэлцэлгүй 1,111,050 төгрөг дутсаныг ММОХ санхүүжүүлсэн. Мөн ММОХ-ноос багын ахлагч, дэд ахлагч ба сурагчдын зам хоногийн зардалд нийт 1,300,000 төгрөг олгов. Улсын математикийн 54-р олимпиадын Англи гарын авлага бэлтгэх зардалд ММОХ 900.000 төгрөг, МУИС-ШУС 250.000 төгрөгний дэмжлэг үзүүлээ. Гарын авлага бэлтгэх ажлыг Др. Г.Баярмагнай, Др. Ү.Отгонбаяр болон Др. Б.Батзориг нар гүйцэтгэлээ.

Багийн гишүүдийн визийг богино хугацаанд шийдвэрлэхэд дэмжлэг үзүүлж ММОХ-той хамтарч ажилласан Румын улсын өргөмжит консул Ө.Одонсүрэнд багийн нийт гишүүдийн өмнөөс талархал илэрхийлэе.

ОУМО-59-д дэвшигдсэн бодлого

Энэ жилийн олимпиадад 40 гаран орны 170 орчим бодлого дэвшигдсэнээс манай улсаас дэвшүүлсэн хоёр бодлого (геометр, тооны онол) “IMO-59 Shortlist”-д шилэгдэн орсон ба улмаар нэг бодлого (тооны онол) нь олимпиадад (2 өдрийн 2-р бодлого) сонгогдсон сайхан амжилт гарлаа. Геометрийн ангилалд манай улсаас анх удаа бодлого шилэгдэн орсон, мөн олимпиадад тавигдсан тооны онолын бодлого нь бүх орны ахлагч нарын дунд явуулсан санал асуулгаар тул олимпиадад дэвшсэн “хамгийн ганган” бодлогоор шалгарсаныг онцлон дурдах нь зүйтэй болов уу.

Эдгээр амжилт нь манай багш нарын улсын олимпиадаа зориулан зохиож буй бодлогын чанар, чансаа олон улсын түвшинд байгааг нотолсон нотолгоо гэж бид үзэж байна.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Др. Г.Баярмагнай

Бодлогууд

Бодлого 1. Γ тойрогт багтсан хурц өнцөгт ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр D ба E цэгүүдийг $AD = AE$ байхаар авав. BD ба CE хэрчмүүдийн дундаж цэгт татсан перпендикулярууд Γ тойргийн AB ба AC богино нумуудыг харгалзан F ба G цэгүүдэд огтолдог. DE ба FG шулуунууд параллель гэдгийг батал.

Бодлого 2. $a_{n+1} = a_1$ ба $a_{n+2} = a_2$ байх бөгөөд $i = 1, 2, \dots, n$ утгуудад

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

биелдэг бодит $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ тоонууд оршин байдаг бүх бүхэл $n \geq 3$ тоог ол.

Бодлого 3. Хамгийн доод талын мөрөөс бусад мөрөнд бичигдсэн тоо бүр түүний доор бичигдсэн 2 тооны ялгаврын модультай тэнцүү байхаар зөв гурвалжин хэлбэртэй бичигдсэн тоонуудын бүрдлийг Паскалийн хасах гурвалжин гэе. Жишээлбэл, 1-ээс 10 хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 4 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин:

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Тэгвэл 1-ээс $1 + 2 + \dots + 2018$ хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 2018 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин оршин байх уу?

Бодлого 4. x ба y нь 20-оос хэтрэхгүй эерэг бүхэл тоо байх хавтгайн (x, y) цэг бүрийг толбо гэе.

Анх эдгээр 400 толбоны аль ч толбон дээр чулуу байгаагүй. Бат, Цэцэг хоёр ээлжлэн өөрийн чулууг толбон дээр байрлуулах бөгөөд Цэцэг эхэлнэ. Цэцэг улаан чулуутай аль ч 2 толбоны хоорондох зай $\sqrt{5}$ -тай тэнцэхгүй байхаар чулуугүй толбон дээр улаан чулуу байрлуулна. Бат өөрийн ээлжид чулуугүй толбон дээр хөх чулуу байрлуулна (хөх чулуутай толбо чулуутай өөр бусад толбоноос ямар ч зайд байж болно). Хэн нэг нь үйлдэл хийх боломжгүй болсон үед тэд зогсоно.

Бат хөх чулуунуудаа хаана байрлуулснаас үл хамааран Цэцэг дор хаяад K ширхэг улаан чулууг байрлуулж чаддаг байх хамгийн их K тоог ол.

Бодлого 5. Эерэг бүхэл тоон $a_1, a_2, \dots$ төгсгөлгүй дараалал өгөгдөв. Хэрэв $n \geq N$ бүрийн хувьд

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

нийлбэр бүхэл байх $N > 1$ дугаар олддог бол $m \geq M$ бүрийн хувьд $a_m = a_{m+1}$ байх M дугаар олдоно гэж батал.

Бодлого 6. $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ адилтгал биелэх $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт дотор

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ба} \quad \angle XBC = \angle XDA$$

байх X цэг авав. $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ болохыг үзүүл.

Бодолтууд

Бодлого 1. Γ тойрогт багтсан хурц өнцөгт ABC гурвалжны AB ба AC талууд дээр D ба E цэгүүдийг $AD = AE$ байхаар авав. BD ба CE хэрчмүүдийн дундаж цэгт татсан перпендикулярууд Γ тойргийн AB ба AC богино нумуудыг харгалзан F ба G цэгүүдэд огтолдог. DE ба FG шулуунууд параллель гэдгийг батал.

Бодолт. $\widehat{BC}$ -ын дундаж цэгийг P гэвэл AP нь $\angle BAC$ -ийн биссектрисс болох ба ADE адил хажуут гурвалжин гэдгээс $AP \perp DE$ болно. Иймд $AP \perp FG$ гэж батлахад хангалттай.

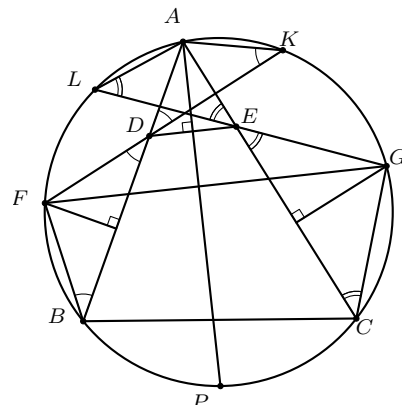
FD шулууны Γ тойргийг огтлох хоёр дах цэгийг K гэе. FBD адил хажуут гурвалжин учраас

$$\angle AKF = \angle ABF = \angle FDB = \angle ADK$$

гэж гарна. Эндээс $AK = AD$ болов. Яг адилаар, CE шулууны Γ тойргийг огтлох хоёр дах цэгийг L гэвэл $AL = AE$ болно. ADE адил хажуут гурвалжин гэдгийг санавал $AK = AL$ болно.

$\angle FBD = \angle FDB$ гэдгээс $\widehat{AF} = \widehat{BF} + \widehat{AK}$ болох ба эндээс $\widehat{BF} = \widehat{LF}$ гэж гарна. Адилаар, $\widehat{CG} = \widehat{CK}$ гэж гарна. Эндээс

$$\begin{aligned} \angle(AP, FG) &= \frac{\widehat{AF} + \widehat{PG}}{2} \\ &= \frac{\widehat{AL} + \widehat{LF} + \widehat{PC} + \widehat{CG}}{2} \\ &= \frac{\widehat{KL} + \widehat{LB} + \widehat{BC} + \widehat{CK}}{2} \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$



болж батлагдав.

Бодлого 2. $a_{n+1} = a_1$ ба $a_{n+2} = a_2$ байх бөгөөд $i = 1, 2, \dots, n$ утгуудад

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

биелдэг бодит $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ тоонууд оршин байдаг бүх бүхэл $n \geq 3$ тоог ол.

Бодолт. **Хариу:** 3-т хуваагдах бүх натурал n тоо.

I бодолт: $3 \mid n$ үед n гишүүнтэй $-1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots, -1, -1, 2$ дараалал өгсөн нөхцөлийг биелүүлнэ. Одоо ямар нэг n тооны хувьд өгсөн нөхцөлийг биелүүлэх a_n дараалал олддог бол дарааллын гишүүдийн тэмдэг $-, -, +, -, -, +, \dots$ гэж сөөлжлөхийг үзүүлнэ. Эндээс n гуравт хуваагдах нь хялбархан мөрдөнө.

Хэрэв дарааллын дараалсан 2 гишүүн эерэг, өөрөөр хэлбэл, $a_i, a_{i+1} > 0$ бол $a_{i+2} > 1$. Иймд индукцээр бүх гишүүдийг 1-ээс их гэж хэлж чадна. i дугаар бүрийн хувьд $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > a_{i+1}$ байх учир дараалал эрс өснө, өөрөөр хэлбэл $a_{n+1} = a_1$ байх боломжгүйд хүрч зөрчил гарна. Мөн i дүгээр гишүүн 0 байх боломжгүй. Учир нь энэ тохиолдолд $a_{i+1}, a_{i+2} > 0$.

Одоо $-$, $-$, $+$, $-$, $+$ тэмдэгтэй байх дараалсан 5 гишүүн олдохгүй гэдгийг үзүүлье. $a_i = -x < 0$, $a_{i+1} = -y < 0$ гэвэл $a_{i+2} = 1 + xy > 1$, $a_{i+3} = 1 - y(1 + xy) < 0$, $a_{i+4} = 1 + (1 + xy)(1 - y(1 + xy)) < 1$. Гэвч

$$a_{i+5} - a_{i+4} = (1 + a_{i+4}a_{i+3}) - (1 + a_{i+2}a_{i+3}) = a_{i+3}(a_{i+4} - a_{i+2}) > 0$$

болж дараалсан 2 эерэг гишүүн олдоход хүрнэ.

Тэмдэг сөөлжлөх боломжгүй гэдгийг үзүүлье. Хэрэв $-$, $+$, $-$, $+$, $\dots$ байхаар тэмдэг сөөлжлөх бол

$$a_1a_2 + 1 = a_3 < 0 < a_4 = 1 + a_2a_3$$

буюу $a_1 < a_3$ болно. Иймд $a_1 < a_3 < a_5 < \dots$ болж дараалал үетэй байх боломжгүй.

Дарааллын дэс дараалсан 2 гишүүн эерэг байх, мөн гишүүд тэмдэг сөөлжлөх боломжгүй тул дараалсан 2 гишүүн заавал сөрөг байна. Үүний дараах гишүүн $+$ болно. Түүний дараах 2 гишүүн сөрөг байна. Иймээс $-$, $-$, $+$ хэлбэрээр тэмдэг сөөлжилнө.

II бодолт: Ямар нэг n тооны хувьд өгсөн нөхцөлийг биелүүлэх a_n дараалал олддог бол n нь 3-т хуваагдана гэж үзүүлэхэд хангалттай. $x^2 + 1 = x$ тэгшитгэл бодит шийдгүй учраас a_n дараалал 1 үетэй байх боломжгүй.

Өгөгдсөн рекурент томъёог ашиглан $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ үржвэрийг 2 аргаар тооцъё:

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} a_{i+2} &= (a_{i+2} - 1) a_{i+2} = a_{i+2}^2 - a_{i+2} \\ &= a_i (a_{i+3} - 1) = a_i a_{i+3} - a_i. \end{aligned}$$

Эндээс i дугаар бүрийн хувьд $a_{i+2}^2 = a_i a_{i+3} + a_{i+2} - a_i$ адилтгал биелнэ гэж мөрдөх учраас

$$\sum_i a_{i+2}^2 = \sum_i a_i a_{i+3} \text{ буюу } \sum_i (a_i - a_{i+3})^2 = 0.$$

Иймд i дугаар бүрийн хувьд $a_i = a_{i+3}$ болох тул a_n дараалал 3 үетэй. Дараалал 1 үетэй биш гэдгээс n тоо 3-т хуваагдана.

Бодлого 3. Хамгийн доод талын мөрөөс бусад мөрөнд бичигдсэн тоо бүр түүний доор бичигдсэн 2 тооны ялгаврын модультай тэнцүү байхаар зөв гурвалжин хэлбэртэй бичигдсэн тоонуудын бүрдлийг Паскалийн хасах гурвалжин гээ. Жишээлбэл, 1-ээс 10 хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 4 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин:

$$\begin{array}{cccc} & & & 4 \\ & & 2 & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

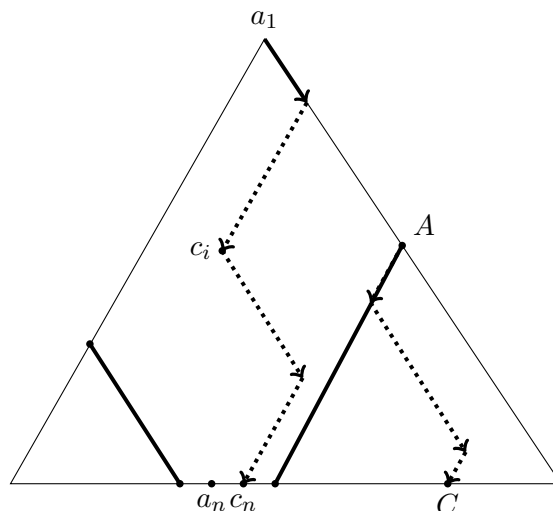
Тэгвэл 1-ээс $1 + 2 + \dots + 2018$ хүртэлх тоонуудаас бүрдэх 2018 мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин оршин байх уу?

Бодолт. $n = 2018$ ба $N = 1 + \dots + n$ гэж тэмдэглэе. Хамгийн доод мөрөнд байрлахгүй a тоо бүрийн хувьд түүнийг тодорхойлох доод мөрний хоёр тооны их рүү a тооноос эхлэлтэй тасархай сум зурья. n мөртэй Паскалийн хасах гурвалжин оршин байна гэж үзээд уг гурвалжины оройд байх a_1 тооноос эхлэлтэй тасархай зам дээрх тоонуудыг сонирхъё.

a_1 тоог тодорхойлох 2 тооны ихийг c_2 , багыг a_2 , гэх мэтчилэн i -р мөрний c_i тоог тодорхойлох $i + 1$ -р мөрний 2 тооны ихийг c_{i+1} , багыг a_{i+1} -ээр тэмдэглэе. Тэгвэл c_i тоо тасархай зам дээр байх бөгөөд өгсөн нөхцлөөс $c_{i+1} = a_{i+1} + c_i$ байх тул

$$\begin{aligned} c_n &= a_1 + \dots + a_n \\ &\geq 1 + \dots + n. \end{aligned}$$

Гэвч c_n нь N -ээс хэтрэхгүй тоо тул $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонууд $1, 2, \dots, n$ тоонуудын сэлгэмэл болно. n -р мөрний a_n ба c_n хосын зүүн ба буруун талд байрлах тоон дээр нэг орой нь байх хоёр жижиг зөв гурвалжныг зурагт үзүүлснээр байгуулья. Тэгвэл $1, 2, \dots, n$ тоонууд тасархай замтай ойр байх тул энэ 2 жижиг гурвалжны гадна байрлана.



Энэ 2 гурвалжны нэгийг нь тал дээр $[\frac{n}{2} - 1]$ -оос багагүй тоо байрлана. Уг гурвалжны A оройгоос эхлэлтэй тасархай замын төгсгөлийн C цэг дээрх тоог сонирхье. A оройгоос C хүртэл дор хаяад $[\frac{n}{2} - 1]$ тоо байх учраас C дээрх тоо

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n + [\frac{n}{2} - 1])$$

тооноос багагүй байна. Гэвч энэ нийлбэр N -ээс их болж зөрчил гарна.

Бодлого 4. x ба y нь 20-оос хэтрэхгүй эерэг бүхэл тоо байх хавтгайн (x, y) цэг бүрийг толбо гэе.

Анх эдгээр 400 толбоны аль ч толбон дээр чулуу байгаагүй. Бат, Цэцэг хоёр ээлжлэн өөрийн чулууг толбон дээр байрлуулах бөгөөд Цэцэг эхэлнэ. Цэцэг улаан чулуутай аль ч 2 толбоны хоорондох зай $\sqrt{5}$ -тай тэнцэхгүй байхаар чулуугүй толбон дээр улаан чулуу байрлуулна. Бат өөрийн ээлжид чулуугүй толбон дээр хөх чулуу байрлуулна (хөх чулуутай толбо чулуутай өөр бусад толбоноос ямар ч зайд байж болно). Хэн нэг нь үйлдэл хийх боломжгүй болсон үед тэд зогсоно.

Бат хөх чулуунуудаа хаана байрлуулснаас үл хамааран Цэцэг дор хаяад K ширхэг улаан чулууг байрлуулж чаддаг байх хамгийн их K тоог ол.

Бодолт. Хариу: $K = 100$.

20×20 хүснэгтийг нэгж талтай квадратуудад хувааж тэдгээрийн төвийг толбо гэж үзэхэд явцуурахгүй. Эхлээд ямар ч тохиолдолд Цэцэг 100 улаан чулуу байрлуулж чадахыг үзүүлье. Үүний тулд 20×20 хүснэгтээ хар, цагаанаар шатрын хөлөг шиг будъя. Аль ч 2 хар нүдний толбонуудын хоорондох зай $\sqrt{5}$ -тай тэнцэхгүй. Нийт хар нүдний тоо 200 тул Цэцэг дор хаяад 100 чулуу хар өнгийн нүднүүдэд байрлуулж чадна.

Одоо Цэцэг 100-аас илүү чулуу байрлуулахаас Бат сэргийлж чадахыг үзүүлье. 20×20 хүснэгтээ 4×4 хэмжээтэй жижиг хүснэгтүүдэд хуваая. Жижиг хүснэгт бүрийг морины нүүдлийн дагуу доорх зурагт үзүүлсэн байдлаар 4 урттай дөрвөн циклд хуваая.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Цэцэгийн чулуу тавьсан циклд Бат хөх чулуугаа байрлуулахдаа диагональчлан эсрэг орших нүдийг сонгож байрлуулна. Ингэхэд энэ циклд Цэцэг нэмж чулуу байрлуулах боломжгүй болно. Нийт циклийн тоо 100 учраас Бат энэ тактикаар тоглоход Цэцэг хамгийн ихдээ 100 чулуу байрлуулж чадна.

Бодлого 5. Эерэг бүхэл тоон $a_1, a_2, \dots$ төгсгөлгүй дараалал өгөгдөв. Хэрэв $n \geq N$ бүрийн хувьд

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

нийлбэр бүхэл байх $N > 1$ дугаар олддог бол $m \geq M$ бүрийн хувьд $a_m = a_{m+1}$ байх M дугаар олдоно гэж батал.

Бодолт. Зохиогч Г.Баярмагнайгийн бодолт: Эерэг бүхэл a, b, c тоонуудын хувьд $N = b/c + (c-b)/a$ нь бүхэл тоо бол дараах 2 өгүүлбэр биелнэ.

(i) Хэрэв a ба c нь харилцан анхны бол c нь b -г хуваана.

(ii) Хэрэв $(a, b, c) = 1$ бол a ба b нь харилцан анхны байна.

Өгсөн адилтгалаас $ab = c(aN + b - c)$ болох тул (1) хялбархан мөрдөнө. Мөн $c^2 - bc = a(cN - b)$ гэж бичиж болох тул a нь $c^2 - bc$ тоог хуваана. Иймд (a, b) нь c^2 тоог хуваах болсноор (2) батлагдана.

$s_n = a_1/a_2 + a_2/a_3 + \dots + a_{n-1}/a_n + a_n/a_1$ ба $\delta_n = (a_1, a_n, a_{n+1})$ гэж тус тус тэмдэглэе. $n \geq N$ үед өгсөн нөхцлөөр

$$s_{n+1} - s_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} = \frac{a_n/\delta_n}{a_{n+1}/\delta_n} + \frac{a_{n+1}/\delta_n - a_n/\delta_n}{a_1/\delta_n}$$

ялгавар бүхэл тоо юм. Иймд $n \geq N$ үед (2)-оос a_1/δ_n ба a_n/δ_n харилцан анхны тоонууд болно. $d_n = (a_1, a_n)$ гэвэл $d_n = \delta_n(a_1/\delta_n, a_n/\delta_n) = \delta_n$ болох тул d_n нь a_{n+1} , улмаар d_{n+1} тоог хуваана. Иймээс ямар нэг дугаараас эхлэн d_n нь a_1 -ээс хэтрэхгүй үл өсөх бүхэл тоон дараалал болох тул ямар нэг ℓ тооноос их дугаартай бүх гишүүд тэнцэнэ. Энэ тоог d гэе. $(a_1/d, a_n/d) = 1$ байх тул (1)-ээс a_{n+1}/d нь a_n/d тоог хуваана гэж гарна. Иймд $a_n \geq a_{n+1}$ ($n \leq \ell$) болсноор бодлого бодогдоно.

II бодолт: Өгсөн нийлбэрийг s_n гэе. $n \geq N$ байх n дугаар бүрийн хувьд

$$s_{n+1} - s_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} \quad (*)$$

ялгавар бүхэл тоо байна. 2 талыг a_1 -д үржүүлснээр $a_{n+1} \mid a_1 a_n$ болохыг мэднэ. Иймд $a_{n+1} \mid a_1^{n-N} a_N$ болох тул a_n -ийн бүх анхны тоон хуваагчид $a_1 a_N$ тооны хуваагч болно. Өгсөн дарааллын гишүүдийг хуваах анхны тоон хуваагчдын олонлог төгсгөлөг болох тул a_n -ийн анхны тоон задаргааны зэргийн дараалал тус бүрдээ ямар нэг дугаараас эхлэн тэнцүү болно гэж үзүүлэхэд хангалттай юм.

Ямар нэг $p \mid a_1 a_N$ анхны хуваагчийг сонгож авъя. Цаашид q бүхэл тооны анхны тоон задаргаан дахь p -ийн зэргийг $v_p(q)$ гэж тэмдэглэе. Хэрэв $v_p(a_n) \geq v_p(a_1)$ ($n \geq N$) бол n дугаарыг их гэе.

(1) Их дугаар n оршин байдаг гэе.

Хэрэв $v_p(a_{n+1}) < v_p(a_1)$ бол $v_p(a_{n+1}/a_1) < 0$ болох бөгөөд $v_p(a_n/a_{n+1})$ ба $v_p(a_n/a_1)$ тоонууд сөрөг биш тул (*) нь бүхэл байх боломжгүй, өөрөөр хэлбэл, $n+1$ нь их дугаар болно. Нөгөө талаас мөн адилаар $v_p(a_{n+1}) > v_p(a_n)$ байх боломжгүй тул $v_p(a_1) \leq$

$v_p(a_{n+1}) \leq v_p(a_n)$ болно. Үүний үр дүнд $n \geq N$ дугаар бүр их, мөн $v_p(a_n), v_p(a_{n+1}), \dots$ дараалал үл өснө гэж дүгнэж чадна. Иймд ямар нэг дугаараас эхлэн $v_p(a_n)$ дарааллын гишүүд тэнцүү байна.

(2) Их дугаар оршин байдаггүй гэе.

Энэ үед $n \geq N$ дугаар бүрийн хувьд $v_p(a_n) < v_p(a_1)$. Хэрэв $v_p(a_{n+1}) < v_p(a_n)$ байх n дугаар олддог бол $v_p(a_{n+1}/a_1) < v_p(a_n/a_1) < v_p(a_n/a_{n+1})$ болох тул (*) бүхэл байх боломжгүй. Иймд $v_p(a_n), v_p(a_{n+1}), \dots$ дараалал үл өсөх бөгөөд дээрээсээ $v_p(a_1)$ -ээр зааглагдах тул $v_p(a_n), v_p(a_{n+1}), \dots$ дараалал тогтворжино.

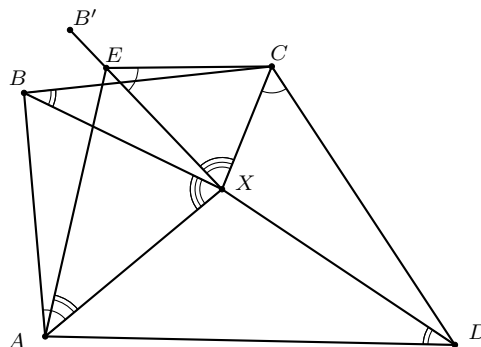
Бодлого 6. $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ адилтгал биелэх $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт дотор

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ба} \quad \angle XBC = \angle XDA$$

байх X цэг авав. $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$ болохыг үзүүл.

Бодолт. B цэгийн AXC өнцгийн биссектриссийн хувьд тэгш хэмтэй цэгийг B' гэе. Энэ үед $\angle AXB' = \angle CXB$ ба $\angle CXB' = \angle AXB$ болно. Хэрэв X, D, B' цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог бол бодлого бодогдоно.

Эсрэгээс нь нэг шулуун биш гэж үзье. XB' цацраг дээр $XE \cdot XB = XA \cdot XC$ байх E цэг авбал $\triangle AXE \sim \triangle BXC$ ба $\triangle CXE \sim \triangle BXA$ байна. Өгсөн нөхцөлөөс $\angle XCE + \angle XCD = \angle XBA + \angle XAB < 180^\circ$ ба $\angle XAE + \angle XAD = \angle XDA + \angle XAD < 180^\circ$ тул X цэг $EADC$ дөрвөн өнцөгтийн EAD, ECD өнцгүүдийн дотор байрлах ба цаашлаад EAD, ECD гурвалжны нэгийх нь дотор, нөгөөгийх нь гадна байрлалтай байна.



Дээрх төсөөтэй гурвалжнуудаас $XA \cdot BC = XB \cdot AE$ ба $XB \cdot CE = XC \cdot AB$ болно. Эдгээрийг харгалзуулж үржүүлж, $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ гэдгийг санавал $XA \cdot CD \cdot CE = XC \cdot AD \cdot AE$ буюу

$$\frac{XA \cdot DE}{AD \cdot AE} = \frac{XC \cdot DE}{CD \cdot CE}$$

болно.

Лемм. PQR гурвалжны QPR өнцөг дотор $\angle QPX = \angle PRX$ байх X цэгийн хувьд $\frac{PX \cdot QR}{PQ \cdot PR} < 1$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь X цэг PQR гурвалжин дотор байна.

Баталгаа. $\angle QPR$ дотор орших $\angle QPX = \angle PRX$ байх X цэгийн геометр байр нь R -ийг дайрсан, PQ шулуун P цэгт шүргэх γ тойргийн α нум байна. γ тойрог QR шулуун Q цэгт хоёр дах цэгийг Y (хэрэв QR шулуун Q цэгт шүргэж байвал $Y = R$) гэе. $\triangle QPY \sim \triangle QRP$ гэдгээс $PY = \frac{PQ \cdot PR}{QR}$ болно. Эндээс $PX < PY$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь X цэг PQR гурвалжны дотор байна гэж батлахад хангалттай.

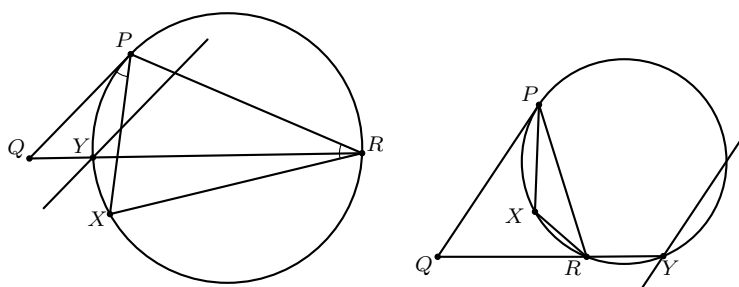
Y цэгийг дайрсан PQ шулуунтай параллель t шулуун авъя. $PZ < PY$ байх γ тойргийн Z цэг бүр t ба PQ шулууны дунд байрлана.

(1) Y цэг QR хэрчим дээр байг (доорх зурагны зүүн тал).

Энэ тохиолдолд Y цэг α нумыг $\overset{\frown}{PY}$ ба $\overset{\frown}{YR}$ гэсэн 2 нумд хуваах ба $\overset{\frown}{PY}$ нь PQR гурвалжин дотор байрлана, мөн m , $\overset{\frown}{PQ}$ шулуунуудын дунд байрлах тул $X \in \overset{\frown}{PY}$ цэг бүрийн хувьд $PX < PY$ байна. $\overset{\frown}{YR}$ нь PQR гурвалжны гадна байрлана, мөн m шулууны хувьд P, YR хоёр эсрэг талд байрлах тул $X \in \overset{\frown}{YR}$ цэг бүрийн хувьд $PX > PY$ байна.

(2) Y цэг QR цацрагийн R -ээс цаашх цэг байг (доорх зурагны баруун тал).

Энэ тохиолдолд α нум бүхэлдээ PQR гурвалжны дотор байрлах ба m ба PQ шулууны дунд байрлах тул $X \in \alpha$ цэг бүрийн хувьд $PX < PY$ байна.



Лемм батлагдлаа. □

Одоо бодолтоо гүйцээе. $\triangle EAD$ гурвалжин ба X цэг, $\triangle ECD$ гурвалжин ба X цэгийн хувьд тус бүр дээрх чанараа ашиглавал $\frac{XA \cdot DE}{AD \cdot AE}$ ба $\frac{XC \cdot DE}{CD \cdot CE}$ харьцаануудын яг нэг нь 1-ээс бага болж зөрчил үүснэ.

Европын охидын математикийн олимпиад

Монголын баг

Европийн охидын математикийн 7-р олимпиад 2018 оны 4 дүгээр сарын 9-15 өдрүүдэд Итали улсын Флоренц хотод зохион байгуулагдлаа. Математикийг талархан дэмжигч эцэг, эхчүүдийн санаачлагаар манай улсын баг энэ олимпиадад анх удаа оролцлоо. Энэ жилийн олимпиадад 52 орны нийт 195 сурагч оролцов. Монгол улсыг төлөөлөн оролцсон багийн бүх гишүүд бүгд медаль хүртэж багийн дүнгээр Израиль улсын багтай ижил 80 оноо авч 15 дугаар байранд орсон.

Оролцогч	Сургууль	Оноо	Амжилт
М.Долгормаа	Олонлог сургууль	28	Мөнгөн медаль
А.Пүрэвзаяа	Олонлог сургууль	21	Хүрэл медаль
Б.Нурсауле	11-р сургууль	16	Хүрэл медаль
М.Итгэл	Сант сургууль	15	Хүрэл медаль

Европын охидын математикийн олимпиадын товч танилцуулга

Европын охидын математикийн олимпиад буюу European Girls Mathematical Olympiad (EGMO) нь дунд сургуулийн эмэгтэй сурагчдад зориулсан математикийн олимпиад юм. Сүүлийн 50 гаран жилийн дунджийг харахад IMO (International Mathematical Olympiad) буюу олон улсын математикийн олимпиадад (ОУМО) оролцогчдын 10 хүрэхгүй хувийг эмэгтэй сурагчид эзэлдэг нь охидыг энэ салбарт дэмжих зайлшгүй шаардлагатай гэдгийг илтгэдэг байна. Боловсролоороо тэргүүлж буй европын улс орнууд энэ асуудалд анхаарлаа хандуулж 2012 оноос эхлэн EGMO-г жил бүр Европ тивд зохион байгуулж байна. Европын биш орнуудын охидод боломж олгох үүднээс тодорхой хураамж төлөн оролцохыг зөвшөөрдөг.

- EGMO ийн бодолт хийх хугацаа, бодлогын төрөл, оноо, дүгнэх систем нь IMO той яг ижил ба оролцох сурагчдын тоо нь 4 байдаг бол IMO д улс бүрээс 6 сурагч оролцдог
- EGMO эмэгтэй сурагчдын математик авъяасыг дэмжих хөгжүүлэх мөн математикийг гүнзгийрүүлэн суралцдаг эмэгтэй сурагчдад боломж олгох зорилготой,
- EGMO нь анх 2012 онд зохиогдсон ба түүнээс хойш жил бүр оролцох улсын тоо тасралтгүй нэмэгдэж байгаа,
- EGMO-д 2017 онд нийт 44 улс оролцсоны дотор АНУ, ОХУ, Япон, Иран, Казакстан, Унгар, Итали зэрэг IMO-д тогтмол дээгүүр амжилттай оролцдог улсууд багтжээ,
- EGMO-д 2017 онд нийт 11 европын биш улсууд оролцсон байна,
- Манай улс IMO-д 1964 оноос хойш бараг жил бүр оролцсон ба нийт оролцогчдын 3.9 хувийг эмэгтэй сурагчид эзэлжээ,
- Манай улс EGMO д урьд нь огт оролцож байгаагүй.

Бодлогууд

Бодлого А1. $CA = CB$ ба $\angle ACB = 120^\circ$ байх ABC гурвалжны AB талын дундаж цэгийг M гэе. P нь ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр гүйх цэг, Q нь $QP = 2QC$ байх CP хэрчмийн цэг болог. P цэгийг дайрсан AB -д перпендикуляр шулуун MQ шулууныг цор ганц N цэгт огтолно. P цэгийн бүх боломжит байрлалд харгалзах N нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодлого А2. Дараах олонлогийн авч үзье:

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Бүхэл тоо $x \geq 2$ бүрийг A олонлогийн нэг эсвэл хэдэн элементүүдийн (ялгаатай байх албагүй) үржвэр хэлбэрт бичиж болохыг батал.
- (b) Бүхэл тоо $x \geq 2$ бүрийн хувьд x -г A олонлогийн $f(x)$ ширхэг элементийн (ялгаатай байх албагүй) үржвэр хэлбэрт бичиж болдог байх хамгийн бага тоог $f(x)$ гэж тэмдэглэе.

$x \geq 2, y \geq 2$ ба $f(xy) < f(x) + f(y)$ байх төгсгөлгүй олон бүхэл тоон (x, y) хос олдохыг батал. (Хэрэв $x_1 \neq x_2$ эсвэл $y_1 \neq y_2$ бол (x_1, y_1) ба (x_2, y_2) хосууд ялгаатай).

Бодлого А3. ЕГМО-ийн n оролцогчийг $C_1, \dots, C_n$ гэе. Бодолтын дараа дараах дүрмийн дагуу тэд ресторанд орохоор нэг эгнээнд дараалан зогсов.

- Оролцогчдыг нэг эгнээнд зогсоох эхний дарааллыг Жюри сонгоно.
- Минут тутамд $1 \leq i \leq n$ байх i дугаарыг Жюри сонгоно.
 - Хэрэв C_i оролцогчийн урд дор хаяад i оролцогч байвал тэр 1 евро Жюрид төлж яг i байраар урагшилдаг.
 - Хэрэв C_i оролцогчийн урд i -с цөөн оролцогч байвал ресторан нээгдэж үйлдэл зогсдог.

- (a) Жюригийн сонголтуудаас үл хамааран үйлдэл төгсгөлгүй үргэлжлэх боломжгүй гэж харуул.
- (b) n бүрийн хувьд эхний байрлал болон үйлдлийг ухаалгаар сонгосноор Жюри хамгийн ихдээ хэдэн евро цуглуулж чадахыг тодорхойл.

Бодлого В1. 1×2 эсвэл 2×1 хэмжээтэй даалууг *домино* гэе.

$n \geq 3$ бүхэл тоо. $n \times n$ хүснэгтэд хоорондоо давхцахгүй, домино бүр 2 нүд хучиж байхаар хэсэг домино байрлуулна.

Мөр эсвэл баганын *утга* гэдгээр тухайн мөр эсвэл баганын дор хаяад 1 нүдийг агуулах доминогийн тоог ойлгоё. Аль ч мөр ба аль ч баганын утга k байх ямар нэг $k \geq 1$ тоо олддог байрлуулалтыг *тэнцвэртэй* гэж нэрлэе.

$n \geq 3$ бүрийн хувьд тэнцвэртэй байрлуулалт олдохыг баталж тэнцвэртэй байрлуулалтад шаардлагатай доминогийн хамгийн бага тоог ол.

Бодлого В2. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Γ гэе. AB хэрчмийг шүргэх Ω тойрог AB шулууны хувьд C цэгтэй ижил талд байрлах цэгээр Γ тойргийг шүргэнэ. $\angle BCA$ өнцгийн биссектрис Ω тойргийг ялгаатай P ба Q цэгүүдээр огтолдог. $\angle ABP = \angle QBC$ болохыг батал.

Бодлого В3.

- (a) $0 < t < \frac{1}{2}$ байх бодит тоо t бүрийн хувьд дараах чанартай эерэг бүхэл n тоо олдохыг батал: n ширхэг элементтэй эерэг бүхэл тоон S олонлог бүрийн хувьд

$$|x - my| \leq ty$$

байхаар S олонлогийн ялгаатай x ба y элемент мөн сөрөг биш бүхэл m ($m \geq 0$) тоо олддог.

- (b) $0 < t < \frac{1}{2}$ байх бодит тоо t бүрийн хувьд S олонлогийн ялгаатай x ба y элементүүдийн дурын хос, сөрөг биш бүхэл m ($m \geq 0$) тоо бүрийн хувьд

$$|x - my| > ty$$

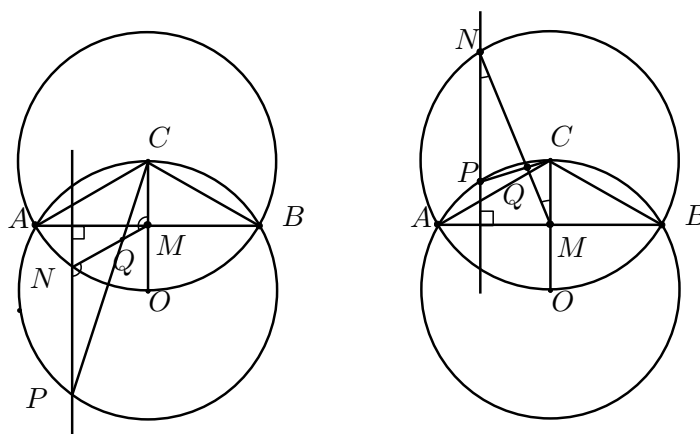
байх эерэг бүхэл тоон төгсгөлгүй S олонлог олдох эсэхийг тодорхойл.

Бодолтууд

Бодлого А1. $CA = CB$ ба $\angle ACB = 120^\circ$ байх ABC гурвалжны AB талын дундаж цэгийг M гэе. P нь ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр гүйх цэг, Q нь $QP = 2QC$ байх CP хэрчмийн цэг болог. P цэгийг дайрсан AB -д перпендикуляр шулуун MQ шулууныг цор ганц N цэгт огтолно. P цэгийн бүх боломжит байрлалд харгалзах N нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

Бодолт. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. $\angle ACB = 120^\circ$ гэдэг нөхцлөөс M нь CO -ийн дундаж цэг болно.

C дээр төвтэй CO радиустай ω тойрог татъя. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг O төв C -д очсон байхаар зөөхөд ω тойрог гарна. Одоо бид N цэг ω тойрог дээр оршино гэж харуулъя.



QNP , QMC гурвалжнуудын хувьд Q өнцгүүд тэнцүү. Мөн NP нь MC -тэй параллел (эдгээр нь AB -д перпендикуляр) учир $\angle QNP = \angle QMC$ байна. Иймд эдгээр гурвалжнууд төсөөтэй. $QP = 2QC$ учраас $NP = 2MC = CO$ байна. Энэ нь N цэг ω дээр оршино гэсэн үг.

Бодлого А2. Дараах олонлогийн авч үзье:

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Бүхэл тоо $x \geq 2$ бүрийг A олонлогийн нэг эсвэл хэдэн элементүүдийн (ялгаатай байх албагүй) үржвэр хэлбэрт бичиж болохыг батал.
- (b) Бүхэл тоо $x \geq 2$ бүрийн хувьд x -г A олонлогийн $f(x)$ ширхэг элементийн (ялгаатай байх албагүй) үржвэр хэлбэрт бичиж болдог байх хамгийн бага тоог $f(x)$ гэж тэмдэглэе.
- $x \geq 2$, $y \geq 2$ ба $f(xy) < f(x) + f(y)$ байх төгсгөлгүй олон бүхэл тоон (x, y) хос олдохыг батал. (Хэрэв $x_1 \neq x_2$ эсвэл $y_1 \neq y_2$ бол (x_1, y_1) ба (x_2, y_2) хосууд ялгаатай).

Бодолт.

- (a) A олонлогийн $1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{x-1}$ гэсэн элементүүдийн үржвэр x гарахыг төвөггүй шалгаж болно.
- (b) Юуны түрүүнд $(x, y) = (7, 7)$ үед $f(xy) < f(x) + f(y)$ биелэхийг үзүүлье. $2^3 > 7$ байх ба үүнээс ялгаатай A олонлогийн 3 хүртэлх тооны элементүүдийн үржвэр хамгийн ихдээ $\frac{2^3 \cdot 3}{2} = 6$. Иймд 7 нь дөрвөөс бага тооны A олонлогийн элементүүдийн үржвэр хэлбэрт

бичигдэх боломжгүй тул $f(7) \geq 4$. Нөгөө талаас $49 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{49}{48}$ байх тул $f(49) \leq 7$.

Одоо $f(xy) < f(x) + f(y)$ нөхцөлийг биелүүлэх (x, y) хосын тоог төгсгөлөг гэж үзье. (a, b) хос бүрийн хувьд $f(ab) \leq f(a) + f(b)$ нөхцөл биелэх тул $a > M$ эсвэл $b > M$ байх (a, b) хос бүрийн хувьд $f(ab) = f(a) + f(b)$ биелэх M тоо олдоно.

$f(xy) < f(x) + f(y)$ байх (x, y) хос, $n > M$ байх ямар нэг бүхэл n тоог сонгож авъя. Тэгвэл $f(n) + f(xy) = f(nxy) = f(nx) + f(y) = f(n) + f(x) + f(y)$ биелнэ. Энэ нь манай сонголтод зөрчинө.

Бодлого АЗ. ЕГМО-ийн n оролцогчийг $C_1, \dots, C_n$ гэе. Бодолтын дараа дараах дүрмийн дагуу тэд ресторанд орохоор нэг эгнээнд дараалан зогсов.

- Оролцогчдыг нэг эгнээнд зогсоох эхний дарааллыг Жюри сонгоно.
- Минут тутамд $1 \leq i \leq n$ байх i дугаарыг Жюри сонгоно.
 - Хэрэв C_i оролцогчийн урд дор хаяад i оролцогч байвал тэр 1 евро Жюрид төлж яг i байраар урагшилдаг.
 - Хэрэв C_i оролцогчийн урд i -с цөөн оролцогч байвал ресторан нээгдэж үйлдэл зогсдог.
- (a) Жюригийн сонголтуудаас үл хамааран үйлдэл төгсгөлгүй үргэлжлэх боломжгүй гэж харуул.
- (b) n бүрийн хувьд эхний байрлал болон үйлдлийг ухаалгаар сонгосноор Жюри хамгийн ихдээ хэдэн евро цуглуулж чадахыг тодорхойл.

Бодолт. Жюри хамгийн ихдээ $2^n - (n + 1)$ евро цуглуулж чадна гэж үзүүлье. Эндээс (a) тохиолдол шууд мөрдөнө. C_i оролцогч i байр урагшлах үед C_i -г үсэрсэн гэе. i дугаар бүрийн хувьд C_i оролцогчийн үсрэлтийн тоог a_i -ээр тэмдэглэе.

Ажиглалт:

- C_i оролцогч i байр урагшлах үед C_i нь $j > i$ байх C_j оролцогчийг давж үсэрнэ.
- C_i нь C_j -г хамгийн ихдээ $1 + a_j$ удаа давж үсэрнэ.

Иймд i дугаар бүрийн хувьд

$$a_i \leq (a_{i+1} + 1) + (a_{i+2} + 1) + \dots + (a_n + 1)$$

биелнэ. $a_n = 0$ байх учраас индукцээр $a_i \leq 2^{n-i} - 1$ болох нь хялбархан мөрдөнө. Иймд Жюри хамгийн ихдээ

$$a_1 + \dots + a_n \leq (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \dots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) = 2^n - (n + 1)$$

евро цуглуулж чадна.

Тэнцэл биелэхийг үзүүлэхийн тулд индукцээр байгуулалт хийе. $f(n)$ -ээр n оролцогчийн хувьд Жюри хамгийн ихдээ цуглуулах еврогийн хэмжээг тэмдэглэе. Оролцогчид $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$ гэсэн урвуу эрэмбээс эхэлсэн гэе. Тэгэхэд

- $C_1, \dots, C_{n-1}$ хувьд $f(n-1)$ үйлдлээр дараалал $C_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ болно.
- Одоо $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_1, C_n$ байрлалд шилжсэн байхаар оролцогч бүрийг C_n дээгүүр үсэргэе. Тэгэхэд $n-1$ үсрэлт хэрэгтэй.

- $C_1, \dots, C_{n-1}$ хувьд ахиад $f(n-1)$ үсрэлт хэрэгтэй.

Энэ байгуулалтаар $f(2) = 1$ ба $f(n) = 2f(n-1) + (n-1)$ болно. Энэ дараалал хүссэн тоог өгнө.

Бодлого В1. 1×2 эсвэл 2×1 хэмжээтэй даалууг *домино* гээ.

$n \geq 3$ бүхэл тоо. $n \times n$ хүснэгтэд хоорондоо давхцахгүй, домино бүр 2 нүд хучиж байхаар хэсэг домино байрлуулна.

Мөр эсвэл баганын *утга* гэдгээр тухайн мөр эсвэл баганын дор хаяад 1 нүдийг агуулах доминогийн тоог ойлгоё. Аль ч мөр ба аль ч баганын утга k байх ямар нэг $k \geq 1$ тоо олддог байрлуулалтыг *тэнцвэртэй* гэж нэрлэе.

$n \geq 3$ бүрийн хувьд тэнцвэртэй байрлуулалт олдохыг баталж тэнцвэртэй байрлуулалтад шаардлагатай доминогийн хамгийн бага тоог ол.

Бодолт. Тэнцвэртэй байрлуулалтад шаардлагатай доминогийн хамгийн бага тоо n нь 3-т хуваагдах бол $2n/3$, бусад тохиолдолд $2n$ байна. Үүнийг батлахын тулд

$$S = \{(l, d) : l \text{ мөр эсвэл багана, } d \text{ нь } l\text{-ийн дор хаяад 1 нүдийг хучих домино}\}$$

олонлогийн элементийн тоог 2 аргаар тоолъё. Нэг талаас аль ч мөр, аль ч баганыг дор хаяад 1 нүдээр хучих доминогийн тоо k учраас $|S| = 2nk$. Нөгөө талаас домино бүр 3 ширхэг мөр, баганатай огтлолцох учир $|S| = 3D$. Энд D нь нийт доминогийн тоо. Иймд

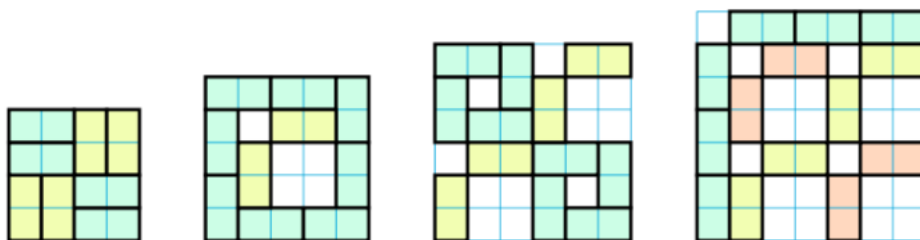
$$2nk = 3D.$$

Хэрэв n нь 3-т хуваагддаг бол $k \geq 1$ учраас $D \geq 2n/3$, харин 3-т үл хуваагдах бол $k \geq 3$ болох учраас $D \geq 2n$. Одоо доминогийн тоо хамгийн бага байх тэнцвэртэй байрлуулалтын жишээг байгуулья.

$n = 3$ ба $k = 1$ байх байгуулалтыг доорх зургаас харна уу. n нь 3-т хуваагдах үед $n \times n$ хүснэгтийн гол диагоналийн дагуух $n/3$ ширхэг 3×3 жижиг хүснэгтүүдийг ашиглан $k = 1$ байх тэнцвэртэй байрлуулалтыг байгуулна.

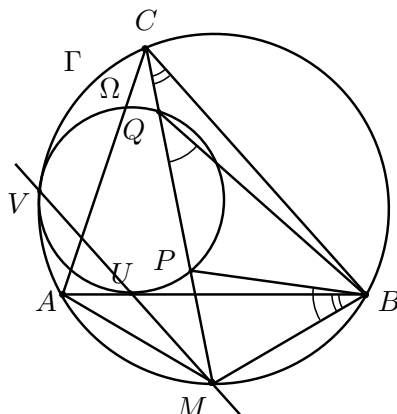


$n \geq 8$ тоог үлдэгдэлтэй хуваах теоремоор $4A + r$ ($r \in \{4, 5, 6, 7\}$) хэлбэрт бичье. $n \geq 8$ бүрийн хувьд $k = 3$ байх байх тэнцвэртэй байрлуулалтыг $r \times r$ ба 4×4 жижиг хүснэгтүүдийг гол диагоналийн дагуу байрлуулан байгуулна. Доорх зургийг харна уу.



Бодлого В2. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг Γ гэе. AB хэрчмийг шүргэх Ω тойрог AB шулууны хувьд C цэгтэй ижил талд байрлах цэгээр Γ тойргийг шүргэнэ. $\angle BCA$ өнцгийн биссектрис Ω тойргийг ялгаатай P ба Q цэгүүдээр огтолдог. $\angle ABP = \angle QBC$ болохыг батал.

Бодолт. Γ тойргийн C -г агуулаагүй AB нумын дундаж цэгийг M , Ω ба Γ -ийн шүргэлтийн цэгийг V , Ω ба AB -ийн шүргэлтийн цэгийг U гэе.



Эхлээд $MP \cdot MQ = MB^2$ гэж харуулъя. V төвтэй гомотетээр Ω тойрог Γ -д, AB шулуун Γ -г шүргэх AB -тэй параллел шулуунд бууна. Энэ шулуун Γ -тай M цэгт шүргэлцэнэ. Иймд энэ гомотетээр U цэг M -д буух учир V, U, M цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

$\angle AVM = \angle ABM = \angle MAB = \angle MAU$ учир $\triangle MAV, \triangle MUA$ нь төсөөтэй. Иймээс

$$MV \cdot MU = MA^2 = MB^2$$

болно. Огтлогчийн теоремоор

$$MP \cdot MQ = MU \cdot MV = MB^2$$

байна.

$MP \cdot MQ = MB^2$ гэдгээс $\triangle MBP, \triangle MQR$ гурвалжнууд төсөөтэй болно. Иймд $\angle MBP = \angle MQB$ байна. Мөн $\angle MCB = \angle MBA$ болохыг тооцвол

$$\angle QBC = \angle MQB - \angle MCB = \angle MBP - \angle MBA = \angle PBA$$

болж батлагдлаа.

Бодлого В3.

- (a) $0 < t < \frac{1}{2}$ байх бодит тоо t бүрийн хувьд дараах чанартай эерэг бүхэл n тоо олдохыг батал: n ширхэг элементтэй эерэг бүхэл тоон S олонлог бүрийн хувьд

$$|x - my| \leq ty$$

байхаар S олонлогийн ялгаатай x ба y элемент мөн сөрөг биш бүхэл m ($m \geq 0$) тоо олддог.

- (b) $0 < t < \frac{1}{2}$ байх бодит тоо t бүрийн хувьд S олонлогийн ялгаатай x ба y элементүүдийн дурын хос, сөрөг биш бүхэл m ($m \geq 0$) тоо бүрийн хувьд

$$|x - my| > ty$$

байх эерэг бүхэл тоон төгсгөлгүй S олонлог олдох эсэхийг тодорхойл.

Бодолт.

- (а) n нь $(1+t)^{n-1} \geq 1/t$ байх эерэг бүхэл тоо болог. n ширхэг элементтэй эерэг бүхэл тоон S олонлогийн элементүүдийг $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ гэе.

Хэрэв ямар нэг i дугаарын хувьд $s_{i+1} \leq (1+t)s_i$ байвал

$$|s_{i+1} - s_i| = s_{i+1} - s_i \leq ts_i$$

болж шаардсан тэнцэл биш $x = s_{i+1}$, $y = s_i$, $m = 1$ гэж сонгоход биелнэ.

Хэрэв i дугаар бүрийн хувьд $s_{i+1} > (1+t)s_i$ байвал

$$s_n > (1+t)^{n-1} s_1$$

болно. n тооны сонголтоор $|s_1| = s_1 < s_n/(1+t)^{n-1} \leq ts_n$ болох тул шаардсан тэнцэл биш $x = s_1$, $y = s_n$, $m = 0$ гэж сонгоход биелнэ.

- (б) Шаардсан чанартай S олонлогийг индукцээр байгуулья. $N > \frac{1}{1-2t}$ байх бүхэл тоо бэхэлье.

Эхлээд N -ээс их сондгой тоог сонгон авч S олонлогийг байгуулья. S олонлогийн аль ч элементтэй харилцан анхны байх N -ээс их сондгой тоог S олонлогт нэмэх замаар төгсгөлгүй элементтэй S -ийг байгуулья.

$S = \{2a_1 + 1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_n + 1\}$ нь өгсөн нөхцөлийг биелүүлэх олонлог болог. S -ийн элементүүд хос хосоороо харилцан анхны тул үлдэгдлийн тухай хятадын теоремоор $k \equiv 1 \pmod{2}$ ба

$$k \equiv a_i \pmod{2a_i + 1}, \quad 1 \leq i \leq n$$

байх k тоог $\max_i(2(2a_i + 1))$ -с их байхаар сонгон авч болно. Бид k тоог S олонлогт нэмж чадна. Евклидийн алгоритмаар k нь $2a_i + 1$ тоо бүртэй харилцан анхны бөгөөд

$$|(2a_i + 1) - mk| \geq k - (2a_i + 1) > k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} > tk,$$

ба

$$|k - m(2a_i + 1)| \geq a_i \geq t(2a_i + 1).$$

Иймд индукцээр бид төгсгөлгүй элементтэй S олонлогийг олж авна.

Бүсийн математикийн олимпиад

Бүсийн математикийн III олимпиад 2017 оны 10 сарын 7-ны өдөр орон даяар амжилттай зохион байгуулагдлаа.

Говийн бүсд Баянхонгор, Дундговь, Өвөрхангай, Өмнөговь, **Зүүн** бүсд Дорнод, Говьсүмбэр, Хэнтий, Сүхбаатар, Дорноговь, **Төвийн** бүсд Архангай, Булган, Дархан-Уул, Эрдэнэт, Төв, Хөвсгөл, Сэлэнгэ, **Баруун** бүсд Баян Өлгий, Говь-Алтай, Завхан, Увс, Ховд аймгууд тус тус оролцлоо.

Бодлогууд

Бодлогуудыг бодолтгүйгээр толилуулж байна.

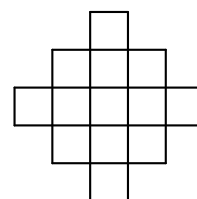
II анги

Бодлого II-1. Ангид 30 оюутан байжээ. 18 оюутан 18-аас их настай. 20 оюутан 20-оос бага настай. Хэдэн оюутан 19 настай вэ?

Бодлого II-2. $\overline{НЭГ} + \overline{НЭГ} = \overline{ХОЁР}$ бол $\overline{ХОЁР}$ тоо **а)** хамгий ихдээ, **б** хамгийн багадаа хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого II-3.

3 нүдтэй ямар ч булан дүрс дотор бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 6-тай тэнцүү. Харин бүх тоонуудын нийлбэр 24-той тэнцүү байхаар зурагт үзүүлсэн дүрсийн нүднүүдэд тоо бич.

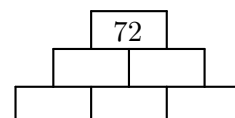


III анги

Бодлого III-1. $\overline{НАР} + \overline{ГАР} = 8 \cdot \overline{САР}$ үсэгт тааврын бүх хариуг ол. (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого III-2.

Дээд нүдэнд бичигдсэн тоо нь өөрийн доор байрлах 2 нүдэнд бичигдсэн тооны үржвэртэй тэнцүү байхаар зурагт үзүүлсэн дүрсийн хоосон нүднүүдэд ялгаатай тоонууд бич.



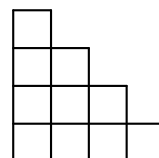
Бодлого III-3. 3×3 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 тоонуудыг бичив. Нэг тоо 2 нүдэнд, харин бусад тоонууд нэг, нэг нүдэнд бичигджээ. Аль ч мөр, аль ч баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү бол ямар тоог 2 нүдэнд бичсэн бэ?

IV анги

Бодлого IV-1. 3-т хуваахад уг тооны цифрүүдийн байрыг сольсон тоо гардаг 4-н оронтой хамгийн бага тоог ол.

Бодлого IV-2.

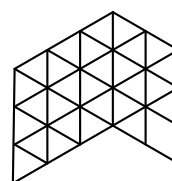
Зурагт үзүүлсэн дүрсийн нүднүүдэд ялгаатай натурал тоонууд бичжээ. Эхний мөрөнд бичигдсэн тоо нь a , дараагийн мөрөнд бичигдсэн 2 тооны нийлбэр b , дараагийн мөрөнд бичигдсэн 3 тооны нийлбэр c , сүүлийн мөрөнд бичигдсэн 4 тооны нийлбэр байв. $a > b > c > d$ бол a тоо нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?



Бодлого IV-3. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг шугамын дагуу 2 тэнцүү дүрсэд 2 өөр аргаар хуваа.

Бодлого IV-4.

Будилуу Бат хичээлдээ андуурч, гурван оронтой бүх тоог "Зуу, зуун нэг, зуун хоёр, ..., есөн зуун ерэн найм, есөн зуун ерэн ёс" гэж бичээд, дараа нь бичсэн үгнүүдээ тоолжээ. Тэр нийт хэдэн үг бичсэн байсан бэ?

**V анги**

Бодлого V-1. $A : B = B : \Gamma = \overline{DE} : \overline{EJZ}$ илэрхийлэл зөв байхаар үсгүүдийг 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдээр соль. (өөр үсгийг өөр цифрээр солино.)

Бодлого V-2. Бат $ABCD$ тэгш өнцөгтийг AB талтай параллель шулуунаар хоёр хэсэгт хуваахад хэсгүүдийн талбайн харьцаа 1 : 2, периметрийн харьцаа 3 : 5 байв. Цэцэг $ABCD$ тэгш өнцөгтийг AD талтай параллель шулуунаар хоёр хэсэгт хуваажээ. Хэсгүүдийн талбайн харьцаа 1 : 2 бол периметрийн харьцааг ол.

Бодлого V-3. 1, 2, 3, ..., 49, 50 тоонуудаас хэдэн тоог сонгож, нэг тойрог дээр бичжээ. Дараалж бичигдсэн аль ч хоёр тооны үржвэр 100-аас бага бол хамгийн олондоо хэдэн тоо сонгосон бэ?

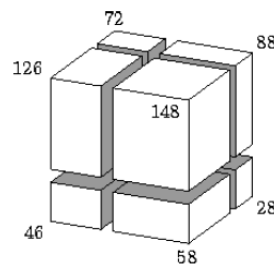
Бодлого V-4. Тус бүр 220 г жинтэй 5 ширхэг алим байв. Алимнуудыг хэсгүүдэд хуваагаад 11 хүүхдэд тус бүр 100 г алим өгчээ. Хэсэг тус бүрийн жин нь 43 г-аас багагүй, 57 г-аас ихгүй байж болох уу?

VI анги

Бодлого VI-1. $A : B = B : \Gamma = \overline{DE} : \overline{EJZ}$ илэрхийлэл зөв байхаар үсгүүдийг 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрүүдээр соль. (өөр үсгийг өөр цифрээр солино.)

Бодлого VI-2.

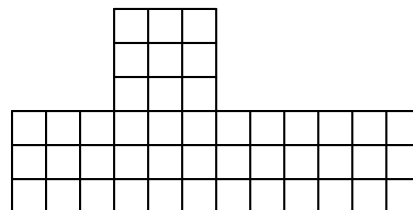
Дөрвөлжин модыг талсуудтай нь параллелээр хөрөөдөж 8 хэсэгт хуваажээ. Зурагт харагдаж байгаа 7 хэсгийн гадаргуугийн талбай нь харгалзан 46 см^2 , 58 см^2 , 28 см^2 , 126 см^2 , 148 см^2 , 88 см^2 , 72 см^2 байсан бол харагдахгүй байгаа хэсгийн гадаргуугийн талбай хэдэн см^2 вэ?



Бодлого VI-3. $\overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot \overline{def} + 2017$ байх зургаан оронтой бүх $\overline{abcdef}$ тоог ол. (ижил цифрүүд байж болно.)

Бодлого VI-4.

3×3 хэмжээтэй 5 ширхэг квадратаас бүтэх дүрс өгөгджээ (зураг). Дүрсийн талбайг хагаслан хуваадаг 4 см урттай тахир шугамыг байгуул.



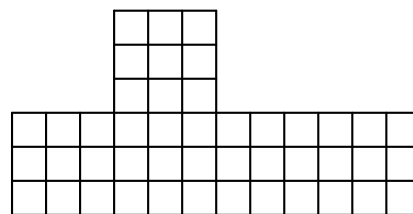
VII анги

Бодлого VII-1. $\overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot \overline{def} + 2017$ байх зургаан оронтой бүх $\overline{abcdef}$ тоог ол. (ижил цифрүүд байж болно.)

Бодлого VII-2. Бат, Цэцгээ, Дорж, Чимгээ дөрөв ангид чихэр авч иржээ (хүүхэд бүр ядаж нэг чихэртэй.) Бат, Цэцэг хоёр нийлээд Дорж, Чимгээ хоёрын нийт чихрээс 3 дахин олон чихэртэй. Бат, Дорж хоёр нийлээд, Цэцгээ, Чимгээ хоёрын нийт чихрээс 4 дахин олон чихэртэй. Бат, Чимгээ хоёр нийлээд, Цэцгээ, Дорж хоёрын нийт чихрээс 5 дахин олон чихэртэй. Бат хамгийн цөөндөө хэдэн чихэр авч ирсэн бэ?

Бодлого VII-3.

3×3 хэмжээтэй 5 ширхэг квадратаас бүтэх дүрс өгөгджээ (зураг). Дүрсийн талбайг хагаслан хуваадаг 4 см урттай тахир шугамыг байгуул.



Бодлого VII-4. 3×3 ба 4×4 хэмжээтэй ямар ч квадратад бичигдсэн тоонуудын үржвэр 1 гарахаар 7×7 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд бутархай тоонууд бичжээ. Хүснэгтэнд бичигдсэн бүх тооны үржвэр 2017 байж болох уу?

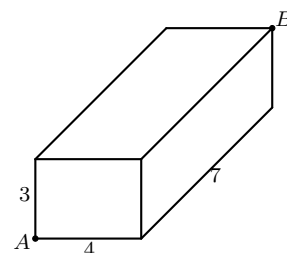
VIII анги

Бодлого VIII-1. Аль ч дараалсан 10 цифр нь бүх цифрийг нэг, нэг удаа агуулдаг олон оронтой тооны цифрүүдийн нийлбэр 2017 байв. Ийм чанартай хамгийн бага тооны эхний 10 цифрээр бүтсэн тоог ол.

Бодлого VIII-2. Бат, Цэцгээ, Дорж, Чимгээ дөрөв ангид чихэр авч иржээ (хүүхэд бүр ядаж нэг чихэртэй.) Бат, Цэцэг хоёр нийлээд Дорж, Чимгээ хоёрын нийт чихрээс 3 дахин олон чихэртэй. Бат, Дорж хоёр нийлээд, Цэцгээ, Чимгээ хоёрын нийт чихрээс 4 дахин олон чихэртэй. Бат, Чимгээ хоёр нийлээд, Цэцгээ, Дорж хоёрын нийт чихрээс 5 дахин олон чихэртэй. Бат хамгийн цөөндөө хэдэн чихэр авч ирсэн бэ?

Бодлого VIII-3.

$3 \times 4 \times 7$ хэмжээтэй тоосгоны A орой дээр байсан шоргоолж тоосгоны гадаргуугаар явж B оройд очих ёстой байв (заавал талаар явах албагүй). Шоргоолжны хамгийн богино замын уртыг ол.



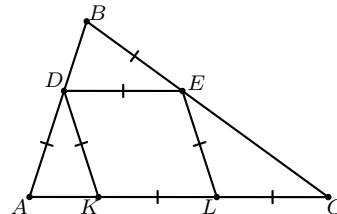
Бодлого VIII-4. $2 \leq n \leq 15$ байх $n \times n$ хэмжээтэй ямар ч квадратын бүх нүдний талаас цөөн нь будагдсан байхаар 15×15 хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Хамгийн олондоо хэдэн нүд будагдсан бэ?

IX анги

Бодлого IX-1. Самбарт 2017 ширхэг натурал тоо бичсэн байв (ижил тоонууд байж болно). Самбарт бичигдсэн тоонуудын үржвэр тэдгээрийн нийлбэрээс 2017-оор их байж болох уу?

Бодлого IX-2.

ABC гурвалжны AB тал дээр орших D цэг, BC тал дээр орших E цэг, AC тал дээр орших K, L цэгүүдийн хувьд $AD = DK = KL = LC = LE = BE = DE$ байв. ABC гурвалжны өнцгүүдийг ол.



Бодлого IX-3. Самбарт аль ч дөрвөн тооны үржвэр 30-д хуваагддаг 10 ширхэг натурал тоо бичигдсэн байжээ. Самбарт бичигдсэн аль нэг тоо нь 30-д хуваагдахыг батал.

Бодлого IX-4. n^2 тоо нь яг n ширхэг натурал тоон хуваагчтай байх бүх натурал n тоог ол.

X анги

Бодлого X-1. Самбарт аль ч дөрвөн тооны үржвэр 1001-д хуваагддаг 10 ширхэг натурал тоо бичигдсэн байжээ. Самбарт бичигдсэн аоль нэг тоо нь 1001-д хуваагдахыг батал.

Бодлого X-2. $AB > AD$ талуудтай $ABCD$ тэгш өнцөгтийн CD тал дээр E цэгийг $AB = AE$ байхаар сонгон авчээ. B оройг дайрсан тэгш өнцөгтийн AC диагоналд перпендикуляр шулуун AD шулууныг F цэгт огтлох бол $\angle AEF = 90^\circ$ гэж батал.

Бодлого X-3. Эерэг a, b тоонуудын хувьд $a + b = ab$ бол

$$\frac{a}{b^2 + 4} + \frac{a}{b^2 + 4} \geq \frac{1}{2}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого X-4. n нь тэгш натурал тоо болог. Нэг мөрөнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү, нэг баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар $n \times (n + 2)$ хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд 1-ээс $n(n + 2)$ хүртэл тоонуудыг бичиж болохыг харуул.

XI анги

Бодлого XI-1. Ямар ч α, β тоонуудын хувьд $x^2 - 2 \sin \alpha \cdot x + \sin^2 \beta = 0$ ба $x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + \cos^2 \beta = 0$ гэсэн хоёр кватрат тэгшитгэлийн ядаж нэг нь шийдтэй гэдгийг харуул.

Бодлого XI-2. $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$ бөгөөд $\angle ABC = \angle AED = \angle CAD$ байх гүдгэр $ABCDE$ таван өнцөгт өгөгджээ. ACD гурвалжныг багтаасан тойргийн төв нь BE шулуун дээр оршихыг батал.

Бодлого XI-3. Натурал n тооны натурал хуваагчийн тоог $d(n)$ гэж тэмдэглэе. Ямар ч натурал n тооны хувьд

$$n + d(1) + d(2) + \dots + d(n) \leq d(n + 1) + d(n + 2) + \dots + d(2n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого XI-4. Нэг эгнээнд 2^n ширхэг натурал тоог жагсаан бичсэн бөгөөд бичигдсэн тоонууд дотор n -ээс олонгүй ялгаатай тоо байжээ. Эгнээнд даралж бичигдсэн хэдэн тооны (нэг тоо ч байж болно) үржвэр бүтэн квадрат болохыг батал.

XII анги

Бодлого XII-1. Ямар ч α, β тоонуудын хувьд $x^2 - 2 \sin \alpha \cdot x + \sin^2 \beta = 0$ ба $x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + \cos^2 \beta = 0$ гэсэн хоёр квадрат тэгшитгэлийн ядаж нэг нь шийдтэй гэдгийг харуул.

Бодлого XII-2. Хавтгай дээр гүдгэр олон өнцөгт ба түүн дотор орших P цэг өгөгджээ. Бат AB тал руу буулгасан перпендикулярын суурь нь уг талын орших олон өнцөгтийн бүх AB талыг тоолжээ. Харин Цэцэг AP хэрчмээр $\angle A$ нь 2 хурц өнцөг болон хуваагддаг олон өнцөгтийн бүх A оройг тоолжээ. Тэр хоёрын тоолсон тоонууд тэнцүү гэдгийг харуул.

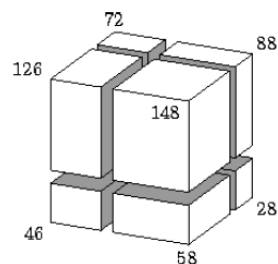
Бодлого XII-3. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд E цэгт огтлолцоно. ABC, ABD гурвалжинд багтсан тойргийн төвүүд I_1, I_2 бөгөөд $I_1 I_2$ шулуун AE, BE хэрчмүүдийг харгалзан K, L цэгүүдэд огтолно. $EK = EL$ гэж батал.

Бодлого XII-4. 10-т хуваагдахгүй ямар ч натурал n тооны хувьд n -д хуваагддаг палиндром тоо олдохыг батал. (Цифрүүдийг нь урвуу дараарллаар бичихэд өөрөө гардаг тоог палиндром тоо гэж нэрлэнэ. Жишээ нь 11, 383, 2002 тоонууд палиндром тоонууд)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1.

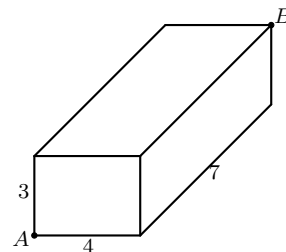
Дөрвөлжин модыг талсуудтай нь параллелээр хөрөөдөж 8 хэсэгт хуваажээ. Зурагт харагдаж байгаа 7 хэсгийн гадаргуугийн талбай нь харгалзан $46 \text{ см}^2, 58 \text{ см}^2, 28 \text{ см}^2, 126 \text{ см}^2, 148 \text{ см}^2, 88 \text{ см}^2, 72 \text{ см}^2$ байсан бол харагдахгүй байгаа хэсгийн гадаргуугийн талбай хэдэн см^2 вэ?



Бодлого ББ-2. Эрээн хотын зах дээр бүх бараа бүхэл юань үнэтэй. Нэг өглөө захын бүх барааны үнэ 1 юаниар өөрчлөгджээ. Өчигдөр 100 юаниар 9 өмд, 7 цамц аваад хариулт мөнгөтэй үлддэг байсан бол өнөөдөр авч чадахгүй болжээ. Өнөөдөр энэ 100 юаниар 2 өмд, 11 цамц аваад хариулт мөнгөтэй үлддэг бол өчигдөр авч чадахгүй байжээ. Өнөөдөр 1 өмд, 1 цамц хэдэн юаний үнэтэй вэ?

Бодлого ББ-3.

$3 \times 4 \times 7$ хэмжээтэй тоосгоны A орой дээр байсан шоргоолж тоосгоны гадаргуугаар явж B оройд очих ёстой байв (заавал талаар явах албагүй). Шоргоолжны хамгийн богино замын уртыг ол.



Бодлого ББ-4. Самбарт аль ч дөрвөн тооны үржвэр 30-д хуваагддаг 10 ширхэг натурал тоо бичигдсэн байжээ. Самбарт бичигдсэн аль нэг тоо нь 30-д хуваагдахыг батал.

Дунд ангийн багш**Бодлого ДБ-1.** Бодлого IX-4.

Бодлого ДБ-2. $\angle C = 90^\circ$ өнцөгтэй тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AK биссектрисс ба CH өндрийг татжээ. BKH гурвалжныг багтаасан тойрог AK шулууныг K цэгээс ялгаатай D цэгт огтлоно. AB, CD шулуунууд E цэгт огтлолцдог бол $AE = AC$ гэж батал.

Бодлого ДБ-3. Бодлого X-4.**Бодлого ДБ-4.** Бодлого XII-4.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиадын II Даваа

Монголын Математикийн 54-р Олимпиадын II даваа 2018 оны 3 сарын 26, 27 өдрүүдэд амжилттай зохион байгуулагдлаа.

Бодлогууд

VII анги

Бодлого VII-1. Бат, Цэцэг, Дорж гуравт нийт 100 чихэр байжээ. Эхлээд Бат 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Цэцэгт өгчээ. Дараа нь Цэцэг 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Доржид өгчээ. Эцэст нь Дорж 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Батад өгөв. Тэгэхэд Бат, Цэцэг хоёр анх байсан чихэртэйгээ ижил тооны чихэртэй болсон бол хэдэн чихэртэй болсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-2. Дараагийн тоо бүр нь өмнөх тоондоо хуваагддаг байхаар самбарт хэдэн натурал тоог нэг эгнээнд бичсэн байв. Энэ тоонуудын сүүлийн цифрүүд бүгд ялгаатай бол самбарт хамгийн олондоо хэдэн тоо бичигдсэн бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-3. Бат 1, 2, 3, 4 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Харин Цэцэг 2, 3, 4, 5 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Батын зохиосон тоо Цэцэгийн зохиосон тоог хуваадаг байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-4. Дэвхрэг анх $1 \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн хамгийн эхний нүдэнд байрлаж байв. Тэрээр нэг үсрэлтээр зүүн, баруун аль ч тийшээ 4 эсвэл 5 эсвэл 6 нүдээр харайж чадах бөгөөд тэгэхдээ тэгш өнцөгтөөс гадагш гарахгүй. Жишээ нь, эхнээсээ 5-р нүдэнд байгаа дэвхрэг нэг харайлтаар 1, 9, 10, 11-р нүднүүдэд очиж чадна. $n > 81$ үед дэвхрэг тэгш өнцөгтийн бүх нүдэнд нэг, нэг удаа бууж хамгийн сүүлийн нүдэнд очиж чадахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

VIII анги

Бодлого VIII-1. 2018-аар ихэсгэхэд цифрүүдийн нийлбэр нь 2-оор ихэсдэг хэдэн ялгаатай дөрвөн оронтой тоо байх вэ?

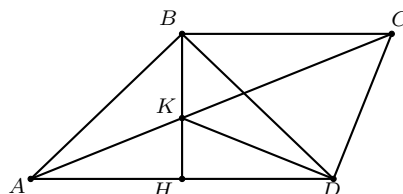
(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VIII-2. Бат 1, 2, 3, 4 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Харин Цэцэг 2, 3, 4, 5 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Батын зохиосон тоо Цэцэгийн зохиосон тоог хуваадаг байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VIII-3.

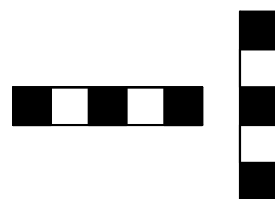
AD , BC сууриудтай $ABCD$ трапецын хувьд $AB = BC = BD$ байв. Трапецын AC диагональ BD гурвалжны BH өндөртэй K цэгт огтлолцдог бол $\angle CDK = 90^\circ$ гэдгийг батал.



(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VIII-4.

11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн аль ч n ширхэг нүдийг будахад, 1, 3, 5-р нүднүүд нь будагдсан 1×5 эсвэл 5×1 хэмжээтэй тэгш өнцөгт заавал олддог байжээ. n хамгийн цөөндөө хэд байж болох вэ?



(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

IX анги

Бодлого IX-A1. Өгөгдсөн дөрвөн ширхэг тоог хос хосоор нь үржүүлсэн зургаан үржвэрийг олоход эдгээр үржвэрүүдийн тав нь дэс дараалсан таван натурал тоо гарчээ. Үлдсэн үржвэр нь хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого IX-A2. $ABCD$ квадратын AD талын дундаж цэг M бөгөөд D цэгээс CM хэрчим рүү DP перпендикуляр буулгажээ. PC хэрчмийн дундаж цэг N бол ABN болон PBC гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого IX-A3. Хамгийн бага ямар натурал n тооны хувьд $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+n} = \frac{1}{y}$ тэгшитгэл $x \geq 2018$ байдаг натурал x, y шийдтэй байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: И. Богданов)

Бодлого IX-B1. Бат цифрийн нийлбэр нь 10 байдаг есөн оронтой тоонуудыг, харин Цэцэг цифрийн нийлбэр нь 9 байдаг арван оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B2. ABC гурвалжны AD , CE биссектриссүүдийг татсан бөгөөд AB тал дээр F цэгийг $BF = BD$ байхаар сонгон авчээ. CE , DF шулуунууд K цэгт огтлолцдог бол $KA = KD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого IX-Б3. Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{6} + 1 \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Х анги

Бодлого X-A1. a, b, c нь натурал тоонууд. $a + c$ ба $b + c$ тоонууд нь дараалсан 2 натурал тооны квадрат бол $ab + c$ ба $ab + a + b + c$ нь мөн дараалсан 2 натурал тооны квадрат гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-A2. Зүүн дээд булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратын бүх нүд нь хар өнгөтэй, харин баруун доод булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратын бүх нүд нь цагаан өнгөтэй байхаар 10×10 хэмжээтэй хүснэгтийн бүх нүдийг хар, цагаан өнгөөр будсан байв. Хүснэгтийн ямар ч 5×5 хэмжээтэй квадрат дотор байрлах хар ба цагаан өнгийн нүдний тооны зөрүүг (ихээс нь багыг хассан ялгавар) тооцоолжээ. Энэ зөрүүнүүдийн хамгийн бага нь хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-A3. ABC гурвалжны B өнцгийн биссектрисс дээр дурын D цэгийг сонгон авчээ. D цэгийг дайрсан AC талтай параллель шулуун AB, BC шулуунуудтай S, R цэгт огтлолцоно. DA, DC шулуунууд ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин P, Q цэгт огтолдог бол R, Q, P, S цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого X-B1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC тал дээр D цэг сонгож авчээ. ABD гурвалжныг багтаасан тойрог AC талыг Q цэгт, ACD гурвалжныг багтаасан тойрог AB талыг P цэгт огтолжээ. APQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэвэл $OD \perp BC$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого X-B2. $xyz = 1$ байх эерэг x, y, z тоонуудын хувьд

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 + 2\left(\frac{y+z}{2} - x\right)^3$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодлого X-B3. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ хэлбэртэй тоог *факториал тоо* гэж нэрлэнэ. 100-аас их дурын натурал тоог үржвэр нь факториал тоо байдаг хэдэн ялгаатай натурал тооны нийлбэрт задалж болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

XI анги

Бодлого XI-A1. Натурал a, b, c тоонуудын хувьд $3^a + 3^b + 3^c$ нийлбэр бүтэн квадрат байсан бол $a = b = c$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-A2. ABC гурвалжны BC тал дээр P цэгийг сонгон авчээ. $\angle APB$ ба $\angle APC$ өнцгийн биссектриссүүд нь $\angle BAC$ өнцгийн гадаад биссектрисстэй харгалзан X ба Y цэгт огтлолцдог байв. XPY гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулууныг P цэгээс ялгаатай Q цэгт огтлолцдог бол $\angle BAP = \angle CAQ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-A3. $xyz = 1$ байх эерэг x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3 \geq 2(x + y + z)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодлого XI-B1. $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $n \geq 0$ үед

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2^{2^n} - 1}$$

байдаг дарааллын хувьд $a_{54} < 1$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-B2. Хурц өнцөгт элдэв талт ABC гурвалжны AD, BE, CF өндрүүдийг татжээ. DA цацраг дээр D_1 цэгийг $DD_1 = 2 \cdot DA$ байхаар, EB цацраг дээр E_1 цэгийг $EE_1 = 2 \cdot EB$ байхаар, CF цацраг дээр F_1 цэгийг $FF_1 = 3 \cdot CF$ байхаар тус тус сонгож авав. $\angle D_1F_1E_1 = \angle ACB$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого XI-B3. Нүднүүд нь улаан, хөх, ногоон 3 өнгөөр будагдсан $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгт өгөгджээ. Нэг удаагийн үйлдлээр ялгаатай өнгөтэй хөрш (ерөнхий талтай) 2 нүдийг энэ 2 нүдний өнгөөс өөр 3 дахь өнгөөр будаж болно (жишээ нь, улаан, хөх өнгөтэй хөрш хоёр нүдийг ногоон өнгөөр будна). Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар өгөгдсөн ямар ч хүснэгтийн бүх нүдийг ижил өнгөтэй болгож чаддаг байх бүх n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

XII анги

Бодлого XII-A1. $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ялгавартай арифметик прогресс үүсгэдэг x, y, z тоонуудын хувьд $\frac{1}{\cos x}, \frac{3}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$ тоонууд нь мөн арифметик прогресс үүсгэж байв. $\cos^2 y$ -ийг ол. (Тоонууд нь өгсөн энэ дарааллаар арифметик прогресс үүсгэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: Физтех)

Бодлого XII-A2. Натурал n тоо өгөгджээ. $k \geq 2$ байх ямар ч натурал k тоог сонгон авахад, $n \cdot k^3 - 1$ тоо нь k -д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг 1-ээс ялгаатай хуваагчтай байв. n нь ямар нэг натурал тооны куб гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XII-A3. Хурц өнцөгт элдэв талт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгээс гурвалжны A өнцгийн дотоод ба гадаад биссектрисс рүү HD , HE перпендикулярууд буулгажээ. $\angle BDC + \angle BEC = 180^\circ$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XII-B1. $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_n = a_{n-1} + \left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)^2$$

байдаг дарааллын хувьд $a_{2018} < \frac{3}{2}$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XII-B2. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны AB , BC , CA талуудыг харгалзан C_1 , A_1 , B_1 цэгүүдээр шүргэнэ. AC_1B_1 гурвалжныг багтаасан тойрог ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой A цэгээс ялгаатай T цэгээр огтлолцоно. TA_1 шулуун нь $\angle BTC$ өнцгийн биссектрисс гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого XII-B3. Бодлого XI-B3.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-A1. Сурагч өөрийн бүх мөнгөний 45%-иар 4 ширхэг үзэг, 51%-иар 1 ширхэг үзэг, 2 ширхэг ном авчээ. Үлдсэн мөнгөөр ахин 1 үзэг, 1 ном авах гэхэд 21700 төгрөг дутав. Үзэг, ном тус бүр ямар үнэтэй вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-A2. Буудлын нэг давхарын урт коридорын хоёр талд 10, 10-н зочны өрөө байжээ. Энэ өрөөнүүдээс аль ч 2 нь хөрш биш 6 өрөөг хэдэн ялгаатай аргаар сонгож болох вэ? Өөд өөдөөсөө харсан 2 өрөөг хөрш гэж тооцохгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

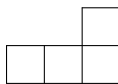
Бодлого ББ-A3. Самбарт 4 ширхэг натурал тоо бичсэн байв. Энэ тоонуудын хос бүрийнх нь хамгийн их ерөнхий хуваагчийг олоход 1, 2, 3, 4, 5, k ($k > 5$) гэсэн тоонууд гарчээ. k -ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

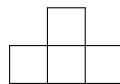
Бодлого ББ-B1. 54 ширхэг 4 цифр, 53 ширхэг 2 цифр, 1 ширхэг 6 цифрийг ашиглан 108 оронтой бүтэн квадрат тоо зохиож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б2. 10×10 хүснэгтийг



ба



дүрсүүдэд хувааж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б3. Бодлого IX-Б1.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. Бодлого XII-А1.

Бодлого ДБ-А2. 2018 зэргийн, бүхэл коэффициенттэй $P(x)$ олон гишүүнт өгөгджээ.

$P(a) + P(b)$ нийлбэр нь $a + b$ нийлбэрт хуваагддаг байх ялгаатай натурал a, b тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-А3. $0 < a, b, c < 1$ байх дурын a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^2b}{1-a} + \frac{b^2c}{1-b} + \frac{c^2a}{1-c} \geq \frac{3abc}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ДБ-Б1. Бодлого XII-Б1.

Бодлого ДБ-Б2. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны AB, BC, CA талуудыг харгалзан F, D, E цэгүүдээр шүргэнэ. AEF, BFD, CDE гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой харгалзан K, M, N цэгүүдээр ($K \neq A, M \neq B, N \neq C$) огтлолцоно. KD, ME, NF шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого ДБ-Б3. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн ялгаатай хуваалтын тоог A_n гэе. Жишээлбэл, $n = 3$ үед

$$\{1, 2, 3\}; \{1, 2\} \cup \{3\}; \{1, 3\} \cup \{2\}; \{2, 3\} \cup \{1\}; \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$

хуваалтууд байгаа тул $A_3 = 5$ юм. Харин нэг хэсэгт дараалсан хоёр тоо ороогүй байдаг $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн хуваалтын тоог B_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 1$ үед $A_n = B_{n+1}$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолтууд

VII анги

Бодлого VII-1. Бат, Цэцэг, Дорж гуравт нийт 100 чихэр байжээ. Эхлээд Бат 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Цэцэгт өгчээ. Дараа нь Цэцэг 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Доржид өгчээ. Эцэст нь Дорж 1 чихрээ идээд, үлдсэн чихрийн талыг Батад өгөв. Тэгэхэд Бат, Цэцэг хоёр анх байсан чихэртэйгээ ижил тооны чихэртэй болсон бол хэдэн чихэртэй болсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: Бат 49 чихэртэй, Цэцэг 23 чихэртэй.

Бат, Цэцэг, Доржид анх байсан чихрийн тоог харгалзан x, y, z гэж тэмдэглэе. Доржид чихэр өгсний дараа Цэцэг чихэртэй үлдсэн тул тэрээр чихрийг Доржид өгсөн байна. Цэцэгийн "орлого зарлага"-ыг тооцвол, $\frac{x-1}{2} = y + 1$ гэж гарна. Хүүхдүүд 3 чихэр идсэн тул хамгийн сүүлд Дорж $z - 3$ чихэртэй байх ёстой. Энэ тоо нь бас Батын Доржоос авсан чихрийн тоо юм. Батын "орлого зарлага"-ыг тооцвол, $z - 3 = \frac{x-1}{2}$ гэж гарна.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ \frac{x-1}{2} = y + 1 \\ z - 3 = \frac{x-1}{2} \end{cases}$$

систем тэгшитгэлээс $x = 49, y = 23, z = 28$ гэж олдоно. Мөн энэ бодлогыг Батын чихрийн тооны бүх боломжийг шавхаж бодож болно.

Бодлого VII-2. Дараагийн тоо бүр нь өмнөх тоондоо хуваагддаг байхаар самбарт хэдэн натурал тоог нэг эгнээнд бичсэн байв. Энэ тоонуудын сүүлийн цифрүүд бүгд ялгаатай бол самбарт хамгийн олондоо хэдэн тоо бичигдсэн бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: 9тоо. Самбарт 5-аар төгссөн тоо бичигдсэн бол энэ тооны ард зөвхөн 0 цифрээр төгссөн тоо орох боломжтой бөгөөд цааш тоо бичих боломжгүй. Мөн 5-аар төгссөн тоо нь сондгой тоо учраас уг тооны өмнө зөвхөн сондгой тоонууд бичигдэнэ. Тэгэхлээр энэ тохиолдолд самбарт 2, 4, 6, 8 цифрээр төгссөн тоо огт бичигдэхгүй.

1, 3, 9, 27, 54, 108, 216, 432, 2160

гэсэн 9 тоо бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодлого VII-3. Бат 1, 2, 3, 4 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Харин Цэцэг 2, 3, 4, 5 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Батын зохиосон тоо Цэцэгийн зохиосон тоог хуваадаг байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: болохгүй.

Батын зохиосон тоог A , Цэцэгийн зохиосон тоог B гэж тэмдэглэе. $A \geq 11223344$ ба $B \leq 55443322$ гэдгээс $B < 5A$ гэж гарна. Тэгэхлээр A нь B -г хуваадаг бол $\frac{B}{A}$ ноогдвор нь зөвхөн 2, 3, 4 байх боломжтой. 9-д хуваагдах тооны шинжүүрээр тоо нь өөрийн цифрийн нийлбэртэй 9-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгнө. A ба B -ийн цифрийн нийлбэрүүд нь 20 ба 28 учраас 9-д

хуваахад харгалзан 2 ба 1 гэсэн үлдэгдэл өгнө. Эндээс A , B -г хуваадаг бол $\frac{B}{A}$ ноогдворыг 9-д хуваахад заавал 5 үлдэгдэлтэй гэдгийг хялбархан харж болно. Гэтэл 2, 3, 4 тоонуудыг 9-д хуваахад 5 үлдэгдэл өгөхгүй.

Бодлого VII-4. Дэвхрэг анх $1 \times n$ хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн хамгийн эхний нүдэнд байрлаж байв. Тэрээр нэг үсрэлтээр зүүн, баруун аль ч тийшээ 4 эсвэл 5 эсвэл 6 нүдээр харайж чадах бөгөөд тэгэхдээ тэгш өнцөгтөөс гадагш гарахгүй. Жишээ нь, эхнээсээ 5-р нүдэнд байгаа дэвхрэг нэг харайлтаар 1, 9, 10, 11-р нүднүүдэд очиж чадна. $n > 81$ үед дэвхрэг тэгш өнцөгтийн бүх нүдэнд нэг, нэг удаа бууж хамгийн сүүлийн нүдэнд очиж чадахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Тэгш өнцөгтийн нүднүүдийг зүүн талаас эхлэн 1, 2, ..., n гэж дугаарлая.

x дугаартай нүднээс баруун тийг 5, зүүн тийш 4 нүдээр харайх үсрэлтийг ээлжлэн хийсээр

$$x \rightarrow x+5 \leftarrow x+1 \rightarrow x+6 \leftarrow x+2 \rightarrow x+7 \leftarrow x+3 \rightarrow x+8 \leftarrow x+4 \rightarrow x+9$$

гэж завсрын нүднүүдэд нэг, нэг удаа бууж $x+9$ дугаартай нүдэнд очиж чадна. Үүнтэй нэгэн адилаар x дугаартай нүднээс баруун тийш 6, зүүн тийш 5 нүдээр харайх үсрэлтийг ээлжлэн хийсээр

$$x \rightarrow x+6 \leftarrow x+1 \rightarrow x+7 \leftarrow x+2 \rightarrow x+8 \leftarrow x+3 \rightarrow x+9 \leftarrow x+4 \rightarrow x+10 \leftarrow x+5 \rightarrow x+11$$

гэж завсрын нүднүүдэд нэг, нэг удаа бууж $x+11$ дугаартай нүдэнд очиж чадна. Нэгэнт энэ 2 аргаар харайхад завсрын нүднүүдэд нэг, нэг удаа бууж байгаа тул тэгш өнцөгтийн эхний ба сүүлийн нүдний хоорондох зай болох $n-1 = m > 80$ тоо 9 ба 11-ээр задалж болохыг харуулахад хангалттай.

m нь 9 ба 11-ээр задрахад $m+9$ тоо нь мөн задарна. Тэгэхлээр 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89 тоонуудыг 9 ба 11-ээр задлахад хангалттай. Эдгээр тоонуудыг дараах байдлаар 9 ба 11-ээр задалж болдог.

$$\begin{array}{lll} 81 = 9 \cdot 9 & 82 = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 11 & 83 = 8 \cdot 9 + 11 \\ 84 = 2 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 85 = 7 \cdot 9 + 2 \cdot 11 & 86 = 9 + 7 \cdot 11 \\ 87 = 6 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 88 = 8 \cdot 11 & 89 = 5 \cdot 9 + 4 \cdot 11 \end{array}$$

VIII анги

Бодлого VIII-1. 2018-аар ихэсгэхэд цифрүүдийн нийлбэр нь 2-оор ихэсдэг хэдэн ялгаатай дөрвөн оронтой тоо байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. **Хариу: 4966 ширхэг.**

Цаашид x тооны цифрийн нийлбэрийг $S(x)$ гэж тэмдэглэе. Хоёр тоог нэмэх үед орон шилжвэл цифрүүдийн нийлбэр нь 9-өөр багасдаг. 2018-ын цифрийн нийлбэр 11 учраас $S(\overline{abcd} + 2018) = S(\overline{abcd}) + 2$ байхын тулд $\overline{abcd}$, 2018 тоонуудыг оронгоор нэмэхэд ганц орон шилжих ёстой. Зуутын орон шилжвэл аравтын орон бас шилжих ёстой. Тэгэхлээр шилжих орон нь нэгж, аравт, мянганы орон дээр шилжинэ.

Ганцхан нэгжийн орон дээр шилжихийн тулд $d \geq 2$, $c \leq 7$, $b \leq 9$, $a \leq 7$ байх ёстой.
Ганцхан нэгжийн орон дээр шилжихийн тулд $d \geq 1$, $c = 9$, $b \leq 8$, $a \leq 7$ байх ёстой.

Ганцхан нэгжийн орон дээр шилжихийн тулд $d \geq 1$, $c \leq 8$, $b \leq 9$, $a \geq 8$ байх ёстой. Эндээс $\overline{abcd}$ тоо нь

$$7 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 + 7 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 = 4480 + 126 + 36 = 4966$$

боломжтой гэж олдоно.

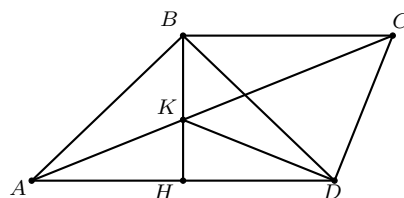
Бодлого VIII-2. Бат 1, 2, 3, 4 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Харин Цэцэг 2, 3, 4, 5 цифрүүдийг 2, 2 удаа ашиглан 8 оронтой тоо зохиожээ. Батын зохиосон тоо Цэцэгийн зохиосон тоог хуваадаг байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. VII-3 бодлогыг хар.

Бодлого VIII-3.

AD , BC сууриудтай $ABCD$ трапецын хувьд $AB = BC = BD$ байв. Трапецын AC диагональ BD гурвалжны BH өндөртэй K цэгт огтлолцдог бол $\angle CDK = 90^\circ$ гэдгийг батал.



(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Адил хажуут CBD гурвалжны BM өндрийг татъя. Адил хажуут ABC гурвалжны суурийн өнцгийг $\angle BCA = \angle BAC = \alpha$ гэж тэмдэглэе. Солбисон өнцгүүд учраас $\angle CAD = \angle BCA$ бөгөөд эндээс $\angle BAD = \angle BDA = 2\alpha$ гэж олдоно. Солбисон өнцгүүд учраас $\angle CBD = \angle BDA = 2\alpha$ юм. Эндээс адил хажуут CBD гурвалжны суурийн өнцөг $\angle CDB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BDA) = 90^\circ - \alpha$ гэж олдоно. K цэг нь ABD гурвалжны тэгш хэмийн тэнхлэг дээр орших тул $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$ байна. Иймд

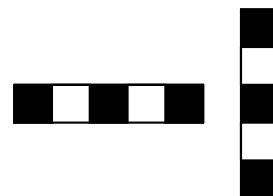
$$\angle CDK = \angle CDB + \angle BDK = (90^\circ - \alpha) + \alpha = 90^\circ$$

юм. Мөн өөрөөр BH шулууны хувьд C цэгтэй тэгш хэмтэй цэгийг E гэж тэмдэглэе. D , K , E цэгүүд нэг шулуун дээр орших бөгөөд BM хэрчим нь EDC гурвалжны дундаж шугам гэдгийг ашиглан баталж болно.

VIII анги

Бодлого VIII-4.

11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн аль ч n ширхэг нүдийг будахад, 1, 3, 5-р нүднүүд нь будагдсан 1×5 эсвэл 5×1 хэмжээтэй тэгш өнцөгт заавал олддог байжээ. n хамгийн цөөндөө хэд байж болох вэ?



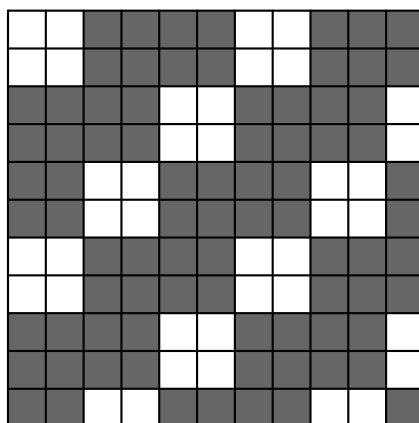
(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. **Хариу: 82 нүд.**

1×5 хэмжээтэй хүснэгтийн 1, 3, 5-р нүднүүдийг хамтад нь "саланги гурвал" гэж нэрлэе. 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн голын нүднээс бусад хэсгийг 4 ширхэг 5×6 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хувааж болно. 5×6 хэмжээтэй тэгш өнцөгтийн мөр бүрт 2 ширхэг саланги гурвалыг огтлолцохгүйгээр багтааж болно (тэр мөрийн 1, 3, 5-р нүднүүд ба 2, 4, 6-р нүднүүд).

Тэгэхлээр 11×11 хэмжээтэй хүснэгтийн голын нүднээс бусад хэсгийг хоорондоо үл огтлолцох $4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$ ширхэг саланги гурвал болгон хувааж болж байна. Хүснэгтийн 82 нүдийг будахад голын нүднээс гадна ядаж 81 нүд будагдах бөгөөд Дирилейн зарчмаар энэ 81 ширхэг нүдний аль нэг 3 нь нэг салангид гурвалд будагдсан байна. Өөрөөр хэлбэл, тэр саланги гурвалын 3 нүд нь гурвуулаа будагтай байна.

Зурагт үзүүлсэн байдлаар хүснэгтийн 81 ширхэг нүдийг будахад 3 нүд нь гурвуулаа будагтай саланги гурвал олдохгүй.



IX анги

Бодлого IX-A1. Өгөгдсөн дөрвөн ширхэг тоог хос хосоор нь үржүүлсэн зургаан үржвэрийг олоход эдгээр үржвэрүүдийн тав нь дэс дараалсан таван натурал тоо гарчээ. Үлдсэн үржвэр нь хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{12}{5}$.

Өгөгдсөн дөрвөн тоогоо a, b, c, d гэвэл зургаан үржвэрээ $(ab, cd), (ac, bd), (ad, bc)$ гэсэн үржвэр нь тэнцүү гурван хосод хувааж болно. Иймд дэс дараалсан таван натурал тоогоо $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ гэвэл эндээс хоёрынх нь үржвэр үлдсэн хоёрынхоо үржвэртэй тэнцүү байх дөрвөн тоог сонгож болно.

- $n(n+4) = (n+1)(n+2)$ бол $n = 2$
- $n(n+4) = (n+1)(n+3)$ натурал шийдгүй
- $n(n+4) = (n+2)(n+3)$ натурал шийдгүй
- $n(n+3) = (n+1)(n+2)$ натурал шийдгүй
- $(n+1)(n+4) = (n+2)(n+3)$ натурал шийдгүй

гэдгээс $n = 2$ болох ба энэ үед тав дахь натурал тоон үржвэр нь $n+3$, үлдсэн үржвэр нь $\frac{n(n+4)}{n+3} = \frac{12}{5}$ байхаас өөр боломжгүй.

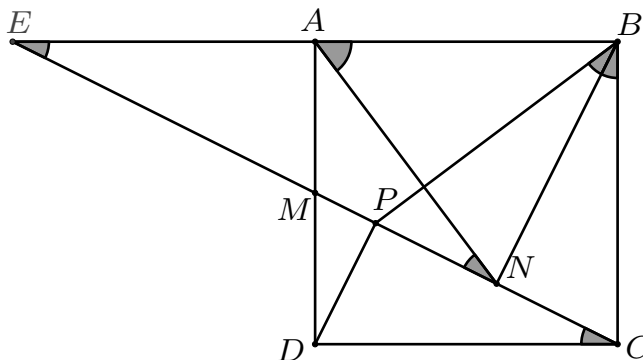
$\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}, \sqrt{10}$ тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана. Иймд хариу $\frac{12}{5}$ байна.

Бодлого IX-A2. $ABCD$ квадратын AD талын дундаж цэг M бөгөөд D цэгээс CM хэрчим рүү DP перпендикуляр буулгажээ. PC хэрчмийн дундаж цэг N бол ABN болон PBC гурвалжнуудын талбай тэнцүү гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $\angle PCD = \alpha$ гэе. $\triangle CPD \sim \triangle CDM$ гэдгээс $\frac{MD}{CD} = \frac{DP}{PC} = \frac{1}{2}$ тул $DP = PN = NC$ ба $\angle NCB = \angle PDC$ тул ТӨТ шинжээр $\triangle DPC = \triangle CNB$ болно. Иймд $\angle BNC = 90^\circ$ ба $PN = NC$ тул BPC адил хажуут гурвалжин болов. Эндээс $\angle PBC = 2 \cdot \angle NBC = 2\alpha$ болно.

CM шулууны BA шулуунтай огтлолцох цэгийг E гэвэл $AM = MD$, $\angle EMA = \angle DMC$, $\angle EAM = \angle MDC = 90^\circ$ тул $\Theta\Theta$ шинжээр $\triangle EAM = \triangle CDM$ болох ба эндээс $EA = DC = AB$ болж AN нь ENA тэгш өнцөгт гурвалжны медиан болов. Иймд $EA = AN$ болох тул $\angle BAN = \angle AEN + \angle ANE = 2 \cdot \angle AEN = 2 \cdot \angle MCD = 2\alpha$ болов. Мөн $AB = AN$ тул NAB гурвалжин мөн адил хажуут гурвалжин болно. $AB = AN = PB = BC$ ба орой нь өнцгүүд тэнцүү тул $\Theta\Theta$ шинжээр $\triangle ANB = \triangle PBC$ болох эдгээр гурвалжны талбай тэнцүү болох нь батлагдав.



Бодлого IX-A3. Хамгийн бага ямар натурал n тооны хувьд $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+n} = \frac{1}{y}$ тэгшитгэл $x \geq 2018$ байдаг натурал x, y шийдтэй байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: И. Богданов)

Бодолт. Хариу: 65. x, n тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч нь d бөгөөд $x = d \cdot x_1$, $n = d \cdot n_1$ гэж үзье. Үүнийг өгсөн тэгшитгэлд орлуулахад

$$y = \frac{d(x_1 + n_1)x_1}{2x_1 + n_1}$$

гэж олдоно. x_1, n_1 тоонууд харилцан анхны тул x_1 ба $x_1 + n_1$ нь $2x_1 + n_1$ тоотой харилцан анхны. Иймд y нь бүхэл тоо байхын тулд d нь заавал $2x_1 + n_1$ тоонд хуваагдах ёстой. Тэгэхлээр $d \geq 2x_1 + n_1 = \frac{2x+n}{d}$ буюу $d^2 \geq 2x + n$ байна. Энэ үнэлгээнээс $x \geq 2018$ үед $d^2 > 4036$ буюу $d \geq 64$ гэж гарна. n нь d -д хуваагдах тул эндээс $n \geq 64$ гэж гарна.

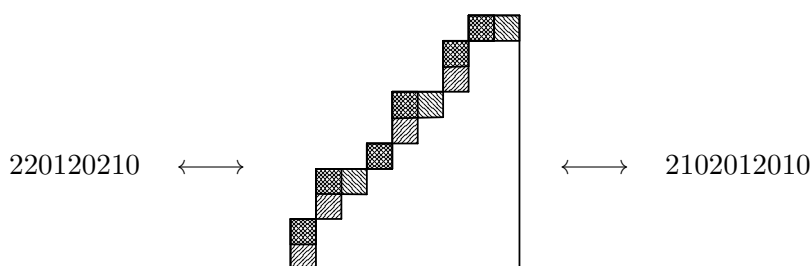
Хэрэв $n = d = 64$ бол $x \geq 2018$ учраас $x_1 = \frac{x}{d} \geq \frac{2018}{64} > 31$ болно. Нөгөө талаас, $64 = d \geq 2x_1 + n_1$ гэдгээс $x_1 = \frac{64-n_1}{2} < 32$ гэж гарна. Энэ зөрчил нь байж болохгүйг харуулж байна. $n = 65$ үед $x = 65 \cdot 32 = 2080$, $y = 32 \cdot 33 = 1056$ тоонууд өгсөн тэгшитгэлийг хангана.

Бодлого IX-B1. Бат цифрийн нийлбэр нь 10 байдаг есөн оронтой тоонуудыг, харин Цэцэг цифрийн нийлбэр нь 9 байдаг арван оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: Цэцэг Батаас нэгээр олон тоо тоолсон..

Комбинаторик бодолт: Цифрүүдийн нийлбэр нь 10 байдаг есөн оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ тоонд гишгүүрүүдийн өндөр нь $a_1, a_2, \dots, a_9$ байдаг 9 урттай, өсдөг, эхний гишгүүр ядаж 1 өндөртэй, сүүлийн гишгүүр нь газраас 10 өндөртэй шат харгалзуулж болно. $a_1 \leq 9$ тул 10, 0, ..., 0 гишгүүрүүдтэй шат гарахгүй ба бусад шат яг нэг удаа гарч ирнэ.



Шатыг цагийн зүүний дагуу 90° эргүүлбэл 10 урттай урууддаг шат гарах ба эхний гишгүүр нь газраас 9 өндөртэй, сүүлийн гишгүүр ядаж нэг өндөртэй байна. Гишгүүрүүдийн өндрийг $b_{10}, b_9, \dots, b_1$ гэвэл $\overline{b_1 b_2 \dots b_{10}}$ нь цифрүүдийн нийлбэр нь 9 байдаг 10 оронтой тоо гарна. Энэ харгалзаа харилцан нэг утгатай. Иймд Цэцэг Батаас нэгээр олон тоо тоолсон.

Тоолдог бодолт: Цифрүүдийн нийлбэр нь 10 байдаг есөн оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_9}$ тоонд 17 урттай $\underbrace{1 \dots 1}_{a_1-1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_2} 0 1 \dots 10 \underbrace{1 \dots 1}_{a_9}$ тоог нэг утгатай харгалзуулж болно. Ингэхэд $10, 0, \dots, 0$ дараалалд харгалзах $\underbrace{1 \dots 1}_9 0 \underbrace{\dots 0}_8$ тооноос бусад бүх тоо яг нэг удаа гарч ирнэ. Иймд Батын тоолсон тоо $\binom{17}{8} - 1$ байна. Мөн ижлээр Цэцгийн тоолсон тоо $\binom{17}{9} = \binom{17}{8}$ байна. Иймд Цэцэг Батаас нэгээр олон тоо тоолсон.

Бодлого IX-Б2. ABC гурвалжны AD, CE биссектриссүүдийг татсан бөгөөд AB тал дээр F цэгийг $BF = BD$ байхаар сонгон авчээ. CE, DF шулуунууд K цэгт огтлолцдог бол $KA = KD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$ гэвэл $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ болно. $BD = BF$ тул $\angle BDF = \angle BFD$. Эндээс $180^\circ = 2\beta + 2\angle BDF$ буюу $\angle BDF = 90^\circ - \beta$ байна. CK нь биссектрисс гэдгээс $\angle DKC = \angle KDB - \angle KCB = 90^\circ - \beta - \gamma = \alpha$ байна. Мөн AD нь биссектрисс тул $\angle DAC = \alpha = \angle DKC$ болно. Эндээс $AKDC$ нь тойрогт багтах ба CE нь биссектрисс гэдгээс $KA = KD$ болж батлагдана.

Бодлого IX-Б3. Эерэг бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{6} + 1 \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт. Дурын эерэг a, b тоонуудын хувьд

$$a^3 + b^3 + 4 = a^3 + b^3 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 6\sqrt[6]{a^3 b^3} = 6\sqrt{ab} = 12 \frac{ab}{2\sqrt{ab}} \geq 12 \frac{ab}{a+b}$$

болох ба үүнтэй адилаар $b^3 + c^3 + 4 \geq 12 \frac{bc}{b+c}$ ба $c^3 + a^3 + 4 \geq 12 \frac{ca}{c+a}$ болно. Эдгээрийг нэмэхэд бодлогын тэнцэтгэл биш батлагдана. Тэнцэтгэл $a = b = c = 1$ үед биелнэ.

Х анги

Бодлого X-A1. a, b, c нь натурал тоонууд. $a + c$ ба $b + c$ тоонууд нь дараалсан 2 натурал тооны квадрат бол $ab + c$ ба $ab + a + b + c$ нь мөн дараалсан 2 натурал тооны квадрат гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. $a + c = x^2$ бөгөөд $b + c = (x + 1)^2$ гэж үзье. Сүүлийн нөхцөлөөс эхний нөхцөлийг хасвал $b - a = 2x + 1$ буюу $b = a + 2x + 1$ гэж гарна. Иймд

$$ab + c = a(a + 2x + 1) + c = a^2 + 2ax + a + c = a^2 + 2ax + x^2 = (a + x)^2$$

$ab + a + b + c = a(a + 2x + 1) + a + b + c = a^2 + 2ax + 2a + b + c = a^2 + 2ax + 2a + (x + 1)^2 = (a + x + 1)^2$ болно. Өөрөөр $ab + c = (b - x - 1)^2, ab + a + b + c = (b - x)^2$ гэж баталж бас болно.

Бодлого Х-А2. Зүүн дээд булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратын бүх нүд нь хар өнгөтэй, харин баруун доод булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратын бүх нүд нь цагаан өнгөтэй байхаар 10×10 хэмжээтэй хүснэгтийн бүх нүдийг хар, цагаан өнгөөр будсан байв. Хүснэгтийн ямар ч 5×5 хэмжээтэй квадрат дотор байрлах хар ба цагаан өнгийн нүдний тооны зөрүүг (ихээс нь багыг хассан ялгавар) тооцоолжээ. Энэ зөрүүнүүдийн хамгийн бага нь хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Зүүн дээд булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратыг A гэж, баруун доод булангийн 5×5 хэмжээтэй квадратыг B гэж тэмдэглэе. 5×5 хэмжээтэй дурын X квадратад байгаа хар өнгийн нүдний тооноос цагаан нүдний тоог хассан ялгаврыг $f(X)$ гэж тэмдэглэе.

Тухайлбал, $f(A) = 25$ ба $f(B) = -25$ юм. X квадратыг дээшээ, доошоо эсвэл хажуу тийг нэг нүдээр зөөхөд гарах квадратыг X' гэж тэмдэглээд, $f(X), f(X')$ тоонууд ямар хамааралтайг сонирхоё. X квадратаас X' квадратад шилжихэд 5 нүд хасагдаж, өөр 5 нүд нэмэгдэх тул хар, цагаан нүдний тоонууд хамгийн ихдээ 5-аар өөрчлөгдөнө. Иймд

$$|f(X') - f(X)| \leq 10$$

байна.

Одоо A квадратаас дээрх шилжилтийг хийсээр B квадратад хүрч очъё (ямар ч замаар очиж болно). Анх $f(A) = 25$ утга зэрэг байгаад сөрөг $f(B) = -25$ гэсэн утгад хүрсэн тул ингэж очих шилждэг C, D квадратууд тааралдана. $f(C) > 0, f(D) < 0$ бөгөөд

$$|f(C) - f(D)| = f(C) + (-f(D)) \leq 10$$

тул $f(C), -f(D)$ тоонуудын аль нэг нь 5-аас хэтрэхгүй тоо байна. Үүгээр хар, цагаан нүдний зөрүү нь 5-аас хэтрэхгүй квадрат заавал олдох нь батлагдав.

Хүснэгтийн нүднүүдийг зурагт үзүүлсэн байдлаар будахад $f(X)$ ялгавар нь зөвхөн

$$\begin{array}{cccccc} 25 - 0; & 24 - 1; & 22 - 3; & 19 - 6; & 15 - 10; \\ 10 - 15; & 6 - 19; & 3 - 22; & 1 - 24; & 0 - 25; \end{array}$$

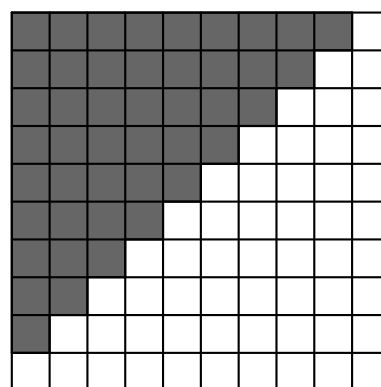
гэсэн утгуудыг авна гэдгийг төвөггүй харж болно.

Бодлого Х-А3. ABC гурвалжны B өнцгийн биссектрис дээр дурын D цэгийг сонгон авчээ. D цэгийг дайрсан AC талтай параллель шулуун AB, BC шулуунуудтай S, R цэгт огтлолцоно. DA, DC шулуунууд ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг дахин P, Q цэгт огтлолдог бол R, Q, P, S цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $AC \parallel RS$ тул $\angle RDC = \angle ACD = \angle ACQ = \angle ABQ$ тул $SBQD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Үүнтэй адилаар $RBPD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

BD шулуун болон ω тойргийн огтлолцлын цэгийг X гэвэл $\angle AXB = \angle ACB = \angle DRB$ ба $\angle ABX = \angle ABD = \angle DBR$ тул $\triangle ABX \sim \triangle DBR$ болов.



Эндээс $\angle RPB = \angle RDB = \angle XAB = \angle XPB$ болох тул P, X, R цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Үүнтэй адилаар S, X, Q цэгүүд 1 шулуун дээр оршино. Огтлогчийн теоремоор $SBQD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд

$$SX \cdot XQ = BX \cdot XD$$

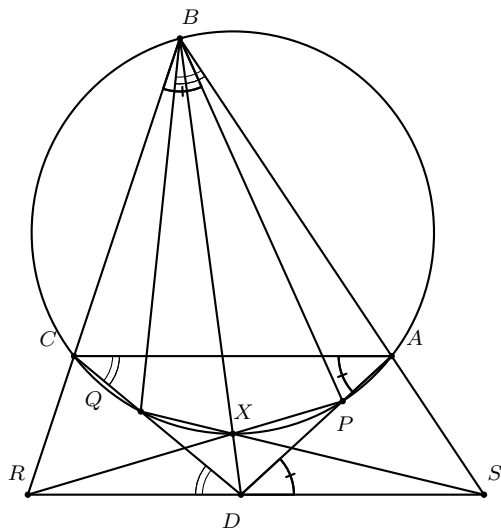
ба $BPDR$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд

$$PX \cdot XR = BX \cdot XD$$

болно. Иймд

$$SX \cdot XQ = PX \cdot XR$$

болох ба эндээс $PQRS$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана.

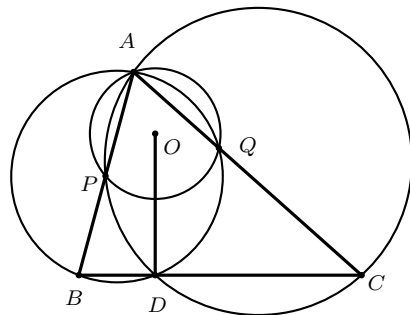


Бодлого Х-Б1. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC тал дээр D цэг сонгож авчээ. ABD гурвалжныг багтаасан тойрог AC талыг Q цэгт, ACD гурвалжныг багтаасан тойрог AB талыг P цэгт огтолжээ. APQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэвэл $OD \perp BC$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт.

$APDC$ ба $AQDB$ 4 өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс $\angle CDQ = \angle QAP = \angle BDP$ байна. Иймд $\angle PDQ = 180^\circ - 2\angle QAP$ болох ба O цэг нь APQ гурвалжныг багтаасан тойргийн төв гэдгээс $\angle QOP = 2\angle QAP$ байна. Эндээс $OPDQ$ 4 өнцөгт тойрогт багтах ба $OQ = OP$ тул $\angle QDO = \angle PDO$ болно. Иймд $\angle ODB = 90^\circ$ болж батлагдана.



Бодлого Х-Б2. $xyz = 1$ байх эерэг x, y, z тоонуудын хувьд

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 + 2\left(\frac{y+z}{2} - x\right)^3$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодолт. $x > 0$ ба $y + z > 0$ тул

$$\frac{4}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 2\left(\frac{y+z}{2} - x\right)^3\right) = 2x((x-y)^2 + (x-z)^2) + (y+z)(y-z)^2 \geq 0$$

байна. Тэнцэтгэл $x = y = z = 1$ үед биелнэ.

Бодлого Х-БЗ. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ хэлбэртэй тоог *факториал тоо* гэж нэрлэнэ. 100-аас их дурын натурал тоог үржвэр нь факториал тоо байдаг хэдэн ялгаатай натурал тооны нийлбэрт задалж болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. A_n -ээр $1 + 2 + \dots + n$ нийлбэрийг, B_n -ээр $1 \cdot 2 + 3 + \dots + n$ нийлбэрийг тус тус тэмдэглэе. $A_n = B_n + 1$ байх ба ямар ч натурал N тооны хувьд $A_n \leq N < A_{n+1}$ байх n дугаар цор ганц оршин байна. N тоог үржвэр нь $(n-1)!$ эсвэл $n!$ байх ялгаатай хэсэг тооны нийлбэрт задалж болохыг үзүүлэе.

- (1) $n = 2m$ болог. B_{n-1} ба A_{n-1} нийлбэрийн 3 ба k гэсэн хос нэмэгдэхүүнийг $3 \cdot k$ тоогоор сольё. Нэмэгдэхүүнүүдийн үржвэр өөрчлөгдөхгүй $(n-1)!$ байх ба $k = m+2, m+3, \dots, n-1$ үед $3 \cdot k$ нь $2m$ -ээс их тул бусад нэмэгдэхүүнээс ялгаатай. Түүнчлэн шинэ нийлбэр харгалзан $A_{n-1} + 2k - 4$ ба $A_{n-1} + 2k - 3$ болох бөгөөд $k = m+2, m+3, \dots, n-1$ тоон дээрх утгууд $A_n, A_n + 1, \dots, A_n + n - 5$ байх учраас N эдгээр тоонуудын аль нэгтэй тэнцүү үед бодлого бодогдлоо.

B_n ба A_n нийлбэрийн 3 ба k гэсэн хос нэмэгдэхүүнийг $3 \cdot k$ -р сольё. Ингэхэд нийлбэр харгалзан $A_n + 2k - 4$ ба $A_n + 2k - 3$ болох бөгөөд $k = m, m+1, m+2$ тоон дээрх утгууд $A_n + n - 4, A_n + n - 3, A_n + n - 2, A_n + n - 1, A_n + n$ юм. Иймд N эдгээр тоонуудын аль нэгтэй тэнцүү үед үржвэр нь $n!$ байх ялгаатай тоонуудын нийлбэрт N тоо задарч байна.

- (2) $n = 2m + 1$ үед B_{n-1} ба A_{n-1} нийлбэрийн 3 ба k гэсэн хосыг $3 \cdot k$ -р сольж $k = m+2, m+3, \dots, n-1$ утгуудыг сонгосноор $N = A_n, A_n + 1, \dots, A_n + n - 5$ тохиолдолууд шийдэгдэнэ. B_n ба A_n нийлбэрийн 3 ба k гэсэн хосыг $3 \cdot k$ -р солин $k = m, m+1, m+2$ утгуудыг сонгож $N = A_n + n - 4, A_n + n - 3, A_n + n - 2, A_n + n - 1, A_n + n$ тохиолдлыг шийднэ.

XI анги

Бодлого XI-A1. Натурал a, b, c тоонуудын хувьд $3^a + 3^b + 3^c$ нийлбэр бүтэн квадрат байсан бол $a = b = c$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Сондгой бүтэн квадрат тоог 8-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг. Нөгөө талаас, гурвын зэрэгт 3^x тоог 8-д хуваахад x нь тэгш үед 1, харин x нь сондгой үед 3 үлдэгдэл өгнө. Тэгэхлээр $3^a + 3^b + 3^c$ нийлбэрийг 8-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгөхийн тулд a, b, c зэргүүд заавал бүгд сондгой байх ёстой.

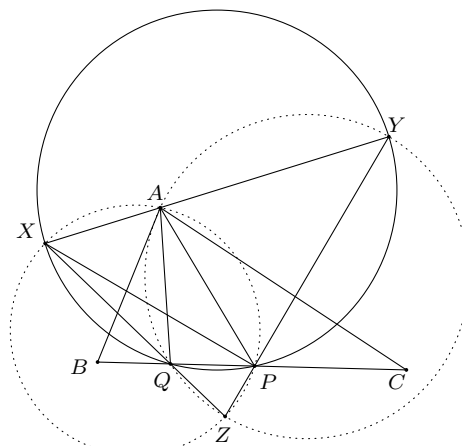
$a \leq b \leq c$ гэж үзвэл, $3^a + 3^b + 3^c = 3^a(1 + 3^{b-a} + 3^{c-a})$ байна. Нэгэнт a нь сондгой зэрэг учраас энэ үржвэр бүтэн квадрат байхын тулд $1 + 3^{b-a} + 3^{c-a}$ үржигдэхүүн 3-д хуваагдах ёстой. $b > a$ эсвэл $c > a$ байхад $1 + 3^{b-a} + 3^{c-a}$ нийлбэр 3-д хуваагдахгүй тул $a = b = c$ юм.

Бодлого XI-A2. ABC гурвалжны BC тал дээр P цэгийг сонгон авчээ. $\angle APB$ ба $\angle APC$ өнцгийн биссектриссүүд нь $\angle BAC$ өнцгийн гадаад биссектрисстэй харгалзан X ба Y цэгт огтлолцдог байв. XPY гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулууныг P цэгээс ялгаатай Q цэгт огтлолцдог бол $\angle BAP = \angle CAQ$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт.

$\angle XAB = \angle YAC$ гэдгээс $\angle XAQ = \angle YAP$ гэж батлахад хангалттай. $Z = XQ \cap YP$ гэе. $XQPY$ тойрогт багтана гэдгээс $\angle QXY = \angle CPY = \angle APY$ буюу $XAPZ$ нь тойрогт багтана. Иймд $\angle ZAX = \angle ZPX = 90^\circ = \angle ZQY$ тул $ZQAY$ нь бас тойрогт багтана. Эдгээрээс $\angle XAQ = \angle QZP = \angle YAP$ болж батлагдана.



Бодлого XI-A3. $xyz = 1$ байх эерэг x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3 \geq 2(x + y + z)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодолт. $(1-x)(1-y) \cdot (1-y)(1-z) \cdot (1-z)(1-x) \geq 0$ тул $(1-x)(1-y) \geq 0$ гэж үзэхэд явцуурах зүйлгүй ба энэ үед

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3 - 2(x + y + z) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 + 2(1-x)(1-y) \geq 0$$

болж бодлого бодогдоно. Тэнцэтгэл $x = y = z = 1$ үед биелнэ.

Бодлого XI-B1. $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $n \geq 0$ үед

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2^{2^n} - 1}$$

байдаг дарааллын хувьд $a_{54} < 1$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}, a_3 = \frac{15}{16} + \frac{15}{16^2} = \frac{255}{256}$ тул

$$a_n = \frac{2^{2^n} - 1}{2^{2^n}} = 1 - 2^{-2^n}$$

гэж таамаглаад үүнийгээ индукцээр баталъя.

$n = 0$ үед үнэн. $n \geq 0$ үед үнэн гэвэл

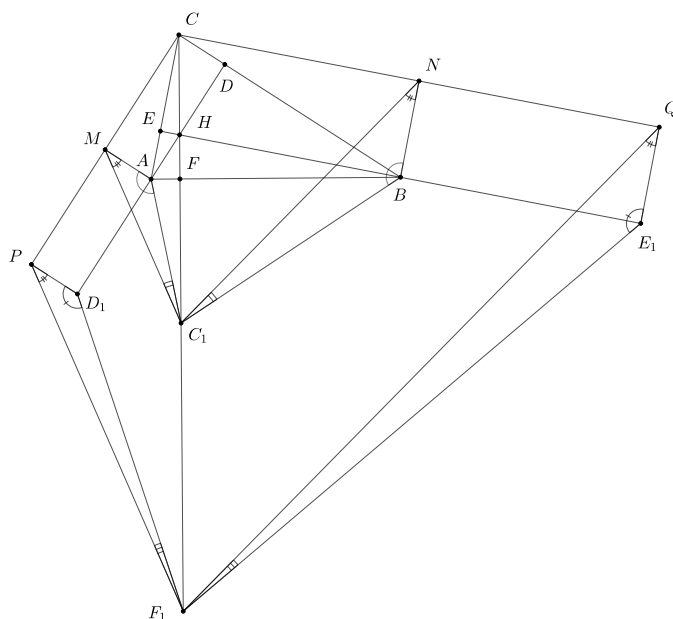
$$a_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{a_n}{2^{2^n} - 1}\right) = (1 - 2^{-2^n})(1 + 2^{-2^n}) = 1 - 2^{-2^{n+1}}$$

тул $n + 1$ үед үнэн. Иймд $a_{54} = 1 - 2^{-2^{54}} < 1$.

Бодлого XI-Б2. Хурц өнцөгт элдэв талт ABC гурвалжны AD, BE, CF өндрүүдийг татжээ. DA цацраг дээр D_1 цэгийг $DD_1 = 2 \cdot DA$ байхаар, EB цацраг дээр E_1 цэгийг $EE_1 = 2 \cdot EB$ байхаар, CF цацраг дээр F_1 цэгийг $FF_1 = 3 \cdot CF$ байхаар тус тус сонгож авав. $\angle D_1F_1E_1 = \angle ACB$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ гэе. ABC гурвалжны талууд дээр $CDAM$, DD_1P , $CEBN$, CEE_1Q тэгш өнцөгтүүд байгуулъя. $\triangle ACD \sim \triangle CBN$ байх нь илэрхий. CF_1 хэрчмийн дундаж цэгийг C_1 гэвэл $CF = FC_1$ тул $\triangle ACB \cong \triangle AC_1B$ байна. Мөн $DA = AD_1$, $EB = BE_1$ тул $CM = MP$, $CN = NQ$ байна. Иймд $MC_1 \parallel PF_1$ ба $NC_1 \parallel F_1Q$ болох тул $\angle D_1PF_1 = \angle F_1QE_1$ болно.



$$\begin{aligned}
 \angle MAC_1 &= 360^\circ - \angle MAC - \angle CAB - \angle BAC_1 \\
 &= 360^\circ - \gamma - 2\alpha \\
 &= 2\beta + \gamma \\
 &= \angle CBC_1 + \angle NBC \\
 &= \angle NBC_1
 \end{aligned}$$

ба

$$\frac{MA}{AC_1} = \frac{CD}{AC} = \frac{NB}{BC} = \frac{NB}{BC_1}$$

тул $\triangle MAC_1 \sim \triangle NBC_1$ болно. Нөгөө талаас

$$\frac{PD_1}{FP_1} = \frac{MA}{2MC_1} = \frac{BN}{2NC_1} = \frac{BN}{F_1Q}$$

тул $\triangle PD_1F_1 \sim \triangle QE_1F_1$ болж $\angle PF_1D_1 = \angle QF_1E_1$ болно. Эндээс $\angle PF_1Q = \angle D_1F_1E_1 = \gamma$ болж батлагдав.

Бодлого XI-Б3. Нүднүүд нь улаан, хөх, ногоон 3 өнгөөр будагдсан $n \times n$ хэмжээтэй хүснэгт өгөгджээ. Нэг удаагийн үйлдлээр ялгаатай өнгөтэй хөрш (ерөнхий талтай) 2 нүдийг энэ 2 нүдний өнгөөс өөр 3 дахь өнгөөр будаж болно (жишээ нь, улаан, хөх өнгөтэй хөрш хоёр нүдийг ногоон өнгөөр будна). Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар өгөгдсөн ямар ч хүснэгтийн бүх нүдийг ижил өнгөтэй болгож чаддаг байх бүх n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. Эхлээд $3 \mid n$ үед бүх нүдийг ижил өнгөтэй болгож чадахгүй будалт олдоно гэж батлая. Улаан, хөх, ногоон (товчоор У, Х, Н) өнгөөр будагдсан нүдийн тоог харгалзана A, B, C гээд энэ будалтанд $0 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C$ тоог харгалзуулая. Тэгвэл нэг үйлдэлээр энэ тоо $(\text{mod } 3)$ -аар өөрчлөгдөхгүй гэдгийг хялбар шалгаж болно. Иймд тухайлбал $(A, B, C) = (2, 1, n^2 - 3)$ байх будалтын хувьд бүх нүдийг ижил өнгөтэй буюу $0 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C \equiv 0 \pmod{3}$ будалтанд хүргэж чадахгүй юм.

Одоо ижил өнгөөр будагдсан хөрш нүднүүдийг хэвээр нь үлдээхийг үйлдэл дээр нэмээд (ингэхэд юу ч өөрчлөгдөхгүй) $3 \nmid n$ үед индукцаар бүх нүдийг ижил өнгөтэй болгож чадна гэж батлая. $n = 1$ үед илэрхий. $n = 2$ үед 1, 2-р мөр дээр үйлдэлээ хийгээд, дараа нь 1, 2-р багана дээр үйлдэлээ хийхэд бүх нүд нь ижил өнгөтэй болон гэдгийг хялбар харж болно. $n \geq 4$ үед n -ээс бага бүх тохиолдолд үнэн байг. Эхлээд

(1) 1×4 хүснэгтийн бүх нүдийг ижил болгож болно.

(2) **abbb** хэлбэрийн хүснэгтийг **aaaa** хэлбэртэй болгож болно. Энд $a, b \in \{У, Х, Н\}$.

гэдгийг батлая. (1)-ийн хувьд эхний 2 ба сүүлийн 2 нүднүүд дээр үйлдэл хийхэд хүснэгт ХХУУ хэлбэрт шилжсэн гэе (бусад үед адил юм). Тэгвэл

$$\text{ХХУУ} \rightarrow \text{ХННУ} \rightarrow \text{УУНУ} \rightarrow \text{УХХУ} \rightarrow \text{ННХУ} \rightarrow \text{НННН}$$

болж батлагдана. (2)-ийн хувьд **abbb** нь ХУУУ хэлбэртэй гэвэл (бусад үед адил юм)

$$\text{ХУУУ} \rightarrow \text{ННУУ} \rightarrow \text{НХХУ} \rightarrow \text{УУХУ} \rightarrow \text{УННУ} \rightarrow \text{ХХНУ} \rightarrow \text{ХХХХ}$$

болно. Одоо (1), (2)-г ашиглаад n дээрх байгуулалтаа хийе.

i_1 -ээс i_2 -р мөрүүд ба j_1 -ээс j_2 -р багануудаар үүсэх хүснэгтийг $[i_1, i_2] \times [j_1, j_2]$ гэе. Эхлээд $[i, i] \times [n-3, n]$, $1 \leq i \leq n$ хүснэгтүүдийг, дараа нь $[n-3, n] \times [j, j]$, $1 \leq j \leq n-3$ хүснэгтүүдийг (1)-ээр тус бүрт нь ижил өнгөтэй болгоно. Индукцийн таамаглалаар $n-3$ үед үнэн тул $[1, n-3] \times [1, n-3]$ хүснэгтийн бүх нүдийг ижил өнгөтэй болгоно (тухайлбал бүгд Х болсон гэе). Одоо (2)-оор эхлээд $[n-3, n] \times [j, j]$, $1 \leq j \leq n-3$ хүснэгтүүдийн, дараа нь $[i, i] \times [n-3, n]$, $1 \leq i \leq n$ хүснэгтүүдийн нүдийг бүгдийг Х болгож чадна.

XII анги

Бодлого XII-A1. $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ялгавартай арифметик прогресс үүсгэдэг x, y, z тоонуудын хувьд $\frac{1}{\cos x}, \frac{3}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$ тоонууд нь мөн арифметик прогресс үүсгэж байв. $\cos^2 y$ -ийг ол. (Тоонууд нь өгсөн энэ дарааллаар арифметик прогресс үүсгэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: Физтех)

Бодолт. **Хариу:** $\frac{4}{5}$.

Арифметик прогресс гэдгээс $y = \frac{x+z}{2}$ ба $\frac{3}{\cos y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos z} \right)$ болно. Иймд

$$\frac{3}{\cos y} = \frac{\cos x + \cos z}{2 \cos x \cos z} = \frac{2 \cos\left(\frac{x+z}{2}\right) \cos\left(\frac{x-z}{2}\right)}{\cos(x+z) + \cos(x-z)}$$

болох бөгөөд $x+z = 2y$ ба $z-x = 2\alpha$ болохыг анхаарвал

$$\frac{3}{\cos y} = \frac{2 \cos y \cos \alpha}{\cos 2y + \cos 2\alpha}$$

гэж бичигдэнэ. Давхар өнцгийн томъёо ашиглан хялбарчилбал

$$6 \cos^2 y - 3 + 6 \cos^2 \alpha - 3 = 2 \cos^2 y \cos \alpha$$

гэж бичиж болох ба эндээс $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ тул

$$\cos^2 y = \frac{3 - 3 \cos^2 \alpha}{3 - \cos \alpha} = \frac{4}{5}$$

болно.

Бодлого XII-A2. Натурал n тоо өгөгджээ. $k \geq 2$ байх ямар ч натурал k тоог сонгон авахад, $n \cdot k^3 - 1$ тоо нь k -д хуваахад 1 үлдэгдэл өгдөг 1-ээс ялгаатай хуваагчтай байв. n нь ямар нэг натурал тооны куб гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. k бүрийн хувьд $nk^3 - 1$ тооны $ka_k + 1$ хэлбэрт бичигдэх 1-ээс ялгаатай хуваагчийг сонгож $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ дарааллыг байгуулья. Хэрэв энэ дараалал зааглагдсан бол ямар нэг бүхэл $a \geq 1$ тооны хувьд $a = a_k$ байх k дугаар төгсгөлгүй олон олдоно. Тэдгээр k дугаар бүрийн хувьд $nk^3 + (ak)^3 = (nk^3 - 1) + ((ak)^3 + 1)$ тоо $ak + 1$ тоонд хуваагдах бөгөөд $ak + 1$ ба k^3 нь харилцан анхны тул $ak + 1 \mid n + a^3$ байна. Хангалттай том k дугаарын хувьд ийм байх боломжгүй. Иймд $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ нь зааглагдахгүй дараалал болох тул $a_m > n$ байх m дугаар төгсгөлгүй олон олдоно.

Энэ чанартай m дугаарын бүрийн хувьд $(nm^3 - 1)/(ma_m + 1)$ ногдворыг b_m гэж тэмдэглэвэл энэ тоо $mc_m - 1$ хэлбэрт бичигдэнэ. Иймд $mc_m \equiv 1 \pmod{b_m}$ гэдгээс $mn \equiv c_m^2 \pmod{b_m}$ болно. Хэрэв $c_m^2 > mn$ бол $c_m^2 - mn \geq b_m$ гэдгээс $c_m \geq m + 1$. Мөн адилаар $m^2n \equiv c_m \pmod{b_m}$ гэдгээс $mn > c_m$ болох тул

$$n > \frac{c_m}{m} \geq 1 + \frac{1}{m}$$

байна. $a_m > n$ тул

$$n - \frac{1}{m^3} = \left(a_m + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{c_m}{m} - \frac{1}{m^2}\right) > a_m + \frac{1}{m} > n$$

болж зөрчил үүснэ. Иймээс $mn > c_m^2$ байх бөгөөд $mn - c_m^2 > b_m$ гэдгээс $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ дараалал зааглагдсан болох нь мөрдөнө. Одоо ямар нэг бүхэл c тооны хувьд $c = c_m$ байх m дугаар төгсгөлгүй олон олдоно гэж хэлж чадна. Эдгээр дугаар бүрийн хувьд $cm - 1$ тоонд $(mc)^3 - 1$ тоо хуваагдах тул $n - c^3$ мөн хуваагдана. Иймд $n = c^3$.

Бодлого XII-A3. Хурц өнцөгт элдэв талт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгээс гурвалжны A өнцгийн дотоод ба гадаад биссектрисс рүү HD , HE перпендикулярууд буулгажээ. $\angle BDC + \angle BEC = 180^\circ$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. $AD \cap CB = D_1$, $AE \cap CB = E_1$ ба AD_1 , AE_1 -үүд нь харгалзан дотоод, гадаад биссектриссүүд болог. Мөн $AH \cap CB = A_1$, $BH \cap CA = B_1$, $CH \cap AB = C_1$ гэе. Энэ үед DHA_1D_1 , HC_1BA_1 дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдэг нь илэрхий тул огтлогч шүргэгчийн теоремоор

$$AD \cdot AD_1 = AH \cdot AA_1 = AC_1 \cdot AB$$

буюу DC_1BD_1 нь тойрогт багтана. Яг адил B_1DD_1C , C_1EE_1B , B_1EE_1C дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгийг хялбар баталж болно. Иймд

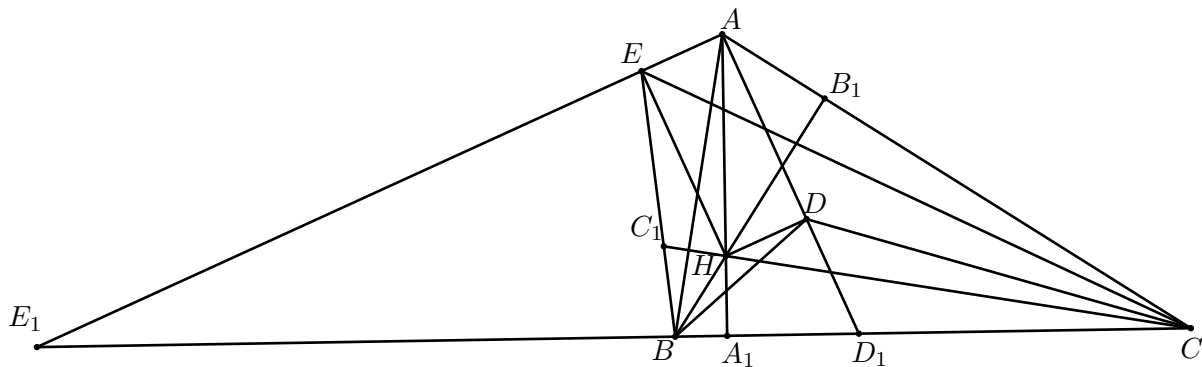
$$\angle CDB = \angle D_1DB + \angle D_1DC = \angle D_1C_1B + \angle D_1B_1C, \quad (1)$$

$$\angle CEB = \angle E_1EC - \angle E_1EB = \angle E_1B_1C - \angle E_1C_1B. \quad (2)$$

Гармоник харьцаан чанараар AD_1 , AE_1 -үүд биссектриссүүд тул (CD_1BE_1) -гармоник болох ба $\angle CC_1B = \angle CB_1B = 90^\circ$ гэдгээс $\angle D_1C_1B = \angle E_1C_1B$ ба $\angle D_1B_1C = \angle E_1B_1A$ болно. (1) ба (2)-г нэмээд үүнийг ашиглавал

$$\angle CDB + \angle CEB = \angle D_1B_1C + \angle E_1B_1C = \angle E_1B_1A + \angle E_1B_1C = 180^\circ$$

болж батлагдана.



Бодлого XII-B1. $a_0 = \frac{1}{2}$ ба $n \geq 1$ үед

$$a_n = a_{n-1} + \left(\frac{a_{n-1}}{n} \right)^2$$

байдаг дарааллын хувьд $a_{2018} < \frac{3}{2}$ гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $n \geq 0$ хувьд $a_n > 0$ болох нь илт.

Индукц ашигласан бодолт: $n \geq 0$ хувьд $a_n \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{n+1}{n+3}$ гэж харуулахад хангалттай. $n = 0$ үед үнэн. $n \geq 1$ ба $n - 1$ үед үнэн гэвэл

$$a_n = a_{n-1} + \left(\frac{a_{n-1}}{n} \right) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(n+2)^2}$$

болох тул

$$\frac{n}{n+2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{2(n+2)n+3}{2(n+2)^2} \leq \frac{n+1}{n+3}$$

гэж батлахад хангалттай. Энэ нь

$$2(n+2)^2(n+1) - (2(n+2)n+3)(n+3) = n-1 \geq 0$$

тул үнэн. Индукцээр дурын n хувьд үнэн.

Нийлбэр ашигласан бодолт:

$n \geq 1$ үед өгсөн нөхцөлөөс

$$\frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{n^2 + a_{n-1}}$$

болно. Нэмээд хураавал $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1^2 + a_0} + \frac{1}{2^2 + a_1} + \dots + \frac{1}{n^2 + a_{n-1}}$ болно. Цаашилбал, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ба $\pi^2 < 10$ болохыг ашиглавал $\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6} - 1 < \frac{2}{3}$ тул

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1^2 + a_0} + \frac{1}{2^2 + a_1} + \dots + \frac{1}{n^2 + a_{n-1}} < \frac{2}{3} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{4}{3}$$

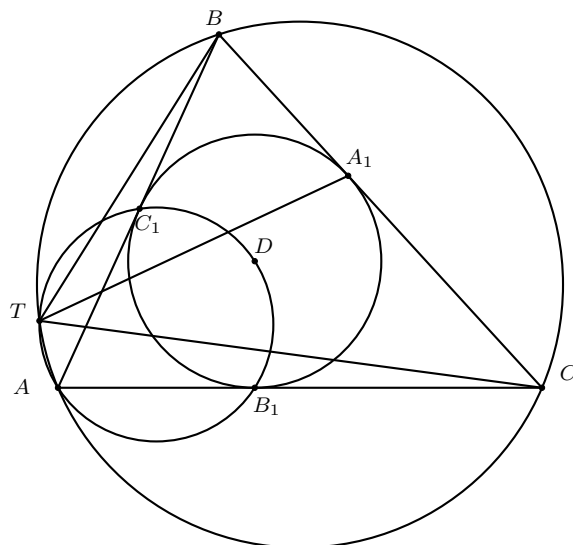
байна. Иймд $2 - \frac{1}{a_n} < \frac{4}{3}$ буюу $a_n < \frac{3}{2}$ байна.

Жич: $n \geq 6$ үед $\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} < \frac{2}{3}$ гэж харуулж болно.

Бодлого XII-Б2. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны AB , BC , CA талуудыг харгалзан C_1 , A_1 , B_1 цэгүүдээр шүргэнэ. AC_1B_1 гурвалжныг багтаасан тойрог ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой A цэгээс ялгаатай T цэгээр огтлолцоно. TA_1 шулуун нь $\angle BTC$ өнцгийн биссектрисс гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. $ABCT$ ба AC_1B_1T дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс $\angle ABT = \angle ACT$ ба $\angle TC_1B = \angle TB_1C$ байна. Иймд $\Theta\Theta\Theta$ -ийн шинжээр $\triangle TC_1B \cong \triangle TB_1C$ буюу $\frac{BT}{CT} = \frac{BC_1}{CB_1}$ болно. $BC_1 = BA_1$ ба $CB_1 = CA_1$ гэдгээс $\frac{BT}{CT} = \frac{BA_1}{CA_1}$ байна. Иймд биссектриссийн чанраар $\angle CTA_1 = \angle BTA_1$ болж батлагдана.



Бодлого XII-БЗ. Бодлого XI-БЗ.

Бодолт. Бодолт **XI-БЗ.**

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Сурагч өөрийн бүх мөнгөний 45%-иар 4 ширхэг үзэг, 51%-иар 1 ширхэг үзэг, 2 ширхэг ном авчээ. Үлдсэн мөнгөөр ахин 1 үзэг, 1 ном авах гэхэд 21700 төгрөг дутав. Үзэг, ном тус бүр ямар үнэтэй вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу: Үзэг 9000 төгрөг, ном 15900 төгрөг.**

Сурагчийн мөнгөний хэмжээг $100x$ гэвэл үзэгний үнэ $\frac{45x}{4} = 11.25x$ болно. Дараагийн нөхцлөөс номын үнэ $(51x - 11.25x)/2 = 19.875x$ болно. Одоо сүүлийн нөхцөлөөс $(11.25x + 19.875x) - (100x - 45x - 51x) = 21700$ тэгшитгэл үүснэ. Эндээс $27.125x = 21700$ буюу $x = 800$ болох ба үзэгний үнэ $11.25x = 9000$ номын үнэ $19.875x = 15900$ болно.

Бодлого ББ-А2. Буудлын нэг давхарын урт коридорын хоёр талд 10, 10-н зочны өрөө байжээ. Энэ өрөөнүүдээс аль ч 2 нь хөрш биш 6 өрөөг хэдэн ялгаатай аргаар сонгож болох вэ? Өөд өөдөөсөө харсан 2 өрөөг хөрш гэж тооцохгүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу: 5776.**

Коридорын хоёр талд байгаа өрөөнүүдээ 1-ээс 20 хүртэл дугаартай гэж үзье. Зүүн талын ханан дах өрөөнүүдийг 1-ээс 10 хүртэл, баруун талын ханан дах өрөөнүүдийг 11-ээс 20 хүртэл дугаарлагдсан гэе.

Эхлээд зүүн гар талын ханан дах өрөөнүүдээс хөрш 2 өрөө байдаггүй байхаар n өрөө сонгох боломжийг тоолъё.

$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq 10$ байх n ширхэг өрөө авсан гэе. Аль ч 2 нь хөрш биш байхын тулд $1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \dots < a_{n-1} + n - 2 < a_n + n - 1 \leq 11 - n$ нөхцөл

биелэх ёстой. Эндээс 1-ээс $11 - n$ хүртэл тоонуудаас $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n \leq 11 - n$ байх n тоог сонгож авахад бодлогын $b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, \dots, b_n + n - 1$ тоонууд нь бодлогын нөхцөлийг хангана. Иймд нийт боломжийн тоо $\binom{11-n}{n}$ боломжтой.

Одоо аль нэг коридороос 6 өрөөг сонгосон гэвэл Дирихлейн зарчмаар дараалсан дугаартай өрөө заавал олдоно. Иймд коридор бүрээс дор хаяж нэг өрөөг сонгоно.

Эндээс зүүн гар талын коридороос 5, 4, 3, 2, 1 гэсэн тооны өрөө авахад харгалзан баруун гар талын коридороос 1, 2, 3, 4, 5 тооны өрөө сонгогдох ёстой болно.

Эндээс хариу

$$\begin{aligned} & 2 \binom{11-5}{5} \binom{11-1}{1} + 2 \binom{11-4}{4} \binom{11-2}{2} + \binom{11-3}{3} \binom{11-3}{3} = \\ & = 2 \binom{6}{5} \binom{10}{1} + 2 \binom{7}{4} \binom{9}{2} + \binom{8}{3}^2 = 5776 \end{aligned}$$

Бодлого ББ-А3. Самбарт 4 ширхэг натурал тоо бичсэн байв. Энэ тоонуудын хос бүрийнх нь хамгийн их ерөнхий хуваагчийг олоход 1, 2, 3, 4, 5, k ($k > 5$) гэсэн тоонууд гарчээ. k -ийн авч болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу: 14.**

Самбарт бичсэн тоонуудаа a, b, c, d гэе. Тэдгээрийн хос, хосоор нь бодсон ХИЕХ-ийг $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ гэе.

Дурын натурал n тооны хувьд

- Хэрэв a, b, c, d тоонуудын яг нэг нь n -д хуваагддаг бол a_i тоонуудын аль нь ч n -д хуваагдахгүй.
- Хэрэв a, b, c, d тоонуудын яг 2 нь n -д хуваагддаг бол a_i тоонуудын яг нэг нь n -д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, хэрэв $n \mid a_1, n \mid a_2$ бол $n \mid \text{ХИЕХ}(a_1, a_2)$ байна.
- Хэрэв a, b, c, d тоонуудын яг 3 нь n -д хуваагддаг бол a_i тоонуудын яг гурав нь n -д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, хэрэв $n \mid a_1, n \mid a_2, n \mid a_3$ бол $n \mid \text{ХИЕХ}(a_1, a_2), n \mid \text{ХИЕХ}(a_2, a_3), n \mid \text{ХИЕХ}(a_1, a_3)$ байна.
- Хэрэв a, b, c, d тоонууд бүгд n -д хуваагддаг бол a_i тоонууд бүгд n -д хуваагдана.

Тэгвэл $n = 2$ гэж авахад $2 \mid 2, 2 \mid 4$ тул k нь 2-т хуваагдах ёстой болж k нь $k \geq 6$ байх тэгш тоо болов.

- (1) $k = 6$ бол $n = 3$ гэж авахад $3 \mid 3$ ба $3 \mid 6$ болж ахиад нэг тоо 3-т хуваагдах хэрэгтэй болж зөрчилд хүрнэ.
- (2) $k = 8$ бол $n = 4$ гэж авахад $4 \mid 4$ ба $4 \mid 8$ болж дээрхтэй адил зөрчилд хүрнэ.
- (3) $k = 10$ бол $n = 5$ гэж авахад $5 \mid 5$ ба $5 \mid 10$ болж дээрхтэй адил зөрчилд хүрнэ.
- (4) $k = 12$ бол $n = 4$ гэж авахад $4 \mid 4$ ба $4 \mid 12$ болж дээрхтэй адил зөрчилд хүрнэ.

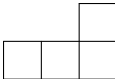
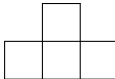
$k = 14$ үед 4, 15, 70, 84 тоонууд бодлогын нөхцөл хангах тул k тооны хамгийн бага утга нь 14 болов.

Бодлого ББ-Б1. 54 ширхэг 4 цифр, 53 ширхэг 2 цифр, 1 ширхэг 6 цифрийг ашиглан 108 оронтой бүтэн квадрат тоо зохиож болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

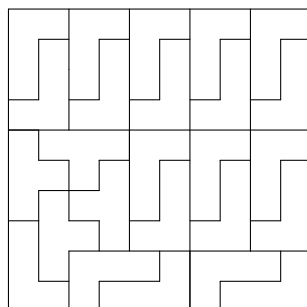
Бодолт. **Хариу: Болно.**

$$\begin{aligned}
 \underbrace{4\dots4}_{53} \underbrace{62\dots2}_{53} 4 &= 4 \cdot \underbrace{1\dots1}_{54} \underbrace{5\dots5}_{53} 6 \\
 &= 4 \cdot (\underbrace{1\dots1}_{54} \cdot (9 \cdot \underbrace{1\dots1}_{54} + 1) + 5 \cdot \underbrace{1\dots1}_{54} + 1) \\
 &= 4 \cdot (9 \cdot \underbrace{1\dots1}_{54}^2 + 6 \cdot \underbrace{1\dots1}_{54} + 1) \\
 &= 4 \cdot (\underbrace{3\dots3}_{54} + 1)^2 \\
 &= \underbrace{6\dots6}_{53} 8^2
 \end{aligned}$$

Бодлого ББ-Б2. 10×10 хүснэгтийг  ба  дүрсүүдэд хувааж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. **Хариу: Болно.**



Бодлого ББ-Б3. Бодлого IX-Б1.

Бодолт. Бодолт IX-Б1.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. Бодлого XII-А1.

Бодолт. Бодолт XII-А1.

Бодлого ДБ-А2. 2018 зэргийн, бүхэл коэффициенттэй $P(x)$ олон гишүүнт өгөгджээ.

$P(a)+P(b)$ нийлбэр нь $a+b$ нийлбэрт хуваагддаг байх ялгаатай натурал a, b тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Шаардлагатай бол $P(x)$ олон гишүүнтийг $-P(x)$ олон гишүүнтээр сольж, түүний ахмад гишүүний өмнөх коэффициент эерэг гэж үзэж болно. Цаашид $P(x)$ олон гишүүнтийн тэгш хэсэг буюу зөвхөн тэгш зэрэгтэй нэг гишүүдийн нийлбэрийг $Q(x)$ -ээр, сондгой хэсэг буюу зөвхөн сондгой нэг зэрэгтэй гишүүнтийн нийлбэрийг $R(x)$ -ээр тэмдэглэе. Ямар ч сондгой n зэргийн хувьд $(a^n + b^n):(a+b)$ байх тул $(R(a) + R(b)):(a+b)$ байна. Иймд $(P(a) + P(b)):(a+b)$ байхын тулд $(Q(a) + Q(b)):(a+b)$ байхад хангалттай, өөрөөр хэлбэл, сондгой $R(x)$ хэсгийн анхаарахгүй байж болно.

Одоо $Q(x)$ тэгш олон гишүүнт бол $b = Q(a) - a$ байх a, b тоонуудын хувьд $(Q(a) + Q(b)):(a+b)$ гэдгийг харуулъя. Безугийн теоремоор

$$Q(b) - Q(a) = (Q(b) - Q(a)):(b - (-a)) = b + a = Q(a)$$

байна. Эндээс $Q(b):Q(a)$ болох бөгөөд тэгэхлээр $(Q(a) + Q(b)):Q(a) = a + b$ байна. Нэгэнт $Q(x)$ нь 2018 зэргийн, ахмад гишүүний өмнөх коэффициент нь эерэг байх олон гишүүнт учраас хангалттай том натурал a тооны хувьд $Q(a) > 2a$ байна. Энэ үед a ба $b = Q(a) - a$ тоонууд нь ялгаатай натурал тоонууд болно.

Бодлого ДБ-А3. $0 < a, b, c < 1$ байх дурын a, b, c тоонуудын хувьд

$$\frac{a^2b}{1-a} + \frac{b^2c}{1-b} + \frac{c^2a}{1-c} \geq \frac{3abc}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $1-a, 1-b, 1-c > 0$ болохыг анхааръя.

Коши ашигласан бодолт: Эхлээд Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1 - \frac{a+b+c}{3} \leq 1 - \sqrt[3]{abc}$$

болохыг анзааръя. Иймд мөн Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$\frac{a^2b}{1-a} + \frac{b^2c}{1-b} + \frac{c^2a}{1-c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3b^3c^3}{(1-a)(1-b)(1-c)}} \geq \frac{3abc}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

болж бодлого бодогдоно.

Нийлбэр ашигласан бодолт: $0 < x < 1$ хувьд $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ба дурын $n \geq 0$ хувьд Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$a^{n+2}b + b^{n+2}c + c^{n+2}a \geq 3abc \left(\sqrt[3]{abc} \right)^n$$

болно гэдгээс бодлого бодогдоно. Үнэхээр

$$\begin{aligned} \frac{a^2b}{1-a} + \frac{b^2c}{1-b} + \frac{c^2a}{1-c} &= a^2b \sum_{n=0}^{\infty} a^n + b^2c \sum_{n=0}^{\infty} b^n + c^2a \sum_{n=0}^{\infty} c^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a^{n+2}b + b^{n+2}c + c^{n+2}a) \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} 3abc \left(\sqrt[3]{abc} \right)^n \\ &= 3abc \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[3]{abc} \right)^n \\ &= \frac{3abc}{1 - \sqrt[3]{abc}} \end{aligned}$$

байна. Тэнцэтгэл $a = b = c$ үед биелнэ.

Бодлого ДБ-Б1. Бодлого XII-Б1.

Бодолт. Бодолт **XII-Б1.**

Бодлого ДБ-Б2. Элдэв талт ABC гурвалжинд багтсан тойрог гурвалжны AB, BC, CA талуудыг харгалзан F, D, E цэгүүдээр шүргэнэ. AEF, BFD, CDE гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой харгалзан K, M, N цэгүүдээр ($K \neq A, M \neq B, N \neq C$) огтлолцоно. KD, ME, NF шулуунууд нэг цэгт огтлолцохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. ABC гурвалжиний багтсан ба багтаасан тойргийн төвийг харгалзана I, O , мөн BC нумын дундаж цэгийг X гэе. $AKFE$ ба $AKBC$ 4 өнцөгтүүд тойрогт багтана гэдгээс $\angle CEK = \angle BFK$ ба $\angle ACK = \angle ABK$ байна. Иймд $\Theta\Theta\Theta$ -ийн шинжээр $\triangle CEK \cong \triangle BFK$ буюу $\frac{CE}{CK} = \frac{BF}{BK}$ болно. $CE = CD$ ба $BF = BD$ гэдгээс

$$\frac{CD}{CK} = \frac{BD}{BK}$$

байна. Иймд биссектриссийн чанараар $\angle CKD = \angle BKD$ буюу $X \in DK$ болно.

Одоо $T = OI \cap KD$ гэе. $OX \perp BC$ ба $\angle IDB = 90^\circ$ гэдгээс $ID \parallel OX$ тул $\triangle TID \cong \triangle TOX$ болно. Иймд $\frac{IT}{OT} = \frac{ID}{OX}$ гэдгээс $IT = \frac{OI \cdot r}{R-r}$ байна. Энд r, R -үүд нь харгалзан багтсан, багтаасан тойргуудын радиусууд.

Яг адилаар ME, NF -үүд OI цацрагын (I -аас цаашаа) I -аас $\frac{OI \cdot r}{R-r}$ зайтай цэгийг дайрна.

Бодлого ДБ-БЗ. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн ялгаатай хуваалтын тоог A_n гэе. Жишээлбэл, $n = 3$ үед

$$\{1, 2, 3\}; \{1, 2\} \cup \{3\}; \{1, 3\} \cup \{2\}; \{2, 3\} \cup \{1\}; \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$

хуваалтууд байгаа тул $A_3 = 5$ юм. Харин нэг хэсэгт дараалсан хоёр тоо ороогүй байдаг $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн хуваалтын тоог B_n гэж тэмдэглэе. $n \geq 1$ үед $A_n = B_{n+1}$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батбаясгалан)

Бодолт. $n \geq 1$ гэе.

$A(n, k)$ нь $\{1, \dots, n\}$ олонлогийг хоосон биш яг k ширхэг олонлогт хуваах хуваалтын тоо байг. Тэгвэл

$$x^n = \sum_{j=1}^n A(n, j) x(x-1) \dots (x-j+1)$$

байдаг. $B(n, k)$ нь $\{1, \dots, n\}$ олонлогийг хуваалтын аль ч хэсэгт нь дараалсан 2 тоо ороогүй байхаар хоосон биш яг k ширхэг олонлогт хуваах хуваалтын тоо байг. Одоо

$$F_x = \{f: \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, x+1\} \mid \text{дурын } j \text{ хувьд } f(j) \neq f(j+1)\}$$

гэвэл

$$|F_x| = (x+1)x^n = \sum_{j=2}^{n+1} B(n+1, j)(x+1)x \dots (x+1-j+1)$$

байх тул

$$x^n = \sum_{j=1}^n B(n+1, j+1)x(x-1) \dots (x-j+1)$$

байна. Иймд $A(n, k) = B(n+1, k+1)$ байна.

Эцэст нь $A_n = \sum_{k \geq 1} A(n, k)$ ба $B_{n+1} = \sum_{k \geq 1} B(n+1, k)$ ба $B(n+1, 1) = 0$ тул $A_n = B_{n+1}$ байна.

Монголын Математикийн 54-р Олимпиадын III Даваа

Улсын Математикийн 54-р Олимпиадын дүнгийн тайлан

Улсын Математикийн 54 дүгээр олимпиад (УМО-54) 2018 оны 5 дугаар сарын 10-аас 15-ны хооронд Дорноговь аймгийн төв Сайншанд хотод “Монгол Улсын Гавьяат багш У. Доёдын нэрэмжит” болон ёслол төгөлдөр зохион байгуулагдлаа.

Улсын математикийн олимпиадыг зохион байгуулахад бүхий л талын дэмжлэг үзүүлсэн БСШУСЯ, Дорноговь аймгийн засаг даргын тамгын газар, Боловсрол соёл урлагийн газар, аймгийн нийт сургууль, цэцэрлэг, албан байгууллагын хамт олон, ММОХ, “Доёд сан”, “Наран тээг” ХХК зэрэг байгууллага, УИХ-ийн гишүүн С.Дэлгэрсайхан, Аймгийн засаг дарга Т.Энхтүвшин, нийслэлийн I сургуулийн захирал Г.Бум-Эрдэнэ нарт Монголын нийт математикчдын өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Мэргэжлийн хороо

УМО-54-ын мэргэжлийн үйл ажиллагаанд Б.Батцэнгэл ахлагчтай их, дээд сургуулиудын багш, оюутнууд оролцож бодлого зохиох, дэвшүүлэх, сонгох, засах аргачлалыг гаргах, бодолт хамгаалуулах ажлуудыг үе шаттайгаар гүйцэтгэж ажиллаа.

Мэргэжлийн хорооны комиссын гишүүд:

1. Л.Хадхүү (МУИС-ийн математикийн багш, доктор)
2. Б.Батцэнгэл (Олимпиадын хорооны гишүүн, доктор)
3. Л.Оюунцэцэг (ГМхАМИС-ийн математикийн багш, доктор)
4. Б.Сандагдорж (МУБИС-ийн математикийн тэнхийн эрхлэгч, доктор)
5. Б.Өлзийнасан (Олимпиадын хорооны гишүүн)
6. Ү.Отгонбаяр (МХ-ийн захирал, доктор)
7. Т.Батбаясгалан (Олимпиадын хорооны гишүүн)
8. Д.Даянцолмон (МУИС-ийн математикийн багш, доктор)
9. Г.Баярмагнай (ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал)
10. Б.Баяржаргал (МУИС-ийн математикийн багш, доктор)
11. Н.Аргилсан (СЭЗИС-ийн математикийн тэнхийн эрхлэгч, доктор)
12. Ш.Доржсэмбэ (МУБИС-ийн математикийн багш)
13. Т.Хулан (МУИС-ийн математикийн багш, доктор)

14. Э.Азжаргал (МУБИС-ийн математикийн багш, доктор)
15. Г.Батзаяа (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША, доктор)
16. У.Батзориг (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША, доктор)
17. Т.Базар (Математикийн Хүрээлэнгийн ЭША)
18. Э.Оргил Эрдэнэ (МУИС-ийн онолын математикийн ангийн оюутан)
19. Б.Эрдэнэбаяр (МУИС-ийн онолын математикийн ангийн оюутан)
20. Ч.Баянбат (МУИС-ийн онолын математикийн ангийн оюутан)
21. М.Буянбилэг (МУИС-ийн оюутан)

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Бодлого	Дэвшүүлсэн	Зассан	Бодлого	Дэвшүүлсэн	Зассан
IX-A1	У.Батзориг	Н.Аргилсан	IX-B1	Ү.Отгонбаяр	Э.Азжаргал
IX-A2	Т.Хулан	Т.Хулан	IX-B2	Б.Батцэнгэл	Ш.Доржсэмбэ
IX-A3	Б.Батцэнгэл	Б.Батбаясгалан	IX-B3	Н.Аргилсан	М.Буянбилэг
X-A1	Ү.Отгонбаяр	Б.Сандагдорж	X-B1	Н.Аргилсан	Н.Аргилсан
X-A2	Б.Өлзийнасан	Б.Өлзийнасан	X-B2	Т.Базар Б.Эрдэнэбаяр	Б.Өлзийнасан
X-A3	Б.Батцэнгэл	М.Буянбилэг	X-B3	Б.Батцэнгэл	У.Батзориг
XI-A1	Ү.Отгонбаяр	Ч.Баянбат	XI-B1	Б.Батцэнгэл	Ч.Баянбат
XI-A2	Б.Батцэнгэл	Э.Азжаргал	XI-B2	Г.Батзаяа	Т.Базар
XI-A3	Т.Базар	Т.Базар	XI-B3	Б.Батцэнгэл	Т.Батбаясгалан
XII-A1	Ү.Отгонбаяр	Ү.Отгонбаяр	XII-B1	Б.Өлзийнасан	Б.Эрдэнэбаяр
XII-A2	Т.Базар Б.Эрдэнэбаяр	Б.Эрдэнэбаяр	XII-B2	Ү.Отгонбаяр	Ү.Отгонбаяр
XII-A3	У.Батзориг	У.Батзориг	XII-B3	Ү.Отгонбаяр	Т.Хулан
ББ-A1	Б.Батцэнгэл	Л.Оюунцэцэг	ББ-B1	Б.Баяржаргал	Б.Баяржаргал
ББ-A2	Б.Баяржаргал	Б.Баяржаргал	ББ-B2	Б.Сандагдорж	Б.Сандагдорж
ББ-A3	Б.Батцэнгэл	Ш.Доржсэмбэ	ББ-B3	Б.Батцэнгэл	Л.Оюунцэцэг
ДБ-A1	Ү.Отгонбаяр	Л.Хадхүү	ДБ-B1	Ү.Отгонбаяр	Л.Хадхүү
ДБ-A2	Б.Өлзийнасан	Э.Оргил-Эрдэнэ	ДБ-B2	Б.Батцэнгэл	Э.Оргил-Эрдэнэ
ДБ-A3	У.Батзориг	Г.Баярмагнай	ДБ-B3	Shortlist	Г.Баярмагнай

Дүн

Улсын математикийн 54-р олимпиад уламжлалын ёсоор IX, X, XI, XII ангийн ангилал, бага ангийн багш, дунд ангийн багш ангиллаар явагдлаа. Олимпиадад 169 сурагч, 66 багш оролцож оюун ухаан авъяас чадвараа сорин уралдсанаас 35 оролцогч медальт байранд шалгарлаа.

УМО-54-д оюун ухаан авъяас чадвараа сорин:

IX ангийн ангилалд 45 сурагч,

X ангийн ангилалд 47 сурагч,

XI ангийн ангилалд 37 сурагч,

ХII ангийн ангилалд 40 сурагч,

Бага ангийн багш ангилалд 29 багш,

Дунд ангийн багш ангилалд 37 багш

оролцож уралдсанаас дараах багш сурагчид медальт байранд шалгарлаа.

IX анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Болдбаатар	Хантүшиг	39	11-р сургууль
Мөнгө	Шинэзул	Билгүүдэй	38	Сант
Мөнгө	Отгонбаяр	Ундрал УБ	36	Орчлон
Хүрэл	Батболд	Батсамбуу	35	Хөвсгөл
Хүрэл	Батбаяр	Билгүүн	35	Сант
Хүрэл	Батжаргал	Адъяатөмөр	32	1-р сургууль

X анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Амарзаяа	Пүрэвзаяа	35	Олонлог
Мөнгө	Бат	Анхбаяр	29	Баянхонгор
Мөнгө	Доржмягмар	Чингүүн	29	1-р сургууль
Хүрэл	Шинэбаяр	Билэгжаргал	28	11-р сургууль
Хүрэл	Алтан-Од	Алтансүх	28	11-р сургууль
Хүрэл	Мөнх-Од	Сайн-Очир	27	Дорноговь
Хүрэл	Бат-Оргил	Бадрангийх	27	Эрхэт эрдэм
Хүрэл	Баатар	Амгаланбаатар	27	Хөвсгөл

XI анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Лхагвасүрэн	Төгсгэрэл	29	Эрхэт эрдэм
Мөнгө	Эрдэнэбат	Эрдэнэбилэг	25	11-р сургууль
Мөнгө	Болдбаатар	Цог	23	Сант
Хүрэл	Жавхланбаатар	Тэмүүлэн	22	1-р сургууль
Хүрэл	Гомбоцэрэн	Батбуян	20	Олонлог
Хүрэл	Отгонбаяр	Дөлгөөн	16	Орчлон

XII анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Мөнхбат	Өнөболд	35	1-р сургууль
Алт	Мижиддорж	Лханаажав	35	Олонлог
Мөнгө	Хэнзий	Санжаахүү	33	Хөвсгөл
Мөнгө	Батсайхан	Долгормаа	27	Олонлог
Хүрэл	Батцэнгэл	Төрбат	26	Орчлон
Хүрэл	Батсайхан	Батмэнд	23	1-р сургууль
Хүрэл	Цацрал	Ганхөлөг	22	Сант
Хүрэл	Отгонбаяр	Мишээл	21	Шинэ Монгол

Бага ангийн багш

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Оюунчимэг	Наранчимэг	35	Орчлон
Алт	Жамъяндорж	Болормаа	35	Хөвсгөл
Мөнгө	Пүрэвдорж	Чимэг	32	Олонлог
Хүрэл	Баатарсүрэн	Жаргалсүрэн	29	

Дунд ангийн багш

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Батмөнх	Ганбат	30	Логарифм
Мөнгө	Мягмар	Батбилэг	28.5	Орчлон
Хүрэл	Рагчаадорж	Одгэрэл	26	Увс

Баг

Нэр	Оноо	Байр
УБ	20.3	I
Хөвсгөл	20.2	II
Увс	12.1	II
Дархан	8.5	III
Баянхонгор	8.4	III
Архангай	8	III

байр тус тус эзэллээ. Шалгарсан багууд дараа жилийн улсын математикийн олимпиадад анги хамаарахгүй 1-3 оролцогч нэмж оролцуулах эрхтэй юм.

Дүгнэлт

Нийслэлээс хүсэлтээрээ албан бусаар оролцсон зарим багш нар олимпиадын хөтөлбөрт үйл ажиллагаанд хойрго оролцсоныг эс тооцвол энэ жилийн улсын математикийн олимпиадад оролцогч багш, сурагчдын бэлтгэл, мөн бодлого хамгаалалтын үйл ажиллагаанд оролцох оролцоо, олимпиадыг хүндэтгэх хандлага мэдэгдэхүйц сайжирсанд ММОХ-ны зүгээс маш их талархаж байна. Мэргэжлийн комиссын үйл ажиллагаатай холбоотой зарим асуудал гарсан. Тухайлбал, зарим гишүүд бодлого хамгаалуулах болон хаалтын үйл ажиллагаанд бүрэн оролцоогүй, даамал эцсийн дүнг сайтар хяналгүй гаргасан зэрэг алдаа дутагдал гарсан. Энэ бүхэн нэг талаас хариуцлагын асуудал боловч нууцлал болон цөөхөн бодлого дэвшигдэж буйгаас үүдэн зарим гишүүд нойргүй хонон ажиллаж байгаатай холбоотой гэж бид дүгнэж байна. Эдгээр асуудлын шийдлийг олж дараа дараагийн улсын олимпиадад өмнө гаргасан алдаагаа гаргахгүйн төлөө бид бүхэн ажиллах болно.

Олон улсын математикийн олимпиад

ОУМО-59 олимпиад 7 дугаар сарын 4-14 хооронд Румийн улсын Клуж-Напос хотод зохион байгуулагдана. Энэ хичээлийн жилд ОУМО-д оролцох багийн шалгаруулалт орон даяар ЕБС-ийн нийт сурагчдыг хамарч нээлттэй 2 шаттайгаар явагдаж дүнгээ гаргалаа. УМО-ын болон II шатны 2 удаагийн сорилын онооны нийлбэрээр:

1. М.Лханаажав, УБ Олонлог сургууль
2. М.Өнөболд, УБ 1 сургууль

3. Х.Санжаахүү, Хөвсгөл
4. Б.Батмэнд, УБ 1 сургууль
5. О.Мишээл, Шинэ Монгол сургууль
6. Б.Төрбат, УБ Орчлон сургууль

нар оролцохоор шалгарлаа. Олон улсын олимпиадад эх орноо төлөөлөн оролцох сурагчдад өндөр амжилт хүсье.

ММОХ-ны гүйцэтгэх захирал Др. Г. Баярмагнай
Сайншанд хот 2018 оны 5 сарын 15 өдөр

Бодлогууд

IX анги

Бодлого IX-A1. 2017²⁰¹⁸ тоог хоёр бүтэн куб тооны нийлбэрт задалж болохгүй гэж батал. ($1^3, 2^3, 3^3, \dots$ тоонуудыг бүтэн куб тоо гэж нэрлэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого IX-A2. Тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AC катет дээр D цэг, AB катет дээр E цэгийг $AE \cdot EB = CD \cdot AD$ байхаар сонгон авчээ. Гурвалжны BC гипотенузын дундаж цэг M бол $ME = DM$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодлого IX-A3. 9×9 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Тэгш тооны хөрш нүд нь будагдсан хүснэгтийн нүдний тоо хамгийн цөөндөө хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B1. $a + b = 2$ байх дурын a, b тоонуудын хувьд

$$\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{b^2 + b + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \sqrt{b^2 - b + 1} \geq 2\sqrt{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого IX-B2. Нэг тойрог дээр 54 ширхэг зоосыг байрлуулсан байв. Нэг удаагийн үйлдлээр хаа нэгтээ зэрэгцэн байрлах сүлдээрээ харсан 2 зоосыг эргүүлж тоогоор нь харуулж чадна, мөн тоогоороо харсан 2 зоосыг эргүүлж сүлдээр харуулж чадна. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар аль ч 2 нь бие биедээ шилждэггүй хэдэн ялгаатай байрлал олдох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B3. $AB + AC = 2 \cdot BC$ бөгөөд $AC > AB$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC талын үргэлжлэл дээр C оройгоос цаана D цэгийг $\angle ABD = 2 \cdot \angle ADB$ байхаар сонгон авчээ.

$$CD = 5 \cdot AB - 4 \cdot BC$$

болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

X анги

Бодлого X-A1. $\{a_n\}_{n \geq 1}$ дарааллыг $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_n - 1)$$

гэсэн рекуррент томъёогоор тодорхойлжээ. a_1 нь бүхэл тоо бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл тоо гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Х-А2. ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M байв. AM шулуун дээр орших өгсөн K цэгийг дайрсан AM -д перпендикуляр шулуун дээр $XK = YK$ байх X, Y цэгүүдийг сонгон авчээ. X цэгийг дайрсан AB шулуунд перпендикуляр шулуун Y цэгийг дайрсан AC шулуунд перпендикуляр шулуунтай Z цэгт огтлолцдог бол $BC \perp ZK$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого Х-А3. $a^2 < b^3 < c^4 < d^5$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c, d тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого Х-Б1. Дурын эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq ab + bc + ca$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодлого Х-Б2. ABC гурвалжны A, C оройнуудыг дайрсан гурвалжны BC талыг C цэгт шүргэдэг ω тойргийг татжээ. BC талын дундаж цэг M бөгөөд AM шулуун ω тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолно, харин BD шулуун ω тойргийг D цэгээс ялгаатай E цэгт огтолно. AMC гурвалжныг багтаасан тойрог CE хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Эрдэнэбаяр, Базар)

Бодлого Х-Б3. 10-аас олонгүй ялгаатай үсэгтэй үг өгөгджээ. Өгсөн үгийн ялгаатай үсгүүдийг ялгаатай цифрээр, ижил үсгүүдийг ижил цифрээр сольж 9-д хуваагддаг тоо гаргаж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

XI анги

Бодлого XI-A1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3 \geq Kx^2y^2z^2$$

тэнцэтгэл биш биелдэг байх K -ийн хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-A2. Бодлого Х-А3.

Бодлого XI-A3. Элдэв талт, хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгийг дайрсан шулуун гурвалжны AB, AC талуудыг харгалзан D, E цэгт огтлох бөгөөд $AD = AE$ байв. Гурвалжны BC талын дундаж цэг M бөгөөд MH цацраг ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг K цэгт огтолно. A, D, E, K цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого XI-Б1. Натурал x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$$

нийлбэр бүхэл тоо бол бүх нэмэгдэхүүн нь бүхэл гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-Б2. ABC гурвалжны AC тал дээр D цэгийг сонгон авч ABD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан I_1, I_2 гэж тэмдэглэв. BI_1I_2 гурвалжны багтаасан тойрог AB шулууныг дахин X цэгт, харин BC шулууныг дахин Y цэгт тус тус огтолдог бол $AX + CD = CY + AD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-Б3. $n \geq 2$ үед $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратыг 1×2 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тоо нь $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадратыг 1×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тооноос бага гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: В. Брагин)

XII анги

Бодлого XII-A1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд координатын хавтгай дээр орших

$$(x, P(x)), (y, P(y)), (z, P(z))$$

координаттай цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог байх бодит коэффициенттэй бүх P олон гишүүнтийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XII-A2. ω тойргийн гадна орших A цэгээс уг тойрогт AB, AC шүргэгчүүд татаад AC хэрчмийн үргэлжлэл дээр C цэгээс цаана P цэгийг сонгон авчээ. ABP гурвалжны багтаасан тойрог ω тойрогтой B цэгээс ялгаатай E цэгт огтлолцох ба BP хэрчим дээр $\angle PEQ = 2\angle APB$ байхаар Q цэг авав. $CQ \perp BP$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Эрдэнэбаяр, Базар)

Бодлого XII-A3. Натурал тоон $\{a_n\}_{n \geq 1}$ дараалал ба анхны тоон $\{p_n\}_{n \geq 1}$ дарааллын хувьд $n \geq 1$ үед

$$p_n \mid a_n \quad \text{бөгөөд} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1009} - 1)$$

гэсэн нөхцөлүүд биелдэг байв. Энэ дараалалд 2018-д хуваагддаг a_n гишүүн олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодлого XII-B1. ABC гурвалжны багтаасан ω тойргийн A оройг агуулдаггүй BC нум дээр дунджаас нь ялгаатай D цэгийг сонгож авчээ. D цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч нь BC шулууныг K цэгт огтолно. K цэгийг дайрсан шулуун шулуун ω тойргийг E, F цэгүүдээр, AC, AD, AB хэрчмүүдийг харгалзан N, M, L цэгүүдээр огтолдог байв. $NE = LF$ бол $ML = MN$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого XII-Б2. Бүхэл коэффициенттэй $f(x)$, $g(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгджээ. Ямар ч натурал n тооны хувьд $f(n)$, $g(n)$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч a_n нь 2018-аас бага байв. Дурын n -ийн хувьд $a_{n+k} = a_n$ байх тогтмол k тоо олдохыг, өөрөөр хэлбэл энэ дараалал үетэй гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XII-Б3. Бүхэл тоонуудын (a, b, c, d) дөрвөлийг $ad - bc = 2018$ байвал сайн дөрвөл гээ. Сайн дөрвөлүүдэд дараах 3 төрлийн үйлдлийг хийж болно. Эдгээр үйлдэлүүдийн тусламжтайгаар бие биедээ шилждэггүй сайн дөрвөлүүдийн олонлог хамгийн олондоо 3030 элементтэй гэж харуул.

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) &\longrightarrow (-c, -d, a, b) \\(a, b, c, d) &\longrightarrow (a, b, c + a, d + b) \\(a, b, c, d) &\longrightarrow (a, b, c - a, d - b)\end{aligned}$$

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Цэцэг нэгэн урт романыг 6 сарын 1-нээс 30-ныг дуустал 30 хоногт уншиж дуусгажээ. Тэрээр 1-нээс 20-ныг дуустал дунджаар хоногт 20 хуудас, 6-наас 25-ныг дуустал дунджаар 30 хуудас, 11-нээс 30-ныг дуустал дунджаар 40 хуудас уншсан. Уг роман хамгийн ихдээ болон хамгийн багадаа хэдэн хуудастай байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ББ-А2. Есөн оронтой $\overline{abcabcbbb}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх натурал тоонд хуваагдах байх a, b, c цифрүүдийг ол. Цифрүүд ялгаатай байх албагүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-А3. $a^3 < b^5 < c^7$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ББ-Б1. Улаанбаатараас Сайншанд хүртэл 450 км зайтай. Улаанбаатараас Отгоо, Баяраа, Базар 3 нэг машинтай гарсан ба машины заалт дунджаар 1 литр бензинээр хэдэн км зам явж байгааг заадаг байв. Анх Отгоо жолоо барьж 200 км газар явахад машины заалт 6.6 км/л болсон бөгөөд машины заалтыг тэглэж цааш 200 км газрыг Баяраа жолоо барьж туулахад заалт 8.4 км/л болжээ. Үлдсэн замыг Базар жолоо барьж туулан Сайншандад ирэхэд машины заалт 8.2 км/л болжээ. Хэрэв Баяраа машины заалтыг тэглээгүй бол Сайншандад ирэхэд машины заалт хэд байх байсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б2. Дараалсан 54 ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэр бүтэн квадрат тоо биш гэдгийг батал. Натурал тооны квадрат болдог тоог бүтэн квадрат тоо гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сандагдорж)

Бодлого ББ-Б3. Аль нэг тоог нь дарахад, үлдэх тоонууд нь зүүнээсээ баруун тийш өсөх эрэмбэтэй байхаар $1, 2, \dots, 53, 54$ тоонуудыг нэг мөрөнд хэдэн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. Бодлого XI-A1.

Бодлого ДБ-А2. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бөгөөд гурвалжны A оройд гадаад багтсан γ тойрог BC талыг E цэгт шүргэнэ. EI хэрчмийн дундаж цэг N бол BCN гурвалжныг багтаасан тойрог γ тойргийг шүргэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодлого ДБ-А3. Бодлого XII-A3.

Бодлого ДБ-Б1. Бодлого XII-B2.

Бодлого ДБ-Б2. Бодлого XI-B3.

Бодлого ДБ-Б3. p, q нь $p > q \geq 5$ байх анхны тоонууд бол $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$ тоо $(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1$ тоонд хуваагдахгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: IMO.SL2017.N5)

Бодолтууд

IX анги

Бодлого IX-A1. 2017^{2018} тоог хоёр бүтэн куб тооны нийлбэрт задалж болохгүй гэж батал. ($1^3, 2^3, 3^3, \dots$ тоонуудыг бүтэн куб тоо гэж нэрлэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. **Хариу: Болохгүй..**

Эсрэгээс нь a, b натурал тоонуудын хувьд $2017^{2018} = a^3 + b^3$ байдаг гэе. Тэгвэл $a + b = 2017^p$ ба $a^2 - ab + b^2 = 2017^q$, $p + q = 2018$ гэж бичигдэнэ. Одоо

$$\frac{(a+b)^2}{4} < a^2 - ab + b^2 < (a+b)^2$$

гэдгээс

$$2017^{2p-1} < \frac{2017^{2p}}{4} < 2017^q < 2017^{2p}$$

болж $2p - 1 < q < 2p$ гэсэн илт зөрчилд хүрлээ.

Бодлого IX-A2. Тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AC катет дээр D цэг, AB катет дээр E цэгийг $AE \cdot EB = CD \cdot AD$ байхаар сонгон авчээ. Гурвалжны BC гипотенузын дундаж цэг M бол $ME = DM$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Хулан)

Бодолт. C цэгийг дайрсан A катеттай параллель шулуун ба EM шулууны огтлолцлын цэгийг F гэе.

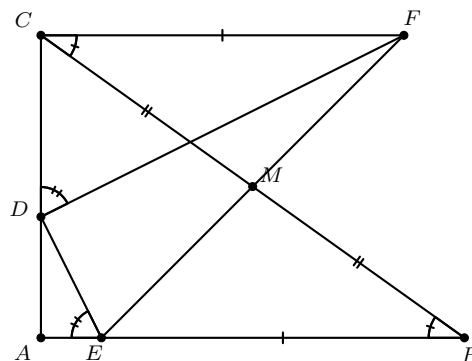
$CF \parallel AB$ тул $\angle CFM = \angle MBA$ (*) болно. Нөгөө талаас $CM = MB$ ба $\angle CMF = \angle EMB$ тул $\angle$ ТӨ шинжээр $\triangle CMF = \triangle BME$ болно. Иймд $CF = BE$ ба $FM = ME$ болов. Өгсөн нөхцөлөөс

$$AD \cdot DC = AE \cdot EB = AE \cdot CF$$

гэдгээс

$$\frac{AD}{FC} = \frac{AE}{CD}$$

болох ба $CF \parallel AB$ тул $\angle DCF = \angle DAE = 90^\circ$ болно. Иймд $\angle$ ТӨТ шинжээр $\triangle DCF \sim \triangle EAD$ болно. $\angle FDE = 180^\circ - \angle CDF - \angle ADE = 180^\circ - \angle DEA = \angle ADE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ болно. Иймд (*)-оос DM нь тэгш өнцөгт гурвалжны медиан болох тул $DM = ME$ болох нь батлагдав.



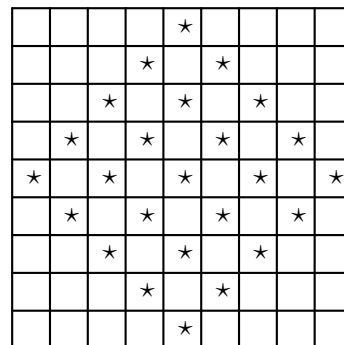
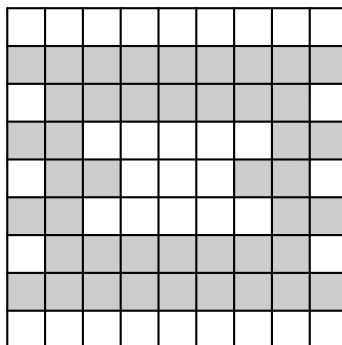
Бодлого IX-A3. 9×9 хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Тэгш тооны хөрш нүд нь будагдсан хүснэгтийн нүдний тоо хамгийн цөөндөө хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. **Хариу: 1.**

Зураг 1 дээр голын нүд будагдсан хөрш нүдгүй бөгөөд бусад бүх нүдний хөрш тооны нүд нь будагдсан байна.

9×9 хүснэгтийн дурын будалтыг авахад тэгш ширхэг хөрш нүд нь будагдсан байх нүд үргэлж олдохыг баталъя. Эсрэгээс нь тэгш ширхэг хөрш нүд нь будагдсан нүд агуулаагүй байх будалт олддог гэе. Тэгвэл зураг 2 дээрх тэмдэглэгдсэн цэгүүдийн хувь дах будагдсан хөрш нүднүүдийн тоо сондгой байна. Нөгөө талаас тэмдэглэгдсэн цэг бүрийн хөрш нүд нь 2 эсвэл 4 удаа тоологдох тул зөрчил үүснэ.



Бодлого IX-Б1. $a + b = 2$ байх дурын a, b тоонуудын хувьд

$$\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{b^2 + b + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \sqrt{b^2 - b + 1} \geq 2\sqrt{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $x + y = 2$ бол

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 1)(y^2 + y + 1) &= (x^2 - x + 1)((2 - x)^2 + (2 - x) + 1) \\ &= (x - 2)^2(x - 1)^2 + 3 \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

байна. Эндээс

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - a + 1} \sqrt{b^2 + b + 1} &\geq \sqrt{3} \\ \sqrt{a^2 + a + 1} \sqrt{b^2 - b + 1} &\geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

болох тул бодлого бодогдлоо. Тэнцэтгэл $a = b = 1$ үед биелнэ.

Бодлого IX-Б2. Нэг тойрог дээр 54 ширхэг зоосыг байрлуулсан байв. Нэг удаагийн үйлдлээр хаа нэгтээ зэрэгцэн байрлах сүлдээрээ харсан 2 зоосыг эргүүлж тоогоор нь харуулж чадна, мөн тоогоороо харсан 2 зоосыг эргүүлж сүлдээр харуулж чадна. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар аль ч 2 нь бие биедээ шилждэггүй хэдэн ялгаатай байрлал олдох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Зооснуудаа тойргийн дагуу аль нэг зоосноос эхлэн $1, 2, \dots, 54$ тоонуудаар дугаарлая. n_e ба n_o нь харгалзан тэгш дугаартай сүлдний тоо ба сондгой дугаартай сүлдний тоо гэе. Мэдээж $-27 \leq n_e - n_o \leq 27$ байх нь ойлгомжтой. $n_e - n_o \geq 0$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Зэрэгцээ хоёр зоос дээр үйлдэл хийх тул $n_e - n_o$ нь инвариант гэдэг нь илэрхий юм.

Одоо дээрх ялгавар нь тэнцүү хоёр байрлалууд бие биедээ шилждэг гэдгийг харуулъя. Хэрвээ ямар нэг тэгш дугаартай сүлд, сондгой дугаартай сүлдний хооронд өөр ямар нэг сүлд байрладаггүй бол тэдгээрийг эргүүлж тоогоор нь харуулж чадна. Учир нь тэдгээрийн хооронд тэгш тооны тоотой сүлд байрлах тул тэдгээрийг нэг захаас нь 2, 2-оор нь эргүүлж бүгдийг нь сүлд болгосны дараа анхны 2 зоосны хамт мөн л нэг захаас нь 2, 2-оор нь эргүүлж бүгдийг нь тоо болгоно. Энэ үйлдлийг давтан хийвэл $n_e - n_o$ ширхэг тэгш дугаартай сүлдтэй үлдэнэ. $n_e - n_o = 0$ бол бүх зоос тоо болох ба үйлдэл маань урвуутай тул $n_e - n_o$ бүх байрлал бие биедээ шилжих боломжтой. Хэрвээ $n_e - n_o > 0$ бол $2, 4, \dots, 2(n_e - n_o)$ байранд сүлд байрлах

байрлалд шилжүүлж чадна. Учир нь тоо, тоо, сүлд байрлалаас сүлд, тоо, тоо байрлалд шилжүүлэх боломжтой тул сүлдүүдийг тэгш байрлалд дураар нь шилжүүлэх боломжтой юм. Нөгөө талаас $n_e - n_o$ нь $-27, \dots, 27$ гэсэн боломжуудтай бөгөөд боломж тус бүрд ядаж нэг байрлал байх нь ойлгомжтой. Иймд бие биедээ шилждэггүй ялгаатай байрлалын тоо 55 болов.

Бодлого IX-Б3. $AB + AC = 2 \cdot BC$ бөгөөд $AC > AB$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC талын үргэлжлэл дээр C оройгоос цаана D цэгийг $\angle ABD = 2 \cdot \angle ADB$ байхаар сонгон авчээ.

$$CD = 5 \cdot AB - 4 \cdot BC$$

болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

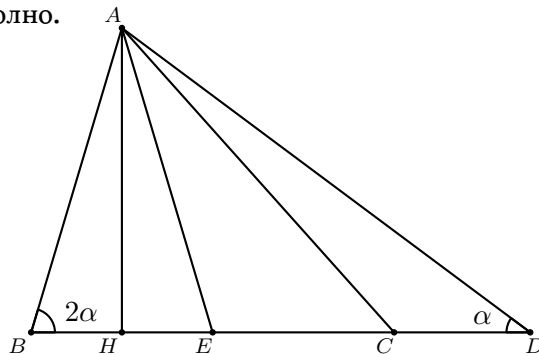
Бодолт. A оройгоос AH өндөр буулган, $AE = AB$ байх E цэгийг BC тал дээр авъя. $AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$ гэдгээс

$$AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH - BH)(CH + BH) = (CH - HE)BC = CE \cdot BC$$

болно. Бодлогын нөхцлөөс $AC - AB = 0.5 \cdot CE$ болно.

Эндээс $AC = 0.5 \cdot CE + AB$ байна. Иймд $2BC - AB = 0.5 \cdot CE + AB$ буюу $4BC - 4AB = CE$ болно. Нөгөө талаас $\angle ADB = \alpha$ гэвэл $\angle ADB = \angle AEB = 2\alpha$ болно гэдгээс $\angle EAD = \angle ADB = \alpha$ болно. Иймд $AB = AE = ED$ болно.

Эндээс $CE = ED - CD = AB - CD$ болох буюу $4BC - 4AB = AB - CD$ гэдгээс $CD = 5AB - 4BC$ болж батлагдлаа.



Х анги

Бодлого X-A1. $\{a_n\}_{n \geq 1}$ дарааллыг $n \geq 1$ үед

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_n - 1)$$

гэсэн рекуррент томъёогоор тодорхойлжээ. a_1 нь бүхэл тоо бол дарааллын бүх гишүүн бүхэл тоо гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Дурын $n \geq 1$ хувьд

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1 - (n-1)(n+1)$$

болохыг индукц ашиглан баталъя. $n = 1$ үед үнэн. $n \geq 1$ ба n үед үнэн бол

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+2}{n}(a_n - 1) \\ &= \frac{n+2}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}a_1 - (n-1)(n+1) - 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}a_1 - n(n+2) \end{aligned}$$

тул $n+1$ үед үнэн. Иймд дурын $n \geq 1$ хувьд үнэн ба эндээс a_n бүхэл болох нь илэрхий.

Бодлого Х-А2. ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M байв. AM шулуун дээр орших өгсөн K цэгийг дайрсан AM -д перпендикуляр шулуун дээр $XK = YK$ байх X, Y цэгүүдийг сонгон авчээ. X цэгийг дайрсан AB шулуунд перпендикуляр шулуун Y цэгийг дайрсан AC шулуунд перпендикуляр шулуунтай Z цэгт огтлолцдог бол $BC \perp ZK$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. Хэрэв $AB = AC$ бол AM нь A оройгоос буулгасан өндөр, медиан болно. Эндээс B, C ба X, Y цэгүүд AM шулууны хувьд тэгш хэмтэй болох тул Z цэг AM дээр оршино. Иймд $ZK \perp BC$ болно.

$AB \neq AC$ гэж үзье. $AB \cap XZ = M, AC \cap YZ = N$ ба $ZK \cap BC = T$ гье. AM цацраг дээр $ABDC$ параллелограмм байх D цэг авъя. $\angle YZK = \alpha, \angle XKZ = \beta, \angle DKT = \gamma$ байг. Тэгвэл $\angle ZKY = 90^\circ + \gamma = \angle XKT, \angle XKZ = 90^\circ - \gamma$ болох тул

$$\angle ZYK = 90^\circ - \alpha - \gamma, \quad \angle ZXK = 90^\circ - \beta + \gamma$$

ба

$$\angle MXK = 90^\circ + \beta - \gamma, \quad \angle ZXK = 90^\circ + \alpha + \gamma$$

болно. Тэгэхлээр

$$\begin{aligned} \angle KAN &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (90^\circ + \alpha + \gamma) = 90^\circ - \alpha - \gamma = \angle ADB, \\ \angle KAM &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (90^\circ + \beta - \gamma) = 90^\circ - \beta + \gamma = \angle ADC \end{aligned}$$

болох тул $\triangle XZY, \triangle DCA$ -ууд төсөөтэй болно.

XK, CM нь XZY, DCA гурвалжны медианууд ба $\angle KZY = \alpha$ тул $\angle ACM = \alpha$ болно. Үүнээс $\angle TCN = 180^\circ - \alpha$ гэж гарна. Иймд $\angle ZTC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ$ болж батлагдав.

Бодлого Х-А3. $a^2 < b^3 < c^4 < d^5$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c, d тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. **Хариу: Олдоно.**

$n, 5n, 9n, 13n$ тоонууд нь дурын натурал n тооны хувьд арифметик прогресс үүсгэнэ. Одоо $n = 3^x \cdot 5^y \cdot 13^z$ (x, y, z натурал тоонууд) натурал тоог

$$n = a^2, 5n = b^3, 9n = c^4, 13n = d^5$$

байхаар сонгож авъя. x тоо 30-д хуваагдах ба $x + 2$ нь 4-д хуваагдана, y нь 20-д хуваагдах ба $y + 1$ нь 3-д хуваагдана, z нь 12-д хуваагдах ба $z + 1$ нь 5-д хуваагдана. Эндээс $(x, y, z) = (30, 20, 24)$ шийд болохыг хялбархан харж болно. Иймд

$$3^{30} \cdot 5^{20} \cdot 13^{24} < 3^{30} \cdot 5^{21} \cdot 13^{24} < 3^{32} \cdot 5^{20} \cdot 13^{24} < 3^{30} \cdot 5^{20} \cdot 13^{25}$$

тоонууд арифметик үүсгэнэ.

Бодлого Х-Б1. Дурын эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq ab + bc + ca$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодолт. Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$a^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2} \geq 2 \frac{a^3}{b+c} = 2 \frac{a^4}{a(b+c)}$$

болно. Эндээс

$$\left(a^4 + \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) + \left(b^4 + \frac{b^2}{(c+a)^2}\right) + \left(c^4 + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \geq 2\left(\frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(c+a)} + \frac{c^4}{c(a+b)}\right)$$

болох ба Титугийн леммээр

$$2\left(\frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(c+a)} + \frac{c^4}{c(a+b)}\right) \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab + bc + ca} \geq ab + bc + ca$$

тул тэнцэтгэл биш батлагдлаа. Тэнцэл биелэх нөхцөл нь $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ болохыг хялбархан шалгаж болно.

Бодлого Х-Б2. ABC гурвалжны A, C оройнуудыг дайрсан гурвалжны BC талыг C цэгт шүргэдэг ω тойргийг татжээ. BC талын дундаж цэг M бөгөөд AM шулуун ω тойргийг A цэгээс ялгаатай D цэгт огтолно, харин BD шулуун ω тойргийг D цэгээс ялгаатай E цэгт огтлолно. AMC гурвалжныг багтаасан тойрог CE хэрчмийн дундаж цэгийг дайрна гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Эрдэнэбаяр, Базар)

Бодолт. AMC гурвалжныг багтаасан тойрог CE хэрчмийг F цэгт огтолдог гэе.

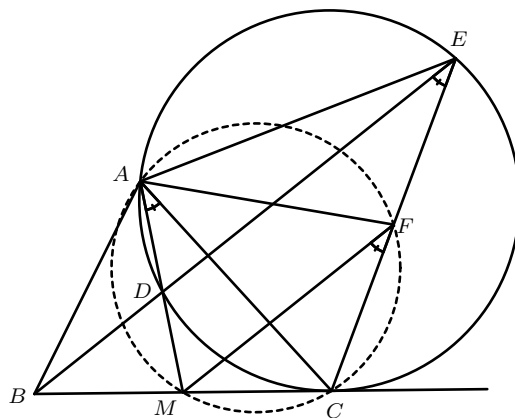
$ADCE$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул

$$\angle DEC = \angle DAC$$

болох ба нөгөө талаас $AMCF$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах тул

$$\angle MAC = \angle MFC$$

болно. $\angle DAC = \angle MAC$ тул $\angle MFC = \angle DEC$ болж, үүнээс $MF \parallel BE$ болов. M нь BC хэрчмийн дундаж цэг тул MF нь BEC гурвалжны дундаж шугам болж, $CF = FE$ болох нь батлагдав.



Бодлого Х-БЗ. 10-аас олонгүй ялгаатай үсэгтэй үг өгөгджээ. Өгсөн үгийн ялгаатай үсгүүдийг ялгаатай цифрээр, ижил үсгүүдийг ижил цифрээр сольж 9-д хуваагддаг тоо гаргаж чадахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Бид эхний цифрт санаа зовохгүй байж болно. Учир нь эхний цифр нь 0 бол бүх 0 цифрийг 9-өөр, бүх 9 цифрийг 0-ээр сольж эхний цифрийг тэгээс ялгаатай болгож болно. Үгийн уртаар индукцлэж баталъя. 0 урттай үгийн хувьд цифрүүдийн нийлбэр нь 0 болох тул үнэн гэж үзье. Үсгүүдийн байрыг солиход бодлогод ямар нэг нөлөө үзүүлэхгүй. Иймд өгөгдсөн $\ell = w_1 + \dots + w_{10}$ урттай үгийг

$$W = \underbrace{A \dots A}_{w_1} \underbrace{B \dots B}_{w_2} \dots \underbrace{I \dots I}_{w_9} \underbrace{J \dots J}_{w_{10}}$$

хэлбэртэй гэхэд явцуурахгүй. Дараах 2 тохиолдолд бодъё.

- (i) $w_1 \equiv w_2 \equiv \dots \equiv w_{10} \equiv \ell \pmod{3}$ байг. $u_i = \frac{w_i - r}{3}$ гэе. Энд r эдгээр тоонуудыг 3-д хуваахад гарах үлдэгдэл юм. Тэгвэл индукцээр

$$W' = \underbrace{A \dots A}_{u_1} \underbrace{B \dots B}_{u_2} \dots \underbrace{I \dots I}_{u_9} \underbrace{J \dots J}_{u_{10}}$$

үг 9-д хуваагддаг байхаар $A, B, \dots, I, J$ үсгүүдийг ялгаатай цифрүүдээр сольж болно. Нөгөө талаас W -ийн цифрүүдийн нийлбэр нь W' -ийн цифрүүдийн нийлбэр дээр

$$(0 + 1 + \dots + 9)r = 45r$$

тоог нэмэхэд гарах тул $W \equiv W' \equiv 0 \pmod{9}$ болно.

- (ii) Ямар нэг i -ийн хувьд $w_i \not\equiv \ell \pmod{3}$ байг. $i = 10$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Тэгвэл

$$k = \ell - w_{10} = w_1 + w_2 + \dots + w_9$$

тоо 3-т хуваагдахгүй. Дараах нийлбэрүүдийг авч үзье:

$$S_1 = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 2 + \dots + w_8 \cdot 8 + w_9 \cdot 9$$

$$S_2 = w_1 \cdot 2 + w_2 \cdot 3 + \dots + w_8 \cdot 9 + w_9 \cdot 1$$

...

$$S_9 = w_1 \cdot 9 + w_2 \cdot 1 + \dots + w_8 \cdot 7 + w_9 \cdot 8$$

Эндээс $i \neq j$ бол $S_i - S_j = (i - j)k \not\equiv 0 \pmod{9}$ байх тул $S_1, S_2, \dots, S_9$ тоонууд 9-д хуваахад ялгаатай үлдэгдлүүд өгнө. Иймд ямар нэг i тооны хувьд $9 \mid S_i$ болно. Эндээс $A \equiv i \pmod{9}$, $B \equiv i + 1 \pmod{9}$, $\dots$, $I \equiv i + 8 \pmod{9}$, $J = 0$ гэхэд W тоо 9-д хуваагдана.

XI анги

Бодлого XI-A1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3 \geq Kx^2y^2z^2$$

тэнцэтгэл биш биелдэг байх K -ийн хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. **Хариу:** $K = 2$.

$x = y = 1, z = -2$ гэж авбал $K \leq 2$ болох нь харагдана. Одоо $K = 2$ үед тэнцэтгэл биш биелэхийг харуулъя.

$x \geq 0$ ба $y \geq 0$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $0 \leq 4xy \leq (x+y)^2 = z^2$ болох ба $z^2 = (x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ тул $3z^2 \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)$ болно. Иймд

$$16x^2y^2z^2 \leq z^6 \leq 8\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3$$

болж батлагдлаа. $x = y$ эсвэл $y = z$ эсвэл $z = x$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Бодлого XI-A2. Бодлого X-A3.

Бодолт. Бодолт X-A3.

Бодлого XI-A3. Элдэв талт, хурц өнцөгт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгийг дайрсан шулуун гурвалжны AB, AC талуудыг харгалзан D, E цэгт огтлох бөгөөд $AD = AE$ байв. Гурвалжны BC талын дундаж цэг M бөгөөд MH цацраг ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг K цэгт огтолно. A, D, E, K цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. $\angle BAC = \alpha$, ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэж тэмдэглэе. Энэ үед $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$ байхыг өнцөг хөөгөөд хялбар баталж болно. HM цацраг дээр $HM = MH'$ байх H' цэг авъя.

$AE = AD$ тул $\angle BDH = \angle HEC$ ба $\angle DBH = \angle HCE = 90^\circ - \alpha$ тул $\triangle BDH \sim \triangle CEH$ болно. Иймд

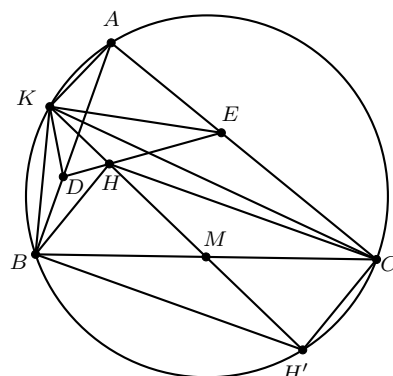
$$\frac{BD}{EC} = \frac{BH}{CH} \quad (1)$$

болов. $HM = MH', BM = MC$ тул $BHCH'$ нь параллелограмм болох ба $\angle BHC = \angle BH'C = 180^\circ - \alpha$ тул $\angle BAC + \angle BH'C = 180^\circ$ болж H' цэг ω тойрог дээр оршино. Иймд $KBH'C$ тойрогт багтах тул $\triangle KMB \sim \triangle CMH'$ ба $\triangle KMC \sim \triangle BMH'$ тул

$$\frac{KB}{H'C} = \frac{BM}{MH'}, \frac{KC}{BH'} = \frac{MC}{MH'}$$

болох ба $BM = MC$ тул $\frac{KB}{H'C} = \frac{KC}{BH'}$ болно. Нөгөө талаас $BH' = HC, H'C = BH$ тул

$$\frac{KB}{KC} = \frac{H'C}{H'B} = \frac{BH}{HC} \stackrel{(1)}{=} \frac{BD}{EC}$$



болно. $\angle KBD = \angle KCE$ тул ТӨТ шинжээр $\triangle KDB \sim \triangle KEC$ байна. Эндээс $\angle KDB = \angle KEC$ тул $\angle KDA = \angle KEA$ болж K, A, E, D цэгүүд нэг тойрог дээр орших нь батлагдав.

Бодлого XI-Б1. Натурал x, y, z тоонуудын хувьд

$$\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$$

нийлбэр бүхэл тоо бол бүх нэмэгдэхүүн нь бүхэл гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Эхний нэмэгдэхүүнийг бүхэл гэж үзье. Тэгвэл $v_p(z) > v_p(xy^2)$ байх z тооны p гэсэн анхны тоон хуваагч олдоно. $y = y_1 p^{v_p(y)}$ ба $z = z_1 p^{v_p(z)}$ (y_1, z_1 бүхэл тоонууд) гэж үзье. $v_p(z) > v_p(x) + 2v_p(y)$ учраас

$$\frac{y^3z^4x_1y_1}{x} + \frac{z^5x^6x_1y_1}{y}$$

бүхэл тоо байна. Тэгэхлээр өгсөн нөхцөлөөс $\frac{xy^2x_1y_1}{z}$ бүхэл тоо болно. Иймд $v_p(z) \leq v_p(xy^2x_1y_1) = v_p(xy^2)$ болж зөрчил үүснэ. Яг адилаар бусад бүх нэмэгдэхүүнүүд бүхэл болно.

Бодлого XI-Б2. ABC гурвалжны AC тал дээр D цэгийг сонгон авч ABD, BCD гурвалжнуудад багтсан тойргийн төвүүдийг харгалзан I_1, I_2 гэж тэмдэглэв. BI_1I_2 гурвалжныг багтаасан тойрог AB шулууныг дахин X цэгт, харин BC шулууныг дахин Y цэгт тус тус огтолдог бол $AX + CD = CY + AD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

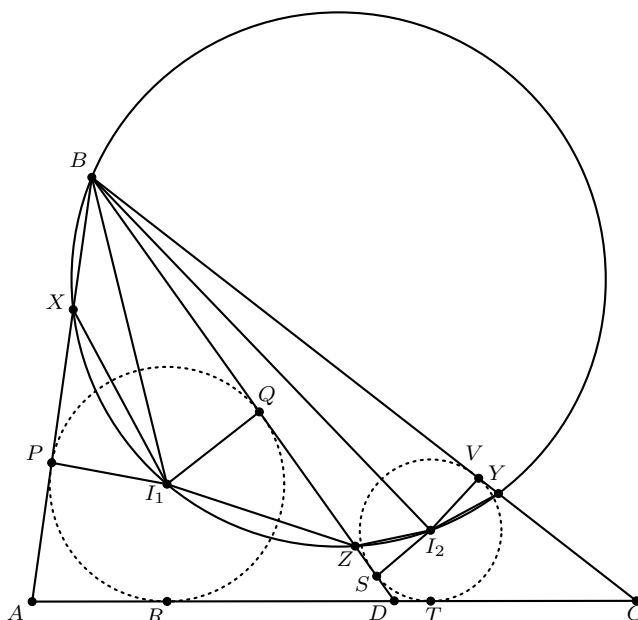
Бодолт.

I_1 төвтэй тойргийн AB, BD, AD талуудыг шүргэх цэгүүдийг харгалзан P, Q, R, I_2 төвтэй тойргийн BC, CD, DB талуудыг шүргэх цэгүүдийг харгалзан V, T, S ба BD шулууны BI_1I_2 гурвалжныг багтаасан тойргийг огтлох цэгийг Z гэе.

BI_1 нь $\angle ABD$ -ийн биссектрисс тул

$$\widetilde{XI_1} = \widetilde{I_1Z}$$

байх ба иймд $XI_1 = I_1Z$ байна. Нөгөө талаас $\angle XPI_1 = \angle I_1QZ = 90^\circ$ тул $\triangle XPI_1 = \triangle QZI_1$ болох ба иймд $PX = QZ$ болов. Яг адилаар $\triangle ZI_2S = \triangle VI_2Y$ болох ба $ZS = VY$ болно.



$$\begin{aligned} AX + CD &= AP + PX + DT + TC = AR + QZ + DT + CV = \\ &= QZ + AD - DR + DT + VY + CY = QZ + AD - DQ + DS + ZS + CY = \\ &= QZ + AD - QS + ZS + CY = QZ + AD - QZ + CY = AD + CY \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Бодлого XI-Б3. $n \geq 2$ үед $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратыг 1×2 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тоо нь $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадратыг 1×3 хэмжээтэй тэгш өнцөгтөд хуваах боломжийн тооноос бага гэдгийг батал.

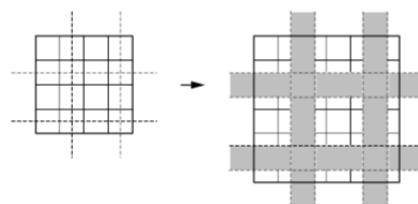
(Дэвшүүлсэн: В. Брагин)

Бодолт. $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратын бүх тэгш дугаартай мөр, бүх тэгш дугаартай баганы яг голоор нь тасархай шугам татъя. Дараа нь тасархай шугам тус бүрийг нэг нүдний өргөнтэй бүдүүн шугамаар сольё (зураг).

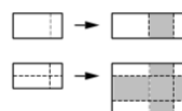
Тэгвэл $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадрат нь $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадрат болно. Одоо 1×2 доминонууд энэ буулгалтаар хэрхэн өөрчлөгдөхийг сонирхоё. Домино тус бүрт 1 эсвэл 2 тасархай шугамын хэсэг таарах бөгөөд тэр хэсгүүдэр домино нь 2 эсвэл 4 хэсэгт хуваагдсан байна (зураг). Тасархай шугамыг өргөн шугамаар солиход хэдэн тасархай шугамтайгаас хамаарч, хэвтээ домино нь 1×3 эсвэл 2×3 тэгш өнцөгтөд шилжинэ (зураг). Мөн босоо домино нь 3×1 эсвэл 3×2 тэгш өнцөгтөд шилжинэ. Доминонууд хэрхэн өөрчлөгдөж байгаа нэг жишээг дараагийн зурагт үзүүлэв. Тэгээд 2×3 ба 3×2 тэгш өнцөгтүүдийг голоор нь 2 ширхэг 1×3 ба 3×1 тэгш өнцөг болгон хуваая. Үүгээр доминод хуваагдсан $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратыг 1×3 тэгш өнцөгтүүдэд хуваагдсан $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадрат болон хувиргах буулгалт тодорхойлогдлоо. Энэ буулгалт нь инъектив байна. Учир нь, $2n \times 2n$ хэмжээтэй квадратын доминод хуваагдсан хоёр ялгаатай хуваалтыг авахад, квадратын аль нэг нүдний хувьд уг нүдийг агуулсан доминонууд энэ 2 байрлалд өөр байрлалтай байх ёстой. Буулгалтаар тэр 2 доминогийн дүрүүд нь ялгаатай.

Энэ буулгалт нь суръектив биш юм. Учир нь, $3n \times 3n$ хэмжээтэй квадратын хуваалтын зүүн доод буланд 1×3 ба 3×1 хэмжээтэй 2 тэгш өнцөгт зурагт үзүүлсэн байдлаар байрласан байвал, тэр хуваалт бидний байгуулсан буулгалтаар гарч ирэхгүй.

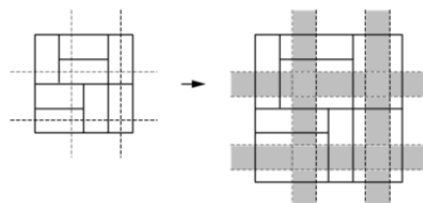
Зураг 1.



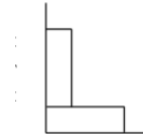
Зураг 2.



Зураг 3.



Зураг 4.



XII анги

Бодлого XII-A1. Нийлбэр нь 0 байдаг дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд координатын хавтгай дээр орших

$$(x, P(x)), (y, P(y)), (z, P(z))$$

координаттай цэгүүд нэг шулуун дээр оршдог байх бодит коэффициенттэй бүх P олон гишүүнтийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Хариу: $P(x) = ax^3 + bx + c$ (a, b, c бодит).

$P(x) = 1$ ба $P(x) = x$ шийд болох нь илт.

$\triangle REP$ тул $RP^2 = RT \cdot RE$ болох ба нөгөө талаас RC нь ω тойргийн шүргэгч тул $RC^2 = RT \cdot RE$ тул $RP = RC$ болов. $QR = RP = RC$ ба C, R, P нэг шулуун дээр орших тул $\angle CQP = 90^\circ$ болов.

Бодлого XII-A3. Натурал тоон $\{a_n\}_{n \geq 1}$ дараалал ба анхны тоон $\{p_n\}_{n \geq 1}$ дарааллын хувьд $n \geq 1$ үед

$$p_n \mid a_n \quad \text{бөгөөд} \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n} (p_n^{1009} - 1)$$

гэсэн нөхцөлүүд биелдэг байв. Энэ дараалалд 2018-д хуваагддаг a_n гишүүн олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: У. Батзориг)

Бодолт. $q = 1009$ гэвэл q анхны ба $2q = 2018$ байна. Эхлээд

$$p_n^q - 1 = (p_n - 1)(p_n^{q-1} + \dots + p_n + 1)$$

болохыг анзааръя. Ямар нэг $n \geq 1$ хувьд $p_n \equiv 1 \pmod{q}$ бол $2q \mid p_n - 1 \mid a_{n+1}$ болох тул дурын $n \geq 1$ хувьд $p_n \not\equiv 1 \pmod{q}$ гэж үзье.

Энэ үед $A_n = p_n^{q-1} + \dots + p_n + 1$ тооны бүх анхны хуваагч q модулиар 1 үлдэгдэл өгнө гэж харуулъя.

A_n тооны p анхны хуваагчийг авъя. $p \neq p_n$ гэдгээс $\gcd(p, p_n) = 1$ болох тул $p_n^d \equiv 1 \pmod{p}$ байх хамгийн бага $d \geq 1$ олдох ба $p \mid A_n \mid p_n^q - 1$ гэдгээс $d \mid q$ байна.

$d = 1$ бол $p_n \equiv 1 \pmod{p}$ гэдгээс $A_n \equiv q \equiv 0 \pmod{p}$ болно. Эндээс $p = q$ болох ба энэ нь $p_n \not\equiv 1 \pmod{q}$ гэдэгт зөрчинө.

Иймд $d = q$ ба Фермагийн бага теоремоос $d \mid p - 1$ тул $p \equiv 1 \pmod{q}$ байна.

a_n тооны q модулиар 1 үлдэгдэл өгдөг анхны хуваагчгүй хамгийн их хуваагчийг b_n гэе. Тэгвэл

$$b_{n+1} \mid \frac{b_n}{p_n} (p_n - 1) < b_n$$

болох ба эндээс $\{b_n\}$ нь эрс буурдаг эерэг бүхэл тоон төгсгөлгүй дараалал болж зөрчил гарна. Иймд $2018 \mid a_n$ байх гишүүн зайлшгүй олдоно.

Бодлого XII-B1. ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A оройг агуулдаггүй BC нум дээр дунджаас нь ялгаатай D цэгийг сонгож авчээ. D цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч нь BC шулууныг K цэгт огтолно. K цэгийг дайрсан шулуун шулуун ω тойргийг E, F цэгүүдээр, AC, AD, AB хэрчмүүдийг харгалзан N, M, L цэгүүдээр огтолдог байв. $NE = LF$ бол $ML = MN$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. Синусын теоремоор

$$\frac{\sin \angle MAN}{\sin \angle AMN} = \frac{MN}{AN} \quad \text{ба} \quad \frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle ACD} = \frac{CD}{AD}$$

болох тул

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle AMN} = \frac{MN}{AN} \cdot \frac{AD}{CD} \tag{1}$$

байна.

Мөн адилаар

$$\frac{\sin \angle MAL}{\sin \angle AML} = \frac{BD}{AD} \text{ ба } \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{AD}$$

болох тул

$$\frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle AML} = \frac{ML}{AL} \cdot \frac{AD}{BD} \quad (2)$$

болно. (1) ба (2)-оос

$$\frac{MN}{ML} = \frac{CD}{BD} \cdot \frac{AN}{AL} \quad (3)$$

гэж гарна. Нөгөө талаас $\angle ANL = \angle CDK$
ба $\angle ALN = \angle FLB$ гэдгийг тооцвол

$$\frac{AL}{AN} = \frac{\sin \angle ANL}{\sin \angle ALN} = \frac{\frac{CK}{CN} \cdot \sin \angle CKN}{\frac{BK}{BL} \cdot \sin \angle BKL} = \frac{CK}{BK} \cdot \frac{BL}{CN} \quad (4)$$

болно. Огтлолцсон хөвчүүдийн теоремоор $AN \cdot CN = EN \cdot FN = EN(FL + LN)$, $AL \cdot BL = FL(LN + NE)$ ба $EN = FL$ тул

$$AL \cdot BL = AN \cdot CN \quad (5)$$

гэж гарна. DK шүргэгч гэдгээс $\triangle BDK \sim \triangle DCK$ ба иймд

$$\frac{CD}{BD} = \frac{DK}{BK} \quad (6)$$

ба

$$DK^2 = CK \cdot BK \quad (7)$$

болох тул (5) ба (6)-аас $\frac{MN}{ML} = \frac{DK}{BK} \cdot \frac{AN}{AL}$ гэж гарна. (4) ба (5)-аас $\frac{AN^2}{AL^2} = \frac{BK}{CK}$ болох тул $\frac{ML}{MN} = \frac{\sqrt{BK \cdot CK}}{CD} \stackrel{(7)}{=} 1$ болж $ML = MN$ болох нь батлагдав.

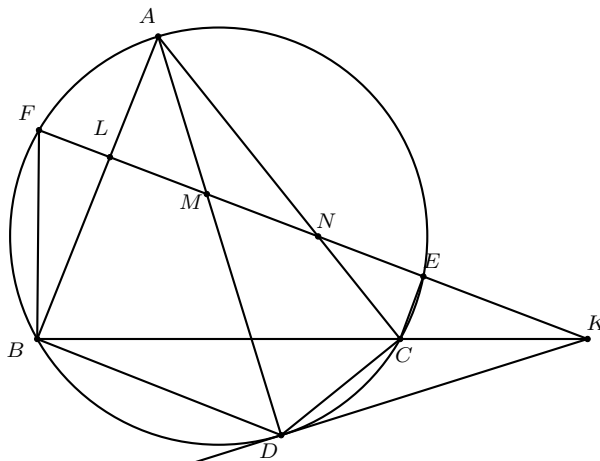
Бодлого XII-Б2. Бүхэл коэффициенттэй $f(x)$, $g(x)$ олон гишүүнтүүд өгөгджээ. Ямар ч натурал n тооны хувьд $f(n)$, $g(n)$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч a_n нь 2018-аас бага байв. Дурын n -ийн хувьд $a_{n+k} = a_n$ байх тогтмол k тоо олдохыг, өөрөөр хэлбэл энэ дараалал үетэй гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $r = 2017!$ гэе. Тэгвэл дурын $n \geq 1$ хувьд $a_n \mid r$ байна. Эндээс

$$\begin{aligned} a_{n+r} &= \gcd(a_{n+r}, r) \\ &= \gcd(f(n+r), g(n+r), r) \\ &= \gcd(f(n), g(n), r) \\ &= \gcd(a_n, r) \\ &= a_n \end{aligned}$$

болох тул a_n нь r үетэй байна.



Бодлого XII-Б3. Бүхэл тоонуудын (a, b, c, d) дөрвөлийг $ad - bc = 2018$ байвал сайн дөрвөл гэе. Сайн дөрвөлүүдэд дараах 3 төрлийн үйлдлийг хийж болно. Эдгээр үйлдэлүүдийн тусламжтайгаар бие биедээ шилждэггүй сайн дөрвөлүүдийн олонлог хамгийн олондоо 3030 элементтэй гэж харуул.

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) &\longrightarrow (-c, -d, a, b) \\(a, b, c, d) &\longrightarrow (a, b, c + a, d + b) \\(a, b, c, d) &\longrightarrow (a, b, c - a, d - b)\end{aligned}$$

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Дээрх үйлдлүүдээр сайн дөрвөл сайн дөрвөлд буух нь илт. Дээрх үйлдлүүдээр бие биедээ шилждэг бол *төстэй* гээд $\sim$ гэж тэмдэглэе. $x \sim y$ ба $y \sim z$ бол $x \sim z$ болох нь илт.

Дурын сайн дөрвөлийг дараах олонлогийн ямар нэг гишүүнтэй төстэй гэж харуулъя.

$$S = \{(a, b, 0, d) \mid a \geq 1, d \geq 1, ad = 2018, 0 \leq b \leq d - 1\}$$

Эхний үйлдлээр $|a| \leq |c|$ болгож чадна. Индукцээр дурын бүхэл $n \in \mathbb{Z}$ тооны хувьд $(a, b, c, d) \sim (a, b, c + na, d + nb)$ байна. Иймд $a \neq 0$ бол $0 \leq c < |a|$ болгож чадна. Энэ хоёр үйлдлийг давтан $c = 0$ болгож чадна.

Эхний үйлдлийг хоёр давтан хийхэд $(a, b, c, d) \sim (-a, -b, -c, -d)$ болох тул $a \geq 1$ гэж үзэж болно. Сайн гэдгээс $ad = 2018$ болох ба эндээс $d \geq 1$ болно.

Эцэст нь n бүхэл бол $(a, b, 0, d) \sim (0, -d, a, b) \sim (0, -d, a, b + nd) \sim (-a, -b - nd, -c, -d) \sim (a, b + nd, 0, d)$ тул $0 \leq b < d$ болгож чадна. Иймд дурын сайн дөрвөл S -ийн ямар нэг дөрвөлтэй төстэй.

Одоо X олонлог аль ч хоёр нь төстэй биш сайн дөрвөлүүдээс тогтох олонлог гэе. $f: X \rightarrow S$ буулгалтыг дурын $x \in X$ хувьд $x \sim f(x)$ байхаар сонгож болно. Хэрэв $f(x) = f(y)$ бол $x \sim f(x) = f(y) \sim y$ гэдгээс $x = y$ болно. Өөрөөр хэлбэл f нь инъектив буулгалт болох ба эндээс $|X| \leq |S|$ болно.

$(a, b, 0, d) \in S$ байх d -ийн боломжит утга 1, 2, 1009, 2018 тул S -ийн нийт дөрвөлийн тоо $1 + 2 + 1009 + 2018 = 3030$ болж бодлого бодогдлоо.

Жич: S -ийн аль ч хоёр дөрвөл хоорондоо төсгүй гэж баталж болно.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Цэцэг нэгэн урт романыг 6 сарын 1-нээс 30-ныг дуустал 30 хоногт уншиж дуусгажээ. Тэрээр 1-нээс 20-ныг дуустал дунджаар хоногт 20 хуудас, 6-наас 25-ныг дуустал дунджаар 30 хуудас, 11-нээс 30-ныг дуустал дунджаар 40 хуудас уншсан. Уг роман хамгийн ихдээ болон хамгийн багадаа хэдэн хуудастай байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Цэцэгийн i -р өдөр уншсан хуудасны тоог a_i гэж тэмдэглэвэл $a_i \geq 0$ байна. Бид $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{30}$ гэвэл A -ийн хамгийн их ба хамгийн бага утгыг олох ёстой. Бодлогын нөхцөлд өгсөн ёсоор

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 20 \cdot 20 = 400 \\ a_6 + a_7 + \dots + a_{25} = 30 \cdot 20 = 600 \\ a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = 40 \cdot 20 = 800 \end{cases}$$

ба эдгээрийг гишүүнчлэн нэмбэл A -ийг ялгаж бичвэл $A = 1200 - (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20})$ гэж гарна. $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 400$ гэдгээс $0 \leq a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} \leq 400$ болох тул $800 \leq A \leq 1200$ болно. Доор $A = 800$, $A = 1200$ байх үедэд байгуулалт хийж харуулав.

1. $A = 800$ байг. 1-10ны хооронд өдөр бүр 40 хуудас, 11-20ны хооронд өдөр бүр 0, 21-30ны хооронд өдөр бүр 80 хуудас уншихад бодлогын нөхцөл хангагдана.
2. 1-10ны хооронд өдөр бүр 0, 11-30ны хооронд өдөр бүр 40 хуудас уншихад бодлогын нөхцөл хангагдана.

Бодлого ББ-А2. Есөн оронтой $\overline{abcabcbbb}$ тоо нь 1-ээс 17 хүртэлх бүх натурал тоонд хуваагдах байх a, b, c цифрүүдийг ол. Цифрүүд ялгаатай байх албагүй.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. $n = \overline{ABCABCBBB}$ гэе. n тоо 5-д хуваагдах тул $B = 5$ эсвэл 0 байна. Мөн n тэгш тоо тул $B = 0$ болно. n тоо 9-д хуваагдах тул $2(A + C)$ тоо 9-д хуваагдана. Эндээс $A + C$ нь 9-д хуваагдана. n тоо 16-д хуваагдах тул $C000$ тоо 16-д хуваагдах ёстой. Эндээс C тэгш байх ёстой. Иймд $A = 7, C = 2$ эсвэл $A = 5, C = 4$ эсвэл $A = 3, C = 6$ эсвэл $A = 1, C = 8$ байх боломжуудтай. Эндээс 108108000, 306306000, 504504000, 702702000 гэсэн тоонуудаас 17-д хуваагдах нь 306306000 тоо л юм.

Бодлого ББ-А3. $a^3 < b^5 < c^7$ тоонууд нь арифметик прогресс үүсгэх натурал a, b, c тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. **Хариу: Олдоно.** $n, 5n, 9n$ тоонууд нь дурын натурал n тооны хувьд арифметик прогресс үүсгэнэ. Одоо $n = 3^x \cdot 5^y$ (x, y натурал тоонууд) натурал тоог

$$n = a^3, 5n = b^5, 9n = c^7$$

байхаар сонгож авъя. Эндээс $x:3, x:7$ ба $x+1:5$ тул $x = 84$ гэж сонгоход хангалттай. Адилаар $y:3, y:5, y+2:7$ тул $y = 75$ гэж сонгоход хангалттай. Иймд $n = 3^{75} \cdot 5^{84}$ үед

$$3^{75} \cdot 5^{84} < 3^{75} \cdot 5^{85} < 3^{77} \cdot 5^{84}$$

тоонууд арифметик үүсгэнэ.

Бодлого ББ-Б1. Улаанбаатараас Сайншанд хүртэл 450 км зайтай. Улаанбаатараас Отгоо, Баяраа, Базар 3 нэг машинтай гарсан ба машины заалт дунджаар 1 литр бензинээр хэдэн км зам явж байгааг заадаг байв. Анх Отгоо жолоо барьж 200 км газар явахад машины заалт 6.6 км/л болсон бөгөөд машины заалтыг тэглэж цааш 200 км газрыг Баяраа жолоо барьж туулахад заалт 8.4 км/л болжээ. Үлдсэн замыг Базар жолоо барьж туулан Сайншандад ирэхэд машины заалт 8.2 км/л болжээ. Хэрэв Баяраа машины заалтыг тэглээгүй бол Сайншандад ирэхэд машины заалт хэд байх байсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. Отгоо $\frac{200\text{км}}{6.6\text{км/л}}$ литр бензин зарцуулсан, Баяраа, Базар 2 сүүийн 250км-т $\frac{250\text{км}}{8.2\text{км/л}}$ бензин зарцуулсан. Иймд тоолуур тэглээгүй бол сайншандад ирэхэд

$$\frac{450\text{км}}{\frac{200\text{км}}{6.6\text{км/л}} + \frac{250\text{км}}{8.2\text{км/л}}} = 7 \frac{662}{1645} = 7.4\text{км/л}$$

-ийг заана.

Бодлого ББ-Б2. Дараалсан 54 ширхэг натурал тооны квадратуудын нийлбэр бүтэн квадрат тоо биш гэдгийг батал. Натурал тооны квадрат болдог тоог бүтэн квадрат тоо гэнэ.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сандагдорж)

Бодолт. Тооны квадратыг 4-т хуваахад 0 эсвэл 1 үлдэгдэл өгдгийг дурдъя. Эсрэгээс нь ямар нэг дараалсан 54 натурал тооны квадратуудын нийлбэр A тоо нь бүтэн квадрат болдог гэе. Эдгээр 54 тоог $x - 26, x - 25, \dots, x, x + 1, \dots, x + 27$ гэвэл

$$\begin{aligned} A &= (x - 26)^2 + (x - 25)^2 + \dots x^2 + (x + 1)^2 + \dots + (x + 25)^2 + (x + 26)^2 + (x + 27)^2 = \\ &= 54x^2 + 54x + 2(1^2 + 2^2 + \dots + 26^2) + 27^2 \end{aligned}$$

болох ба $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ гэдгийг санавал

$$A = 54x^2 + 54x + 26 \cdot 9 \cdot 53 + 27^2 = 9(6x(x+1) + 26 \cdot 53 + 9)$$

болно. A бүтэн квадрат тул $6x(x+1) + 26 \cdot 53 + 9$ тоо бүтэн квадрат байх ёстой ба $6x(x+1)$ тоо 4-т хуваагдана гэдгийг тооцвол $6x(x+1) + 1387$ тоо 4-т хуваахад 3 үлдэгдэл өгөх тул зөрчил үүсэв. Иймд бодлого бүрэн батлагдав.

Бодлого ББ-Б3. Аль нэг тоог нь дарахад, үлдэх тоонууд нь зүүнээсээ баруун тийш өсөх эрэмбэтэй байхаар $1, 2, \dots, 53, 54$ тоонуудыг нэг мөрөнд хэдэн ялгаатай аргаар бичиж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. a_n -ээр бодлогын нөхцөлийг хангасан нийт боломжийн тоог тэмдэглэе. a_n нь дэс дараалсан ширхэг тооноос 1 ширхэг тоог сонгон авч 54 янзын байрлалд байрлуулах боломжтой тэнцүү. n -ыг дарахад $1, 2, \dots, n - 1$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангасан байхаар үлдэх боломж n юм. Одоо $1, 2, \dots, n - 1$ тоонуудын хувьд тооцъё. $n - 1$ тоог дарахад $1, 2, \dots, n$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангасан байхаар үлдэх боломж $n - 2$ юм. Учир нь $1, 2, \dots, n - 1, n$ ба $1, 2, \dots, n, n - 1$ байрлахууд n -г дарах боломж дотор тоологдоно. $n - 2$ тоог дарахад $1, 2, \dots, n - 1, n$ тоонууд бодлогын нөхцөл хангасан байхаар үлдэх боломж нь мөн адил $n - 2$ юм. Учир нь $1, 2, \dots, n - 2, n - 1, n$ ба $1, 2, \dots, n - 1, n - 2, n$ боломж өмнөх дээр тоологдсон. Яг адилаар $1, 2, \dots, n - 3$ хүртэлх тоонуудын аль нэг k дарахад үлдсэн тоонууд бодлогын

нөхцөл хангадаг байхаар үлдэх боломж $n - 2$ байна. Учир нь $1, 2, \dots, k, k + 1, \dots, n$ ба $1, 2, \dots, k + 1, k, \dots, n$ байрлалууд өмнө нь тоологдсон байна. Эндээс $a_n = n + (n - 1)(n - 2)$ болох тул $a_{54} = 54 + 52 \cdot 53 = 2081$ болов.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. Бодлого XI-A1.

Бодолт. Бодолт XI-A1.

Бодлого ДБ-А2. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бөгөөд гурвалжны A оройд гадаад багтсан γ тойрог BC талыг E цэгт шүргэнэ. EI хэрчмийн дундаж цэг N бол BCN гурвалжныг багтаасан тойрог γ тойргийг шүргэнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. ABC гурвалжны A орой нь гадаад багтсан тойргийн төв I_A ба багтсан тойргийн төв нь I , BC харгалзан E ба F цэгт шүргэдэг байг. Радиусуудыг r_a, r гэе. $BE = CF$ буюу $BF = CE$ байна. $\omega(XYZ)$ гэдгээр XYZ гурвалжныг багтаасан тойргийг тэмдэглэе.

$AB = AC$ бол шүргэлцэхийг хялбар баталж болох тул $AB \neq AC$ гэж үзье.

Лемм. $BE \cdot EC = r \cdot r_a$ байна.

$\angle IBA_A = 90^\circ$ ба $\angle BEI_A = \angle BFI = 90^\circ$ тул $\angle IBF = \angle BIA_E$ болно. Иймд $\triangle BEI_A \sim \triangle IFB$ болох ба эндээс $\frac{BE}{EI_A} = \frac{IF}{FB}$ болно. Эндээс $BF = CE$ гэдгийг санавал $BE \cdot EC = r \cdot r_a$ болж лемм батлагдав.

IE шулуун γ тойрогтой огтлолцох хоёр дах цэгийг X гэе. EX хэрчмийн дундаж цэг Y , $I_A Y$ шулуун BC шулууныг M цэгт огтолдог байг. $BE = CF = x$, $EF = z$, $MB = y$ гэж тус тус тэмдэглэе. $\angle MYI = \angle MFI = 90^\circ$ тул $MYFI$ багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Огтлолцсон хөвчүүдийн теоремоос

$$ME \cdot EF = IE \cdot EY. \quad (1)$$

Нөгөө талаас $\angle MEY = \angle EI_A M$ тул $\triangle MEI_A \sim \triangle IFE$ гэж гарна. Эндээс $\frac{ME}{EI_A} = \frac{IF}{FE}$ буюу

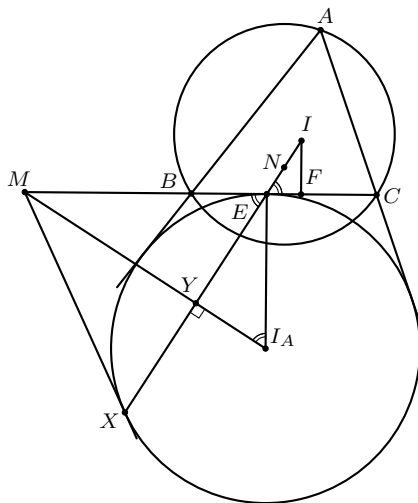
$$r_a \cdot r = ME \cdot FE = (y + x)z \stackrel{\text{лемм}}{=} BE \cdot EC = x(x + z) \quad (2)$$

тэнцэтгэл биелнэ. (1)-ээс

$$EM \cdot EF = IE \cdot EY = \frac{1}{2} IE \cdot 2 \cdot EY = NE \cdot EX$$

болох (2)-ийг хэрэглэвэл $BE \cdot EC = NE \cdot EX$ болох тул $BNCX$ багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Мөн ME нь γ тойргийг шүргэх тул MX нь мөн шүргэгч болно. Одоо MX нь $\omega(BNC)$ -ийн шүргэгч болно гэж харуулбал бодлого бүрэн бодогдоно.

(2)-оос $x^2 = yz$ болох ба эндээс $(x + y)^2 = yx + 2xy + y^2 = y(y + 2x + z)$ гэж гарна. Тэгэхлээр $ME^2 = MB \cdot MC$ болох тул M нь γ болон $\omega(ABC)$ -ийн радикал тэнхлэг дээр оршино. Мөн



BC шулуун нь $\omega(ABC)$ ба $\omega(BNC)$ -ийн радикал тэнхлэг тул M нь γ , $\omega(ABC)$, $\omega(BNC)$ -ийн радикал тэнхлэг болно. Иймд M цэгээс $\omega(BNC)$ -д татсан шүргэгч нь $ME = MX$ тул MX нь $\omega(BNC)$ -ийн шүргэгч болно.

Бодлого ДБ-А3. Бодлого XII-А3.

Бодолт. Бодолт XII-А3.

Бодлого ДБ-Б1. Бодлого XII-Б2.

Бодолт. Бодолт XII-Б2.

Бодлого ДБ-Б2. Бодлого XI-Б3.

Бодолт. Бодолт XI-Б3.

Бодлого ДБ-Б3. p, q нь $p > q \geq 5$ байх анхны тоонууд бол $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$ тоо $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p+q} - 1$ тоонд хуваагдахгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: IMO.SL2017.N5)

Бодолт. $M = (p+q)^{p+q}(p-q)^{p+q} - 1$ гэвэл $(M, p-q) = 1$ ба $(M, p+q) = 1$ тул $p-q$ -ийн M модулиарх урвууг $(p-q)^{-1}$ гэж тэмдэглэе. Эсрэгээс нь ямар нэг p, q тоонуудын хувьд $(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1$ тоо M -д хуваагддаг гэж үзье. Тэгвэл

$$(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1 \equiv (p+q)^{p+q}(p-q)^{p+q} - 1 \pmod{M}$$

болох ба эндээс

$$(p+q)^{2q} \equiv (p-q)^{2q} \pmod{M} \quad (1)$$

$$((p+q)(p-q)^{-1})^{2q} \equiv 1 \pmod{M} \quad (2)$$

гэж гарна. M -ийн дурын r гэсэн анхны тоон хуваагчийг авч үзье. M сондгой тул $r \geq 3$ байна. $(p+q)(p-q)^{-1}$ -ийн r модулиарх эрэмбийг s гэвэл (2)-оос s нь $2q$ -ийн хуваагч болно. Иймд $s = 1, 2, q$ эсвэл $2q$ байна. Нөгөө талаас Фермагийн бага теоремоор $s \mid r-1$ байх тул хэрэв $s = q$ эсвэл $2q$ бол $r-1 \equiv 1 \pmod{q}$ байна. Харин $s = 1$ эсвэл $s = 2$ байвал $r \mid (p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq$ байх тул $r = p$ эсвэл $r = q$ болно. Фермагийн бага теоремоор

$$M = (p+q)^{p+q}(p-q)^{p+q} - 1 \equiv q^{p+q} \cdot (-q)^{p+q} - 1 \equiv (q^2)^p - q \equiv q^2 - 1 \equiv (q-1)(q+1) \pmod{p}$$

ба $q-1, q+1$ нь хоёул p -ээс бага тоо тул $p \nmid M$ тул $r = p$ байж болохгүй. Тэгэхлээр M -ийн анхны тоон хуваагч бүр эсвэл q , эсвэл $qk+1$ хэлбэртэй байна. Иймд M -ийн бүх натурал хуваагч нь q модулиар 0 эсвэл 1-тэй тэнцүү байна. Нөгөө талаас,

$$M = \left((p+q)^{\frac{p-q}{2}} (p-q)^{\frac{p+q}{2}} - 1 \right) \left((p+q)^{\frac{p-q}{2}} (p-q)^{\frac{p+q}{2}} + 1 \right)$$

болж M тоо дараалсан 2 сондгой тооны үржвэрт тавигдах ба тус бүрдээ q модулиар 0 эсвэл 1-тэй тэнцүү байх ёстой. $q \geq 5$ тул энэ нь боломжгүй тул зөрчил үүсэв.

Синусын теоремын олимпиадын геометр дэхь хэрэглээ

Х. Санжаахүү

Синусын теорем

Математикийн олимпиадуудад ирдэг геометрийн бодлого бодоход маш олон арга, техник байдаг ба уран гоё болон нэгэн хэвийн хүчтэй гэх мэт янз бүрийн аргууд байх бөгөөд хүн бүр тухайн бодлогоны уран гоё бодолтыг олоход амаргүй байдаг, мөн зарим нэг хүчтэй аргууд (комплекс, жин тавих, координат г.м) цаг их үрэх, алдаа гарах гэх эрсдлүүдтэй байдаг билээ. Энэ материалд синусын теорем ашиглах бодлого, леммүүдийг та бүхний бодлого бодох чадварт тус, нэмэр болох байх гэж найдан бэлтгэлээ.

Бидний мэдэх синус функц нь $]0, 180^\circ[$ завсарт $]0, 1[$ хооронд утгын мужтай, $]0, 90^\circ[$ завсарт эрс өсөх биектив чанартай функц билээ.

Теорем (Синусын теорем). ABC гурвалжны A, B, C оройнуудад харгалзах талуудыг a, b, c ба багтаасан тойргийн радиусыг R гэвэл:

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

тэнцэтгэл биелнэ. □

Лемм 1. $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' < 180^\circ$ ба $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ бүгд эерэг өнцгүүд байг. Хэрэв $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'}$ бол $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ байна.

Баталгаа. Өгсөн нөхцөлөөс α, β нь XYZ гуравлжны Y, Z оройн өнцгүүд байхаар XYZ гурвалжин байгуулъя. Мөн адилаар $X'Y'Z'$ гурвалжин байгуулъя. Гурвалжин тус бүр дээр синусын теорем бичвэл:

$$\frac{\sin \alpha}{XZ} = \frac{\sin \beta}{XY}, \frac{\sin \alpha'}{X'Z'} = \frac{\sin \beta'}{X'Y'} \Rightarrow \frac{XZ}{XY} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{X'Z'}{X'Y'} \quad (1)$$

болно. $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ гэдгээс X ба X' оройн өнцгүүд тэнцүү болох ба мөн (1)-ээс ТӨТ шинжээр гурвалжин XYZ ба $X'Y'Z'$ гурвалжнууд төсөөтэй болж харгалзах өнцгүүд тэнцэнх тул $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ болж батлагдав. □

Лемм 2. ABC гурвалжны BC тал дээр орших M цэгийн хувьд $BM = MC$ байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM} = \frac{AB}{AC}$ байх явдал юм.

Баталгаа. AMB ба AMC гурвалжнууд дээр синусын теорем бичвэл:

$$\frac{\sin \angle BAM}{BM} = \frac{\sin \angle AMB}{AB}, \frac{\sin \angle CAM}{MC} = \frac{\sin \angle AMC}{AC}$$

болох ба $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ гэдгийг санавал $\sin \angle AMB = \sin \angle AMC$ болох тул

$$\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{MB}{MC} \quad (2)$$

болно. Эндээс батлах зүйл хялбархан батлагдана. $\square$

Жишээ 1. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд B ба CD шулуунууд K цэгт тойргийн гадна огтолцоно. Тойрогт A ба D цэгүүдэд татсан шүргэгчүүд E цэгт, B ба C цэгүүдэд татсан шүргэгчүүд F цэгт огтолцдог бол K, E, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Баталгаа. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle DKE}{\sin \angle AKE} = \frac{\sin \angle CKF}{\sin \angle BKF}$ гэж батлахад хангалттай.

Тойргийн төвийг O гэвэл $OA = OB$ тул $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$ гэе. $OD = OC$ тул $\angle ODC = \angle OCD = \beta$ гэе. Шүргэгч гэдгээс $\angle ODE = \angle OAE = 90^\circ$, $\angle OCF = \angle OBF = 90^\circ$ болох ба эндээс $\angle KDE = 90^\circ - \beta$, $\angle KAE = 90^\circ - \alpha$, $\angle KCF = 90^\circ + \beta$, $\angle KBF = 90^\circ + \alpha$ болно. EDK ба AEK гурвалжнууд дээр синусын теорем бичвэл:

$$\frac{\sin(90^\circ - \beta)}{EK} = \frac{\sin \angle DKE}{ED}, \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{EK} = \frac{\sin \angle AKE}{EA}$$

болох ба EA, ED шүргэгч учир $EA = ED$ гэдгийг тооцвол

$$\frac{\sin \angle DKE}{\sin \angle AKE} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

болох ба яг адилаар

$$\frac{\sin \angle CKF}{\sin \angle BKF} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

болно. $\sin(90^\circ - \beta) = \sin(90^\circ + \beta)$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + \alpha)$ гэдгийг тооцвол

$$\frac{\sin \angle DKE}{\sin \angle AKE} = \frac{\sin \angle CKF}{\sin \angle BKF}$$

болж батлагдана. $\square$

Жишээ 2. (Синусын чев) ABC гурвалжны BC, AC, AB талууд дээр харгалзан X, Y, Z цэгүүдийг авав. AX, BY, CZ шулуунууд нэг цэгт огтлолцох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$\frac{\sin \angle ABY}{\sin \angle CBY} \cdot \frac{\sin \angle BCZ}{\sin \angle ACZ} \cdot \frac{\sin \angle CAX}{\sin \angle BAX} = 1 \quad (3)$$

байх явдал юм.

Баталгаа. Хэрвээ нэг цэгт огтлолцдог бол Лемм 2-ын баталгаан дээр гаргасан (2) үр дүнгээс шууд мөрдөнө гарна. Харин уг (3) нөхцөл биелдэг бол AX ба CZ -ийн огтлолцлын цэг болон B -ийг дайрсан шулуун AC талыг Y' цэгт огтлолдог гэвэл $\frac{\sin \angle ABY}{\sin \angle CBY} = \frac{\sin \angle ABY'}{\sin \angle CBY'}$ болох ба лемм 1-ээс $Y = Y'$ болж батлагдана. $\square$

Жишээ 3. (Симмедиан) ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M ба ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн хувьд B ба C цэгүүдэд татсан шүргэгч шулуунууд D огтлолцох бол $\angle BAM = \angle CAD$ байна.

Баталгаа. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM} = \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle BAD}$ гэж батлахад хангалттай.

$\angle ACD = 180^\circ - \angle B$, $\angle ABD = 180^\circ - \angle C$ болох тул

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin(180^\circ - \angle B)}{\sin(180^\circ - \angle C)} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$$

болно. CAD , ADB гурвалжнууд дээр синусын теорем бичвэл:

$$\frac{\sin \angle ACD}{AD} = \frac{\sin \angle CAD}{CD}, \frac{\sin \angle ABD}{AD} = \frac{\sin \angle BAD}{BD}$$

болох ба эндээс $DC = DB$ гэдгийг тооцвол

$$\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle BAD} = \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$$

болно. Тэгэхлээр лемм 2-оос $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM}$ учир $\frac{\sin \angle BAM}{\sin \angle CAM} = \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle BAD}$ болж батлагдана. $\square$

Дасгалууд

Дараах бодлогуудыг бодоход ихэнхдээ Синусын теорем, Лемм 1, Лемм 2 ашиглагдах ба олимпиадын геометрын бодлогыг ерөнхийдөө 2 өнцөг эсвэл 2 тал тэнцүү эсвэл ямар нэг харьцаа тэнцүү гэж батлахад хангалттай байдаг. Тиймээс зарим бодлогонь хувьд тэнцүү гэж батлах хэрэгтэй α ба α' өнцөгүүдийг олоод Лемм 1 ийг ашиглавал тохиромжтой. Мөн бодлогуудыг хөнгөнөөс хүндрүү эрэмбэлэх гэж хичээсэн бөгөөд сүүлийн хэсэгт бодох санаануудыг бичсэн болно.

1. ABC гурвалжны BC талын дундаж цэг M ба A оройн симмедиан ABC гурвалжныг багтаасан тойрогтой L цэгт огтолцох бол $\angle BLA = \angle CLM$ гэж батал.
2. Γ тойрог дээр $AB = BC$ байхаар A, B, C цэгүүд авав. A, B цэгт Γ -г шүргэх шулуунууд D цэгт огтолцоно. DC шулуун Γ тойргийг C цэгээс ялгаатай E цэгт дахин огтлох бол AE шулуун BD хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.
3. (ММО, III даваа 10-р анги, 2015 он)

ABC гурвалжны дотор P цэгийг $\angle ABP = \angle ACP$ байхаар сонгон авчээ. $PBQC$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар Q цэг авахад $\angle BAQ = \angle CAP$ байна гэж батал.

4. (ОУМО-Shortlist-G1, 2013 он)

Хурц өнцөгт ABC гурвалжны ортотөв нь H ба AC, AB талуудад буусан өндрийн сууриуд харгалзан M, N байг. BC тал дээр W цэг авъя. BWN гурвалжныг багтаасан тойрог дээр XW диаметр байх X цэг тэмдэглэе. Адилаар CWM гурвалжныг багтаасан тойрог дээр Y цэг тэмдэглэе. X, Y, H цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

5. (ММО-III даваа, 11-р анги, 2015 он)

ABC гурвалжинд AD биссектрисс татжээ. A оройг дайрсан, BC талыг D цэгт шүргэдэг Γ тойрог AC талыг E цэгт огтолно. BE шулуун Γ тойргийг E цэгээс ялгаатай K цэгт огтлох бол AK шулуун BD хэрчмийг хагаслан хуваана гэж батал.

6. (Орчлон олон улсын сургуулийн нэрэмжит олимпиад, 12-р анги, 2017 он)

ABC гурвалжинд багтсан I төвтэй тойрог BC , AC талуудыг харгалзан D , E цэгт шүргэнэ. Уг гурвалжны орто төв H нь DE хэрчим дээр оршдог бол IH шулуун AB талыг хагаслана хуваана гэж батал.

7. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AB , BC , CA талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан P , M , N гэе. AM цацрагтай AB ба AC талуудын дундаж цэгт босгосон перпендикуляр шулуунууд харгалзан D ба E цэгүүдэд огтолцоно. Хэрвээ BD ба шулуунууд F цэгт огтолцох бол A , P , N , F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэж батал.

8. (Тайваны үндэсний олимпиад 2000)

ABC гурвалжны AB талын дундаж цэг M ба харгалзах талуудад буулгасан AP , BQ өндрүүд H цэгт огтолно. Хэрвээ AB ба PQ шулуунууд R цэгт огтолцох бол RH ба CM шулуунууд перпендикуляр гэж батал.

9. (Сингапур TST)

$\angle B = 90^\circ$ байх ABC гурвалжныг багтаасан Γ тойргийн төв нь O байг. Γ -г A цэгт шүргэдэг шулуун дээр A -аас ялгаатай P цэг авая. PB шулуун Γ тойрогтой B -ээс ялгаатай D цэгт огтлох ба CD шулуун дээр E цэгийг AE ба BC шулуунууд параллель байхаар авбал P , O , E цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

10. (ММО54, IV даваа, XII-B1, 2018 он)

ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A оройг агуулдаггүй BC нум дээр дунджаас нь ялгаатай D цэгийг сонгож авчээ. D цэгт татсан ω тойргийн шүргэгч нь BC шулууныг K цэгт огтолно. K цэгийг дайрсан шулуун ω тойргийг E , F цэгүүдээр, AC , AD , AB хэрчмүүдийг харгалзан N , M , L цэгүүдээр огтолдог байв. Хэрэв $NE = LF$ бол $ML = MN$ гэж батал.

11. $\angle A < 60^\circ$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжин байв. AC -ийн хувьд B -ийн тэгш хэмтэй цэгийг B' гэе. AB -ийн хувьд A -ийн тэгш хэмтэй цэгийг C' гэе. Хэрвээ ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэвэл AO ба $B'C'$ шулуунууд перпендикуляр гэж батал.

12. (ММО54, III даваа, XII-A3, 2018 он)

Хурц өнцөгт элдэв талт ABC гурвалжны өндрүүдийн огтлолцлын H цэгээс гурвалжны A өнцгийн дотоод ба гадаад биссектрисс рүү HD , HE перпендикулярууд буулгажээ. $\angle BDC + \angle BEC = 180^\circ$ гэдгийг батал.

13. (ОУМО-SL2009, G-4) Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиуд E цэгт, AD , BC талуудын үргэлжлэл F цэгт огтлолцдог байг. AB , CD талуудын дундаж цэгүүд харгалзан G , H байг. EF шулуун EGH гурвалжныг багтаасан тойргийг шүргэнэ гэж батал.14. (ММО53, IV даваа, XI-A2) Хурц өнцөгт ABC гурвалжны орто төв H бөгөөд багтаасан тойргийн төв O байв. O цэгийг дайрсан гурвалжны BC талтай параллель шулуун AB талыг F цэгт огтолох ба AH хэрчмийн дундаж цэг M гэе. $\angle CMF = 90^\circ$ гэдгийг батал.

Заавар

1. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle BLA}{\sin \angle CLA} = \frac{\sin \angle CLM}{\sin \angle BLM}$ гэж батлахад хангалттай.
2. BD ба AC параллель ба эндээс $\angle EAD = \angle CDB$, $\angle EAB = \angle DCB$ болох ба лемм 2-оос $\frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle EAD} = \frac{AD}{AB}$ гэж батлахад хангалттай ба $AD = DB$, $AB = BC$ учир $\frac{\sin \angle DCB}{\sin \angle CDB} = \frac{DB}{BC}$ болж батлагдана.
3. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle CAP}{\sin \angle BAP} = \frac{\sin \angle BAQ}{\sin \angle QAC}$ гэж батлахад хангалттай а уг нөхцөлийг ABP , APC , ABQ , AQC гурвалжнууд дээр синусын теорем бичихэд гарна.
4. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle BHX}{\sin \angle NHX} = \frac{\sin \angle MHY}{\sin \angle CHY}$ гэж батлахад хангалттай ба $\angle BAH = \angle XBN$, $\angle CAH = \angle MCY$, $\angle XNW = \angle XBW = 90^\circ$, $\angle WCY = \angle WMY$, $\angle XNB = \angle WNH$, $\angle HMW = \angle CMY$ гэдгийг ашиглан MHY , CHY , MCY , HNX , HBX , BWM , BNW , MNC , NWC гурвалжнууд дээр синусын теорем бичнэ.
5. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle DAK}{\sin \angle BAK} = \frac{KB}{DK}$ гэж батлахад хангалттай ба $\frac{KB}{DK} = \frac{DB}{ED} = \frac{AB}{AD}$ гэдгээс батлагдана.
6. $IE \cap AH = X$, $IY \cap BH = Y$ гэвэл HXY (1) параллелограмм болно. Лемм 2-оос $\frac{\sin \angle AHI}{\sin \angle BHI} = \frac{BH}{AH}$ гэж батлахад хангалттай ба (1)-ээс $\frac{\sin \angle AHI}{\sin \angle BHI} = \frac{\sin \angle BIH}{\sin \angle EIH}$ болох ба гурвалжин DIH , EIH , DCH , ECH гурвалжнууд дээр синусын теорем бичээд $ID = IE$, $CD = CE$ гэдгийг ашигла.
7. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэвэл A, P, O, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\angle MAC = \alpha$, $\angle MAB = \beta$ гэвэл $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AB}{AC}$ (1) болно. EDF гурвалжин дээр синусын теорем бичвэл $\frac{EF}{DF} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$ болно. OEF , ODF гурвалжнууд синусын теорем бичиж нэгтгэвэл $\frac{\sin \angle EOF}{\sin \angle DOF} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ болох ба лемм 1-ээ $\angle EOF = \beta$ болно. AFC , AFB гурвалжнууд дээр синусын теорем бичиж (1)-ийг ашиглавал $\sin \angle AFC = \sin \angle AFB$ болсноор $\angle AFC = \angle AFB$ гэдгээс $\angle FAC = \beta = \angle WCY$ болж O, F, N, A цэгүүд нэг тойрог дээр орших болж A, P, O, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино гэдгээс батлагдан.
8. Лемм 1-ээс $\angle BHP = \angle ACB$ учир $\frac{\sin \angle BHR}{\sin \angle PHR} = \frac{\sin \angle ACM}{\sin \angle BCM}$ гэж батлахад хангалттай.
9. Лемм 1-ээс $\frac{\sin \angle APO}{\sin \angle BPO} = \frac{\sin \angle APE}{\sin \angle DPE}$ гэж батлавал болох учир APQ , PBQ , APE , PDE гурвалжнууд дээр синусын теорем бич.
10. Лемм 2-оос $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAD = \beta$ гэвэл $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AL}{AN} = a$ гэж батлахад хангалттай. $a^2 = \frac{CK}{BK}$ болох ба мөн өгсөн нөхцөлийг ашиглавал $\frac{NC}{LB} = a$ гэдгийг ашиглаад CNK , LBK , ANL дээр синусын теорем бич.
11. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ гэвэл $\frac{\sin \angle B'AO}{\sin \angle C'AO} = \frac{\sin(90^\circ - \beta + \alpha)}{\sin(2\alpha + \beta - 90^\circ)}$ гэдгийг лемм 1-тэй хамт хэрэглэ.

12. $AE \cap BC = E_1$ гэе. $\angle BDC = \angle BHC$, $\frac{\sin \angle CB_1A_1}{\sin \angle BB_1A_1} = \frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle HEC}$, $\frac{\sin \angle BC_1A_1}{\sin \angle CC_1A_1} = \frac{\sin \angle E_1EB}{\sin \angle HEB}$ гэдгийг лемм 1-тэй хамт хэрэглэ.
13. BC -ийн дундаж цэгийг M , AD -ийн дундаж цэгийг N гэвэл $\angle AEB = \angle MHN$ болно. Лемм 1-ээ ашиглан $\angle AEF = \angle MHG$ гэж батал. Дараа нь $\angle MHE = \angle AEG$ гэж батал.
14. CL өндөр буулгав. $\angle MCL = \angle FCB$ гэж батлахад хангалттай. $\angle OCB = \angle ACL$ гэдгээс лемм 1-ийг ашигла.