

Contents

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо	1
Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо ТББ	1
Олон Улсын Математикийн 58-р Олимпиад	3
Монголын баг	3
Бодлогууд	4
ОУМО-д оролцох багийг сонгох журам	5
Бүсийн математикийн олимпиад	6
Бодлогууд	6
Бодолтууд	11
П. Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын XIV уралдаан	29
Бодлогууд	29
Бодолтууд	35
Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын III Даваа	57
Бодлогууд	57
Бодолтууд	62
Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын IV Даваа	82
Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын IV даваа	82
Бодлогууд	84
Бодолтууд	89
Монголын Математикийн Нийгэмлэг	107
Mathematical Gems	107
Зоосны бодлого (Ү. Отгонбаяр, 2018 оны 2 сарын 4)	107
Бутархайн үе ба Артиний таамаглал (Г. Баярмагнай, 2018 оны 3 сарын 3)	112

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо ТББ

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо (ММОХ) Төрийн Бус Байгууллага (ТББ) нь Ц. Дашдорж, Б. Баясгалан, Д. Нарангэрэл, Б. Сандагдорж, Б. Баасандорж, П. Бүүвэйбаатар болон Ч. Даваадорж нарын санаачлагаар үүсгэн байгуулагдаж 2008 оны 12 сарын 03 өдөр гэрчилгээгээ авсан түүхтэй.

Энэ оноос ММОХ ТББ шинэчлэн зохион байгуулагдаж байна. 2018 онд ерөнхийлөгчөөр АНД Глобал компанийн гүйцэтгэх захирал Ч. Анар, дэд ерөнхийлөгчөөр Петровис ХХК-ийн ТУЗ-ийн дарга Ж. Оюунгэрэл болон М-Си-Эс Группийн дэд ерөнхийлөгч Д. Энхтүвшин нар сонгогдон ажиллахаар боллоо.

Олимпиадын хорооны үйл ажиллагааг бүх талаар дэмжин ажиллахаар болсон математикт элэгтэй, боловсролыг дэмжигч шинээр сонгогдсон ерөнхийлөгч болон дэд ерөнхийлөгчид дөө Монголын нийт математикчид болон математикт дуртай бүх хүний өмнөөс гүн талархал илэрхийлж ажлын өндөр амжилт хүсэн ерөөе!

Мэндчилгээ

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо (ММОХ) болон Монголын Математикийн Нийгэмлэгээс бэлтгэн гаргадаг ээлжит сэтгүүлийг маань сонирхон уншиж буй танд энэ өдрийн мэндийг дэвшүүлье.

Математик бол бүх шинжлэх ухааны суурь, хаан шинжлэх ухаан билээ. Монгол улсын ирээдүй шинжлэх ухаанч, оюунлаг залуусын ур чадвар, бүтээлд суурилах нь зайлшгүй юм. Энэ жилээс шинэчлэгдэн зохион байгуулагдаж байгаа ММОХ маань үйл ажиллагааныхаа хүрээнд математикийг хүүхэд залуучуудад сурталчлах, ач холбогдлыг таниулах, цаашилбал хүүхэд залуучуудыг дотоодын болон олон улсын олимпиадуудад оролцох, амжилт гаргах үндэс суурийг тавихаар идэвхтэй үйл ажиллагаа явуулах болно.

Бидний үйл ажиллагааг маань үргэлж дэмжиж, Математикийн шинжлэх ухааны салбарт хувь нэмэр оруулж байдаг та бүхэнд талархал илэрхийлье.

Хүндэтгэсэн



Ч. Анар
Ерөнхийлөгч
ММОХ

Товч Танилцуулга**Ерөнхийлөгч Ч. АНАР**

- АНД Глобал компанийн үүсгэн байгуулагч, гүйцэтгэх захирал
- ИРО Консалтинг компанийн үүсгэн байгуулагч, захирал
- Жи-Мобайл ХХК-ийн үүсгэн байгуулагч, 2006–2009
- Монголын Цахилгаан Холбоо ХК-ийн инженер, 2001–2005

**Дэд ерөнхийлөгч Ж. ОЮУНГЭРЭЛ**

- Петровис ХХК-ийн ТУЗ-ийн дарга
- Улаанбаатар хотын Худалдааны Танхимын ерөнхийлөгч
- Улаанбаатар дахь Бритиш Сургуулийн ТУЗ-ийн дарга
- Ард Санхүүгийн Нэгдлийн ТУЗ-ийн гишүүн
- Mongolian Mining Corporation-ийн ТУЗ-ийн гишүүн

**Дэд ерөнхийлөгч Д. ЭНХТҮВШИН**

- М-Си-Эс Группийн дэд ерөнхийлөгч
- М-Си-Эс Групп-д 1997 оноос хойш санхүү, хөрөнгө оруулалт, борлуулалт, стратегийн чиглэлээр ажиллаж байгаа



Олон Улсын Математикийн 58-р Олимпиад

Монголын баг

Олон Улсын Математикийн 58-р Олимпиад 2017 оны 7 сарын 12 – 23 өдрүүдэд Бразил улсын Рио де Жанейро хотноо боллоо. Монгол улсаа төлөөлж

	Овог	Нэр	Сургууль
MNG1	Сосорбарам	Цэнд-Аюуш	Эмпати
MNG2	Нямсайхан	Эрхэс	Оюунлаг
MNG3	Хэнзий	Санжаахүү	Эмпати
MNG4	Баатар	Алтангэрэл	Эмпати
MNG5	Батсайхан	Батмэнд	УБ1
MNG6	Мижиддорж	Лханаажав	Олонлог

нар оролцож өндөр амжилт гаргалаа. Багийн ахлагчаар ММОХ дарга Др. Г. Баярмагнай (МУИС), дэд ахлагчаар Др. Ү. Отгонбаяр (МУИС) нар, С ажиглагчаар Б. Баяржаргал (Олонлог) болон З. Бат-Эрдэнэ (УБ 1) нар ажиллаа.



Бодолт 7 сарын 18, 19 өдрүүдэд явагдаж манай баг нийт 93 оноо авч 1 мөнгө, 2 хүрэл медалиар 48-р байр эзэллээ. Нийт оролцогчиддоо баяр хүргэе.

Овог	Нэр	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Нийт	Амжилт
Сосорбарам	Цэнд-Аюуш	7	3	0	7	1	1	19	Мөнгөн медал
Баатар	Алтангэрэл	7	3	0	7	0	0	17	Хүрэл медал
Нямсайхан	Эрхэс	7	3	0	7	0	0	17	Хүрэл медал
Хэнзий	Санжаахүү	7	1	0	7	0	0	15	Тусгай шагнал
Батсайхан	Батмэнд	4	2	0	7	0	0	13	Тусгай шагнал
Мижиддорж	Лханаажав	5	0	0	7	0	0	12	Тусгай шагнал
Монголын	Баг	37	12	0	42	1	1	93	48-р байр



Бодлогууд

Олон Улсын Математикийн 57-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодлого 1. Бүхэл тоо $a_0 > 1$ бүрийн хувьд $a_0, a_1, a_2, \dots$ дарааллыг дараах дүрмээр тодорхойлж. Үүнд $n \geq 0$ үед

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{хэрэв } \sqrt{a_n} \text{ бүхэл тоо} \\ a_n + 3, & \text{бусад.} \end{cases}$$

Төгсгөлгүй олон n дугаарын хувьд $a_n = A$ биелэх A тоо олддог байх a_0 -ийн бүх утгыг тодорхойл.

Бодлого 2. Бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}$ гэж тэмдэглэе. Дурын бодит x, y тоонуудын хувьд

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодлого 3. Хавтгайд анчин ба үл үзэгдэх туулай хоёр тоглоом тогложээ. Туулайн эхлэлийн A_0 цэг анчны эхлэлийн B_0 цэгтэй давхацдаг. Тоглоомын $n - 1$ алхмын дараа туулай A_{n-1} цэг дээр, анчин B_{n-1} цэг дээр очсон байдаг. Тоглоомын n дүгээр алхмаар дараах 3 үйлдэл дараалан хийгддэг. Үүнд:

- (1) Туулай A_{n-1} цэгээс нэгж зайд байрлах A_n цэг рүү харагдахгүйгээр явдаг.

(2) Тусгай төхөөрөмж анчинд P_n цэгийг мэдээлдэг. P_n ба A_n цэгүүдийн хоорондох зай нэгжээс хэтрэхгүй байх нь тусгай төхөөрөмжөөс анчинд өгч буй баталгаатай зүйл юм.

(3) Анчин B_{n-1} цэгээс нэгж зайд байрлах B_n цэг рүү харагдахуйцаар явдаг.

Туулай хаашаа явах болон тусгай төхөөрөмж ямар цэгүүдийг мэдээлэхээс үл хамааран анчин 10^9 алхмын дараа анчин ба туулайн хоорондох зай 100 нэгжээс хэтрэхгүй байхаар анчин хэрхэн явахаа шийдэх үргэлж боломжтой юу?

Бодлого 4. Ω тойрог дээр ялгаатай R ба S цэгүүдийг RS нь диаметр биш байхаар сонгов. Ω тойргийг R цэгт шүргэх шулууныг l гэе. T цэгийг RT хэрчмийн дундаж цэг S байхаар сонгоё. JST гурвалжныг багтаасан Γ тойрог l шулууныг ялгаатай хоёр цэгээр огтолж байхаар Ω тойргийн богино RS хөвч дээр J цэгийг сонгож авъя. R цэгтэй ойрхон бөгөөд Γ тойрог ба l шулууны огтлолцолд байрлах цэгийг A гэе. AJ цацраг Ω тойргийг огтлох цэгийг K гэе. KT шулуун Γ тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодлого 5. Бүхэл тоо $N \geq 2$ өгөгдөв. Аль ч хоёрынх нь өндөр ялгаатай $N(N+1)$ тамирчид нэг эгнээнд жагсаж байв. Эгнээнд үлдэх $2N$ тамирчны хувьд дараах N ширхэг шаардлага биелж байхаар $N(N-1)$ тамирчныг энэ эгнээнээс гаргахаар шийджээ. Үүнд:

(1) үлдэх тамирчдын хамгийн өндөр 2 тамирчны хооронд хэн ч байхгүй,

(2) үлдэх тамирчдын 3 ба 4-р өндөр тамирчдын хооронд хэн ч байхгүй,

⋮

(N) үлдэх тамирчдын хамгийн намхан 2 тамирчны хооронд хэн ч байхгүй.

Энэ шийдвэр үргэлж биелэх боломжтой болохыг батал.

Бодлого 6. Хэрэв x, y нь харилцан анхны бүхэл тоонууд бол (x, y) хосыг *примитив цэг* гэе. Төгсгөлөг тооны примитив цэгүүдээс тогтох өгөгдсөн S олонлогийн хувьд тус олонлогийн (x, y) цэг бүр дээр

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

адилтгал биелдэг байхаар эерэг бүхэл n , бүхэл $a_0, a_1, \dots, a_n$ тоонууд олдохыг батал.

ОУМО-д Монгол Улсыг төлөөлж оролцох багийн гишүүдийг сонгох журам

1 Ерөнхий зүйл

- 1.1. Олон Улсын Математикийн Олимпиадад Монгол Улсыг төлөөлж, ОУМО-ийн дүрмийн дагуу, зургаан (6) гишүүнтэй баг оролцоно. Энэ багийг *албан ёсны баг* гэнэ.
- 1.2. Албан ёсны багийг *удирдагч, дэд удирдагч* нар ахлан авч явах бөгөөд удирдагч, дэд удирдагчийг ММОХ сонгоно.
- 1.3. Албан ёсны багт зөвхөн, ОУМО-ийн дүрмийн дагуу, ОУМО-д Монгол Улсыг төлөөлөн оролцох эрх бүхий сурагч багтаж болно. Үүнд ОУМО эхлэх өдөр 20 нас хүрээгүй, их дээд болон түүнтэй дүйцэхүйц сургуульд суралцдаггүй байх хэрэгтэй.
- 1.4. Албан ёсны багийн гишүүдийг *бэлтгэл баг*-ийн гишүүдээс сонгон шалгаруулж авна.

2 Бэлтгэл багийн гишүүдийг сонгох

- 2.1. Бэлтгэл багийн гишүүдийг I шатны сорилын оноонуудын нийлбэр дүнгээр шалгаруулж сонгоно.
- 2.2. Бусад сурагчид бэлтгэл багт орох хүсэлтээ ММОХ-д гаргах бөгөөд бэлтгэл багт оруулах эсэхийг ММОХ шийднэ.
- 2.3. Бэлтгэл багийн гишүүд II болон III шатны сорилуудад оролцох эрхтэй.

3 Албан ёсны багийн гишүүдийг сонгох

- 3.1. Албан ёсны багийн гишүүдийг бэлтгэл багийн гишүүдээс II болон III шатны сорилуудад гаргасан амжилтаар шалгаруулж сонгоно. Үүнд:
 - (1) Бэлтгэл багийн гишүүн X бүрт
 - (i) II шатын сорилын оноо $S(X)$
 - (ii) III шатны сорилын оноо $O(X)$
 - (iii) Нийт оноо $N(X) = S(X) + O(X)$
 өгөх бөгөөд гишүүдийг нийт оноогоор өндрөөс намруу жагсаана.
 - (2) Нийт оноо давхацсан бол II шатны сорилын оноо, S , өндөртэй нь урд жагсана.
 - (3) Нийт оноо болон II шатны сорилын оноо давхацсан бол жагсах эрэмбийг ММОХ шийднэ.
 - (4) Хамгийн урд жагссан зургаан гишүүн албан ёсны багт орно.
- 3.2. II шатны сорилын оноо $S(X)$ нь II шатны сорилын оноонуудын нийлбэр байна.
- 3.3. III шатны сорилын оноо $O(X)$ нь Улсын Математикийн Олимпиадын сүүлчийн давааны 12-р ангийн ангилалд авсан оноо байна. (Оролцоогүй эсвэл өөр ангилалд оролцсон бол 0 оноо).

Бүсийн математикийн олимпиад

Бүсийн математикийн II олимпиад 2016 оны 10 сарын 8 өдөр амжилттай зохион байгуулагдлаа. Говийн бүст Баянхонгор, Дундговь, Өвөрхангай, Өмнөговь аймгууд, Зүүн бүс Дорнод, Говьсүмбэр, Хэнтий, Сүхбаатар, Дорноговь аймгууд, Төвийн бүст Архангай, Булган, Дархан-Уул, Эрдэнэт, Төв, Хөвсгөл, Сэлэнгэ аймгууд, Баруун бүст Баян Өлгий, Говь-Алтай, Завхан, Увс, Ховд аймгууд оролцлоо.

Бодлогууд

II анги

Бодлого II-1. Цэцгээ улаан, хөх, шар өнгийн нийт 20 ширхэг цэцэг зуржээ. Түүний зурсан 5 цэцэг нь улаан өнгөтэй, 12 цэцэг нь хөх өнгөтэй биш. Цэцгээ хөх, шар өнгөөр тус бүр хэдэн цэцэг зурсан бэ?

Бодлого II-2. Эхний гурван цифийн нийлбэр нь 25, сүүлийн гурван цифрийн нийлбэр нь 16 байх бүх дөрвөн оронтой тоог ол.

Бодлого II-3. $БИ + ЧИ + ЧИ = БИД$ үсэгт тааврыг бод. (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого II-4. Бат, Цэцэг хоёр хөзөр тогложээ. Эхлээд тоглоход Бат өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Цэцэгт алдав. Дахин тоглоход Цэцэг өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Батад алдав. Дахин нэг тоглоход Бат өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Цэцэгт алджээ. Тэгэхэд Бат 30 хөзөртэй, Цэцэг 70 хөзөртэй болсон бол анх хүүхэд тус бүрт хэдэн хөзөр байсан бэ?

III анги

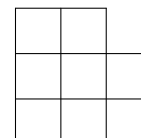
Бодлого III-1. Бат, Цэцэг, Дорж, Чимэг дөрөв нэг эгнээнд жагсжээ. Тэдэнд нийт 100 чихэр байсан. Батаас баруун талд зогссон хүүхдүүдэд нийт 60 чихэр байв. Цэцгээс зүүн талд зогссон хүүхдүүдэд нийт 70 чихэр байв. Доржийн баруун талд зогссон хүүхдүүхийн чихрийн нийт тоо зүүн талд зогссон хүүхдүүдийн чихрийн нийт тоотой ижил. Хүүхдүүд ямар дарааллаар зогссон бэ? Хүүхэд тус бүрт хэдэн чихэр байсан бэ?

Бодлого III-2. Гурван хайрцагт нийт 140 ширхэг бөмбөг байжээ. Нэг хайрцагт өөр нэг хайрцагас 2 дахин олон бөмбөг, мөн нэг хайрцагт өөр нэг хайрцагас 3 дахин олон бөмбөг байсан бол хайрцаг тус бүрт хэдэн бөмбөг байсан бэ?

Бодлого III-3. $\overline{ЧИХ} + \overline{ИХЭ} + \overline{ХЭР} = 2016$ бол $\overline{ЧИХЭР}$ тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого III-4.

3 мөр, 3 багана, мөн гурван нүдтэй диагональ дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар зурагт үзүүлсэн дүрсийн нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 тоонуудыг бич.

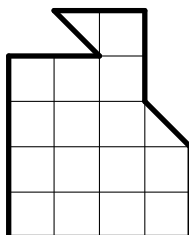


IV анги

Бодлого IV-1. Эхний цифрийг нь хамгийн сүүлд гаргаж бичихэд 2016-аар багасдаг дөрвөн оронтой бүх тоог ол.

Бодлого IV-2. $\overline{ЧИХ} + \overline{ИХЭ} + \overline{ХЭР} = 2016$ бол $\overline{ЧИХЭР}$ тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого IV-3. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 4 тэнцүү дүрсэд хуваа.



Бодлого IV-4. Бат эхний цифр нь сүүлийн гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Харин Цэцэг сүүлийн цифр нь эхний гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

V анги

Бодлого V-1. Малчин үхэр, хонь, ямаа нийлээд 100-аас цөөн малтай байжээ. Хэрэв малчны үхэр 35 дахин, хонь 40 дахин, ямаа 60 дахин өсвөл түүний үхэр, хонь, ямааны тоо хоорондоо тэнцүү болно. Малчин хэдэн үхэр, хонь, ямаатай вэ?

Бодлого V-2. $D \cdot \bar{E} \cdot B \cdot T \cdot \bar{E} \cdot P = 2016$ бол $\overline{D\bar{E}BT\bar{E}P}$ тоо

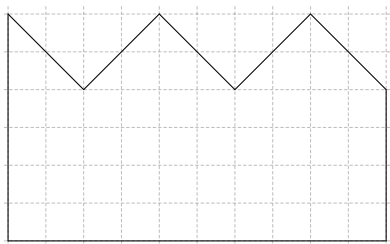
а) хамгийн багадаа,

б) хамгийн ихдээ

хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого V-3. Бат эхний цифр нь сүүлийн гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Харин Цэцэг сүүлийн цифр нь эхний гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

Бодлого V-4. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 2 тэнцүү дүрсэд хуваа.

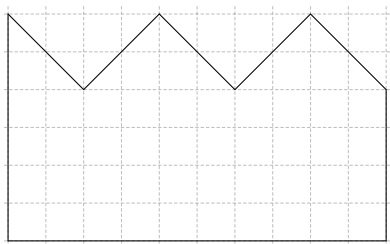


VI анги

Бодлого VI-1. $БИ + ЧИ + ЧИ + \dots + ЧИ = БИД$ үсэгт тааварт хамгийн олондоо хэдэн ЧИ байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого VI-2. Цифрүүдийн нийлбэр нь тэгш, мөн үржвэр нь бас тэгш байх хэдэн ялгаатай зургаан оронтой тоо байх вэ?

Бодлого VI-3. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 2 тэнцүү дүрсэд хуваа.



Бодлого VI-4. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

VII анги

Бодлого VII-1. 40 сурагч гар, гараасаа барилцан тойрон бүжиг хийжээ. Хөвгүүний гараас барьсан сурагчийн тоо 22, охины гараас барьсан сурагчийн тоо 30 бол тойрогт хэдэн охин байсан бэ?

Бодлого VII-2. $\overline{ЭНХ} : \overline{БАТ} : \overline{ДОРЖ} = 6 : 9 : 13$ бол $\overline{ЭНХБАТДОРЖ}$ тоог ол. (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодлого VII-3. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг “тримино” тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. Квадратыг а) 10 ширхэг, б) 20 ширхэг, в) 30 ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болох уу?

Бодлого VII-4. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

VIII анги

Бодлого VIII-1. Самбарт нийлбэр нь 0 гардаг ялгаатай бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Самбарт бичигдсэн тоонуудын үржвэр 2016 байж болох уу?

Бодлого VIII-2. Шатрын тэмцээнд 70 хөвгүүн, 30 охин оролцжээ. 3 тойрог (хүүхэд бүр нэг тойрогт 1 удаа тоглоно) тоглоход охидууд хоорондоо 21 өрөг тоглосон байв. Энэ үед хөвгүүд хоорондоо хэдэн өрөг тоглосон байх вэ?

Бодлого VIII-3. $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ илэрхийлэлд утга нь 2016 гарч байхаар хаалтууд байрлуулж болох уу?

Бодлого VIII-4. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг “тримино” тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. $n > 5$ бол квадратыг n ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болохыг батал.

IX анги

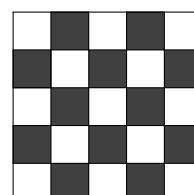
Бодлого IX-1. Самбарт нийлбэр нь 0 гардаг ялгаатай бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Самбарт бичигдсэн тоонуудын үржвэр 2016 байж болох уу?

Бодлого IX-2. Зурагт $ABCD$ квадрат, зөв ABE , ADF , BDK гурвалжнуудыг дүрсэлжээ. $EF = DK$ гэж батал.

Бодлого IX-3. Улаан, хөх өнгийн хэдэн бөмбөг байжээ. Бөмбөгнүүдийг 10 уутанд яаж ч хувааж хийхэд, аль нэг 2 уутанд нийлээд дор хаяж 7 улаан, дор хаяж 5 хөх бөмбөг ордог байв. Хамгийн цөөндөө хэдэн бөмбөг байсан бэ?

Бодлого IX-4.

5×5 хэмжээтэй хөлгийн нүднүүдийг хар, цагаан өнгөөр шатрын хөлөг шиг алаглуулан будсан байв (зураг). Нэг удаагийн үйлдлээр хөлөг дээр шугамын дагуу талуудтай 1×3 эсвэл 3×1 хэмжээтэй тэгш өнцөгт сонгон авч, сонгосон тэгш өнцөгтийн бүх нүдийг нэгэн зэрэг эсрэг өнгөөр сольж будаж болно. Хамгийн цөөндөө хэдэн үйлдлийн дараа хөлгийн бүх нүд цагаан өнгөтэй болох вэ?



X анги

Бодлого X-1. Хэдэн ялгаатай натурал тооны арифметик дундаж нь x бүхэл, арван мянганы 2016 гарчээ. x нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодлого X-2. Натурал n тооны өөрөөс нь ялгаатай хамгийн их натурал тоон хуваагчийг $d(n)$ гэж тэмдэглэе. $d(n) + d(n+1)$ нийлбэр нь бүтэн квадрат байх n тоо төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

Бодлого X-3. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{a+bc}{a+1}\right) \cdot \left(\frac{b+ca}{b+1}\right) \cdot \left(\frac{c+ab}{c+1}\right) \geq abc$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого X-4. $AB < AC$ талуудтай ABC гурвалжны AD биссектрисс, AM медианыг татжээ. D цэгийг дайрсан гурвалжны AB талтай параллель шулуун AM медианыг K цэгт огтолно. $BK \perp AD$ гэж батал.

XI анги

Бодлого XI-1. Хэдэн ялгаатай натурал тооны арифметик дундаж нь x бүхэл, арван мянганы 2016 гарчээ. x нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодлого XI-2. $\angle B = \angle D = 90^\circ$ өнцөгтэй гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиуд O цэгт огтлолцоно. O цэгийг дайрсан AC диагоналд перпендикуляр шулуун AB, CD шулуунуудыг E, F цэгүүдэд огтолдог бол $OE = OF$ гэдгийг батал.

Бодлого XI-3. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерг тоонууд бол

$$a + b + c + \frac{3}{ab + bc + ca} \geq 4$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодлого XI-4. Натурал n тооны цифрийн нийлбэрийг $S(n)$ гэж тэмдэглэе. $0.2 \leq \frac{p}{q} \leq 2$ байх ямар ч бутархай $\frac{p}{q}$ тооны хувьд $S(2n) = \frac{p}{q} \cdot S(n)$ байх натурал n тоо олдохыг батал.

XII анги

Бодлого XII-1. 2-р гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь хоёр хөрш гишүүнийхээ арифметик дундаж ба геометр дунджийн нийлбэрийн хагастай тэнцүү байдаг эерэг тоон $a_1, a_2, \dots$ дараалал өгөгджээ. $a_1 = \frac{2}{7}$ ба $a_{11} = \frac{7}{2}$ бол a_{333} гишүүнийг ол.

Бодлого XII-2. Ямар ч эерэг x, y тоонуудын хувьд

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

байх хамгийн их a тоог ол.

Бодлого XII-3. 100 зураач бие биенийхээ хөргийг зурж эхэлжээ (өөрийнхөө хөргийг зурахгүй). Хэсэг хугацааны дараа зураач бүр 75 зураачийн хөргийг зурсан байв. Аль ч зураач нь нөгөө 2 зураачийнхаа хөргийг зурсан байдаг 3 зураач олдохыг батал.

Бодлого XII-4. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны $АН$ өндөр, $СМ$ медианыг татсан бөгөөд $СМ$ медианы үргэлжлэл гурвалжныг багтаасан тойргийг K цэгт огтолно. D цэгийг $ABCD$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар сонгож авсан бол C, D, K, H цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ илэрхийлэлд утга нь 2016 гарч байхаар хаалтууд байрлуулж болох уу?

Бодлого ББ-2. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

Бодлого ББ-3. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг “тримино” тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. $n > 5$ бол квадратыг n ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болохыг батал.

Бодлого ББ-4. Цэцгээ өдөр бүр x чихэр эсвэл y чихэр иддэг байв ($x < y$). Цэцгээ сарын эхний 9 хоногт 100 ширхэг чихэр, дараагийн 11 хоногт бас 100 ширхэг чихэр иджээ. Харин тэр яаж ч хичээгээд сүүлийн 10 хоногт яг 100 чихэр идэж чадахгүй бол x ба y -ийг ол.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. 2-р гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь хоёр хөрш гишүүнийхээ арифметик дундаж ба геометр дунджийн нийлбэрийн хагастай тэнцүү байдаг эерэг тоон $a_1, a_2, \dots$ дараалал өгөгджээ. $a_1 = \frac{2}{7}$ ба $a_{11} = \frac{7}{2}$ бол a_{333} гишүүнийг ол.

Бодлого ДБ-2. Ямар ч эерэг x, y тоонуудын хувьд

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

байх хамгийн их a тоог ол.

Бодлого ДБ-3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүд H цэгт огтлолцоно. AD өндрийн үргэлжлэл дээр F цэгийг $DH = DF$ байхаар сонгон авчээ. AEF гурвалжныг багтаасан тойрог BC шулууныг K, L цэгүүдэд огтолдог бол $BK = BL$ гэж батал.

Бодлого ДБ-4. Натурал n тооны бүх хуваагчдыг буурах эрэмбээр $n = d_1 > d_2 > \dots > d_m = 1$ гэж тэмдэглэе.

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{m+1} d_m = n - 1$$

байх бүх натурал n тоог ол.

Бодолтууд

II анги

Бодлого II-1. Цэцгээ улаан, хөх, шар өнгийн нийт 20 ширхэг цэцэг зуржээ. Түүний зурсан 5 цэцэг нь улаан өнгөтэй, 12 цэцэг нь хөх өнгөтэй биш. Цэцгээ хөх, шар өнгөөр тус бүр хэдэн цэцэг зурсан бэ?

$$\text{Бодолт.} \quad \left. \begin{array}{rcl} Y + X + \text{Ш} & = & 20 \\ Y & = & 5 \\ Y + \text{Ш} & = & 12 \end{array} \right\} \text{гэдгээс } \text{Ш} = 12 - 5 = 7 \text{ ба } X = 20 - 5 - 7 = 18 \text{ гэж олдоно.}$$

Бодлого II-2. Эхний гурван цифийн нийлбэр нь 25, сүүлийн гурван цифрийн нийлбэр нь 16 байх бүх дөрвөн оронтой тоог ол.

Бодолт. Олох тоогоо $\overline{abcd}$ гэе. $a + b + c = 25$ ба $b + c + d = 16$ билээ. Хооронд нь хасвал $a - d = 9$ гэж гарах тул $a = 9$ ба $d = 0$ юм. Харин b, c нь нийлбэр нь 16 байх дурын 2 цифр байх ёстой. Иймд 9970, 9880, 9790 гэсэн гурван тоо олдоно.

Бодлого II-3. $\text{БИ} + \text{ЧИ} + \text{ЧИ} = \text{БИД}$ үсэгт тааврыг бод. (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодолт. $\text{БИД} = \text{БИ} + \text{ЧИ} + \text{ЧИ} < 3 \cdot 99 = 297$ тул Б нь 1 эсвэл 2 байна.

- Б = 2 үед:
 $\text{БИ} + \text{ЧИ} + \text{ЧИ} = \text{БИД}$ илэрхийлэл нь $20 \cdot \text{Ч} = 90 \cdot \text{Б} + 7 \cdot \text{И} + \text{Д}$ илэрхийлэлд шилжих ба эндээс $20 \cdot \text{Ч} = 180 + 7 \cdot \text{И} + \text{Д} > 180$ буюу $\text{Ч} > 9$ болж зөрчилд хүрнэ.

- Б = 1 үед:
 $20 \cdot \text{Ч} - 90 = 7 \cdot \text{И} + \text{Д}$ буюу $2 \cdot \text{Ч} - 9 = \frac{7 \cdot \text{И} + \text{Д}}{10}$ болно.

Ч = 5 үед $7 \cdot \text{И} + \text{Д} = 10$ тул И = 1, Д = 3

Ч = 6 үед $7 \cdot \text{И} + \text{Д} = 30$ тул И = 3, Д = 9 эсвэл И = 4, Д = 2

Ч = 7 үед $7 \cdot \text{И} + \text{Д} = 50$ тул И = 6, Д = 8 эсвэл И = 7, Д = 1

Ч = 8 үед $7 \cdot \text{И} + \text{Д} = 70$ тул И = 9, Д = 7

Ч = 9 үед $7 \cdot \text{И} + \text{Д} = 90$ тул И > 9 буюу шийдгүй

Иймд зөв шийдүүдийг жагсаан бичвэл: $19 + 89 + 89 = 197$, $16 + 76 + 76 = 168$, $14 + 64 + 64 = 142$, $13 + 63 + 63 = 139$ гэсэн дөрвөн шийд гарна.

Бодлого II-4. Бат, Цэцэг хоёр хөзөр тогложээ. Эхлээд тоглоход Бат өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Цэцэгт алдав. Дахин тоглоход Цэцэг өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Батад алдав. Дахин нэг тоглоход Бат өөрийн бүх хөзрийн хагасыг Цэцэгт алджээ. Тэгэхэд Бат 30 хөзөртэй, Цэцэг 70 хөзөртэй болсон бол анх хүүхэд тус бүрт хэдэн хөзөр байсан бэ?

Бодолт. Үйлдлийг ухраан хийе. Тэд нийд 100 хөзөртэй байсан. Сүүлийн үйлдэл дээр Бат хагас хөзрөө алдан 30 хөзөртэй болсон тул түүнээс өмнө 60 хөзөртэй байсан ба Цэцэг 40 хөзөртэй байсан. Цэцэг хагас хөзрөө алдан 40 хөзөртэй болсон тул түүнээс өмнө 80 хөзөртэй байсан ба Бат 20 хөзөртэй байсан гэсэн үг. Бат хагас хөзрөө алдан 20 хөзөртэй болсон тул түүнээс өмнө 40 хөзөртэй байсан ба Цэцэг 60 хөзөртэй байсан гэсэн үг. Иймд анх Бат ба Цэцэг харгалзан 40 ба 60 хөзөртэй байсан.

III анги

Бодлого III-1. Бат, Цэцэг, Дорж, Чимэг дөрөв нэг эгнээнд жагсжээ. Тэдэнд нийт 100 чихэр байсан. Батаас баруун талд зогссон хүүхдүүдэд нийт 60 чихэр байв. Цэцгээс зүүн талд зогссон хүүхдүүдэд нийт 70 чихэр байв. Доржийн баруун талд зогссон хүүхдүүхийн чихрийн нийт тоо зүүн талд зогссон хүүхдүүдийн чихрийн нийт тоотой ижил. Хүүхдүүд ямар дарааллаар зогссон бэ? Хүүхэд тус бүрт хэдэн чихэр байсан бэ?

Бодолт. Доржоос баруун талд байрлах хүүхдүүдийн чихрийн тоо нь зүүн талд байрлах хүүхдүүдийн чихрийн тоотой тэнцүү тул дорж захад байрлахгүй. Батаас баруун талд байгаа хүүхдүүдийн чихрийн тоон дээр Цэцгээс зүүн талд байгаа хүүхдүүдийн чихрийн тоог нэмэхэд нийт чихрийн тооноос их гарч байгаа тул Цэцэг Батаас баруун тийш байрлах ба тэр хоёрын хооронд зогсох хүүхдүүдийн нийт чихрийн тоо нь $(60 + 70) - 100 = 30$ байна. Иймд энэ хоёрын хооронд ядаж нэг хүүхэд байх ёстой буюу энэ хоёрын ядаж нэг нь захад байрлана. Цаашилбал Дорж энэ хоёрын хооронд байрлах ёстой болно. Зургаар дүрсэлбэл

$$\underbrace{\dots\text{Б}}_{40} \underbrace{\dots\text{Д}\dots}_{30} \underbrace{\text{Ц}\dots}_{30}$$

болно.

Доржоос баруун талд байрлах хүүхдүүдийн чихрийн тоо нь зүүн талд байрлах хүүхдүүдийн чихрийн тоотой тэнцүү тул Чимэг нь Дорж Цэцэг хоёрын голд байрлах нь гарч байна. Иймд $\text{Б} = 40$, $\text{Ц} = 30$, $40 = \text{Ч} + 30$ буюу $\text{Ч} = 10$, $\text{Д} = 100 - 40 - 30 - 10 = 20$ болно.

Бодлого III-2. Гурван хайрцагт нийт 140 ширхэг бөмбөг байжээ. Нэг хайрцагт өөр нэг хайрцагас 2 дахин олон бөмбөг, мөн нэг хайрцагт өөр нэг хайрцагас 3 дахин олон бөмбөг байсан бол хайрцаг тус бүрт хэдэн бөмбөг байсан бэ?

Бодолт. $a + b + c = 140$, $a \leq b \leq c$ гэе. Тэгвэл бодлогын өгөгдөл ёсоор дараах таван боломж үүснэ:

- $b = 2a$, $c = 3a$ үед $140 = a + b + c = a + 2a + 3a = 6a$ болно. $a = \frac{140}{6}$ бутархай тул шийдгүй.
- $b = 2a$, $c = 3b$ үед $c = 3b = 6a$ ба $140 = a + b + c = a + 2a + 6a = 9a$ болно. $a = \frac{140}{9}$ бутархай тул шийдгүй.
- $c = 3a$, $c = 2b$ үед $140 = a + b + c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + c = \frac{11c}{6}$ буюу $c = \frac{140 \cdot 6}{11}$ бутархай тул шийдгүй
- $b = 3a$, $c = 2b$ үед $c = 6a$ ба $140 = a + 3a + 6a = 10a$ болно. Эндээс $a = 14$, $b = 42$, $c = 82$ гэсэн шийд олдоно.
- $b = 2a$, $b = 3a$ буюу $a = b = 0$ үед $c = 140$ гэсэн шийд олдоно.

Бодлого III-3. $\overline{\text{ЧИХ}} + \overline{\text{ИХЭ}} + \overline{\text{ХЭР}} = 2016$ бол $\overline{\text{ЧИХЭР}}$ тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

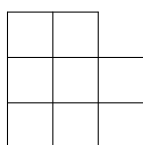
Бодолт. Хариу: 98213.

$$\overline{ЧИХ} + \overline{ИХЭ} + \overline{ХЭР} = 2016 \text{ илэрхийллийг}$$

$$100\text{Ч} + 110\text{И} + 111\text{Х} + 11\text{Э} + \text{Р} = 2016$$

гэж бичиж болно. $\overline{ЧИХЭР}$ тоог хамгийн их байлгахын тулд $\overline{ЧИ} = 98$ гэж сонгоё. Тэгвэл $111\text{Х} + 11\text{Э} + \text{Р} = 236$ болно. Эндээс Х нь хамгийн ихдээ 2 байна. Энэ үед $11\text{Э} + \text{Р} = 14$ буюу $\text{Э} = 1$ ба $\text{Р} = 3$ гэж гарна. Иймд бодлогын хариу 98213 юм.

Бодлого III-4.



3 мөр, 3 багана, мөн гурван нүдтэй диагональ дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр хоорондоо тэнцүү байхаар зурагт үзүүлсэн дүрсийн нүднүүдэд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 тоонуудыг бич.

Бодолт.

7	5	
3	1	8
2	6	4

IV анги

Бодлого IV-1. Эхний цифрийг нь хамгийн сүүлд гаргаж бичихэд 2016-аар багасдаг дөрвөн оронтой бүх тоог ол.

Бодолт. $\overline{bcda} = \overline{abcd} - 2016$ гэсэн үг. $a = A$, $\overline{bcd} = B$ гэвэл

$$B \cdot 10 + A = A \cdot 1000 + B + 2016$$

болно. Эндээс $2016 = 9B - 999A$ болно. 9-д хуваавал $224 = B - 111A$. B гурван оронтой тоо, $0 < A$ нь нэг оронтой тоо болохыг санавал $B = 224 + 111, 224 + 222, 224 + 333, 224 + 444, 224 + 555, 224 + 666$ гэсэн боломжуудтай. Иймд шийдүүдийг жагсаан бичвэл: 1335, 2446, 3557, 4668, 5779, 6890.

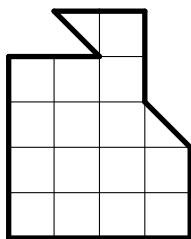
Бодлого IV-2. $\overline{ЧИХ} + \overline{ИХЭ} + \overline{ХЭР} = 2016$ бол $\overline{ЧИХЭР}$ тоо хамгийн ихдээ хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодолт. $\overline{ЧИХ} + \overline{ИХЭ} + \overline{ХЭР} = 2016$ илэрхийллийг

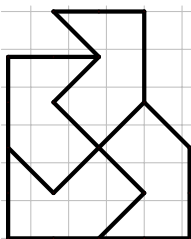
$$100\text{Ч} + 110\text{И} + 111\text{Х} + 11\text{Э} + \text{Р} = 2016$$

гэж бичиж болно. $\overline{ЧИХЭР}$ тоог хамгийн их байлгахын тулд $\overline{ЧИ} = 98$ гэж сонгоё. Тэгвэл $111\text{Х} + 11\text{Э} + \text{Р} = 236$ болно. Эндээс Х нь хамгийн ихдээ 2 байна. Энэ үед $11\text{Э} + \text{Р} = 14$ буюу $\text{Э} = 1$ ба $\text{Р} = 3$ гэж гарна. Иймд бодлогын хариу 98213 юм.

Бодлого IV-3. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 4 тэнцүү дүрсэд хуваа.



Бодолт.



Бодлого IV-4. Бат эхний цифр нь сүүлийн гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Харин Цэцэг сүүлийн цифр нь эхний гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

Бодолт. Хэрэв эхний цифрийг 0 байж болохыг зөвшөөрсөн бол тэд ижил тоо гаргах байсан. Уг тоог N гэе. сүүлийн 3 цифрийн нийлбэр 0 байх ганц боломжтой тул Бат $N - 1$ ширхэг тоо тоолсон. Эхний цифр 0 ба эхний 3 цифрийн нийлбэр сүүлийн цифртэй тэнцүү байх боломжийг тоолъё. $b + c = d$ байх b, c, d цифрүүд тоолоход болно.

1) $d = 0$ үед 1 боломж

2) $d = 1$ үед 2 боломж

⋮

10) $d = 9$ үед 10 боломж

буюу нийт 55 боломж үүснэ. Иймд Цэцэг нийт $N - 55$ тоо тоолсон. Иймд хариу: Бат Цэцэгээс $(N - 1) - (N - 55) = 54$ -өөр илүү тоо тоолсон.

V анги

Бодлого V-1. Малчин үхэр, хонь, ямаа нийлээд 100-аас цөөн малтай байжээ. Хэрэв малчны үхэр 35 дахин, хонь 40 дахин, ямаа 60 дахин өсвөл түүний үхэр, хонь, ямааны тоо хоорондоо тэнцүү болно. Малчин хэдэн үхэр, хонь, ямаатай вэ?

Бодолт. Үхэр 35 дахин, хонь 40 дахин, ямаа 60 дахин өсвөл түүний үхэр, хонь, ямааны тоо хоорондоо тэнцүү m болсон гэвэл m нь ХБЕХ(35, 40, 60) = 840-д хуваагдах ёстой. Эндээс $m = 840n$ гэвэл малчны үхрийн тоо $24n$, хонины тоо $21n$, ямааны тоо $14n$ болно. Эндээс нийт малын тоо $59n < 100$ бага тул $n = 1$ байх боломжтой. Иймд малчин 24 үхэр, 21 хонь, 14 ямаатай болно.

Бодлого V-2. $Д \cdot Э \cdot В \cdot Т \cdot Э \cdot Р = 2016$ бол $\overline{ДЭВТЭР}$ тоо

- а) хамгийн багадаа,
- б) хамгийн ихдээ

хэд байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодолт. $Д \cdot Э \cdot В \cdot Т \cdot Э \cdot Р = 1 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ байна. Эндээс хоёр Э үсэг байгаа тул Э = 3 эсвэл Э = 4 эсвэл Э = 2 байх боломжуудтай. Эндээс

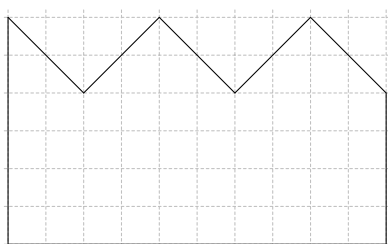
- а) хамгийн бага нь $\overline{ДЭВТЭР} = 127829$
- б) хамгийн ихдээ $\overline{ДЭВТЭР} = 947241$

байна.

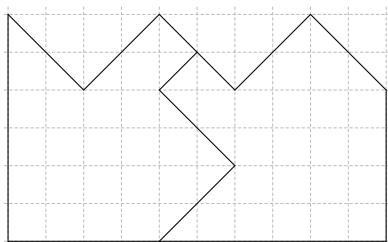
Бодлого V-3. Бат эхний цифр нь сүүлийн гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Харин Цэцэг сүүлийн цифр нь эхний гурван цифрийн нийлбэртэй тэнцүү байх дөрвөн оронтой тоонуудыг тоолжээ. Хэн нь хэдээр олон тоо тоолсон бэ?

Бодолт. **IV-4.**

Бодлого V-4. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 2 тэнцүү дүрсэд хуваа.



Бодолт.



VI анги

Бодлого VI-1. $БИ + ЧИ + ЧИ + \dots + ЧИ = БИД$ үсэгт тааварт хамгийн олондоо хэдэн ЧИ байж болох вэ? (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодолт. ЧИ олон байхын тулд аль болох бага байх ёстой. Эндээс ЧИ = 10 гэж үзээд n ширхэг удаа орсон гэе. Тэгвэл $Б0 + 10n = Б0Д$ байна. Гэтэл $10n$ болон $Б0$ хоёул 0 цифрээр төгсөх тул $Д = 0$ болж зөрчилд хүрнэ. Иймд ЧИ = 12 гэе. Тэгвэл $Б2 + 12n = Б2Д$ байна. Эндээс $Б$ мөн аль болох том байх ёстой тул $Б = 9$ гэж сонговол $90 + 12n = 920 + Д$ гэж

бичиж болно гэдгээс $12n = 828 + Д$ байна. Эндээс $828 = 12 \cdot 69$ тул $Д = 0$ гэж сонгоход хангалттай. Өөрөөр хэлбэл

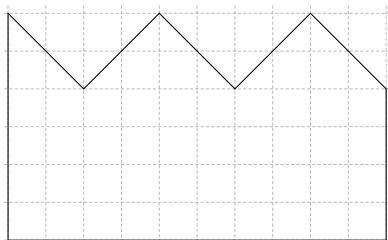
$$92 + 12 + 12 + 12 + \dots + 12 = 920$$

болно. Энд нийт 69 ширхэг 12 байна.

Бодлого VI-2. Цифрүүдийн нийлбэр нь тэгш, мөн үржвэр нь бас тэгш байх хэдэн ялгаатай зургаан оронтой тоо байх вэ?

Бодолт. Цифрүүдийн нийлбэр тэгш гэдгээс эдгээр 6 цифр дотор тэгш тооны сондгой цифр орно. Иймд цифрүүдийн нийлбэр тэгш байх нийт тооноос цифрүүдийн үржвэр нь сондгой байх тоонуудын тоог хасахад хариу гарна. Иймд эхлээд цифрүүдийн нийлбэрийн тэгш 6 оронтой тоог тоолъё. Эхний 5 цифрийг дураар сонгож байрлуулаад сүүлийн цифрийг эхний 5 цифрийн нийлбэр сондгой байвал 1, 3, 5, 7, 9 тоонуудаас нэгийг, тэгш байвал 0, 2, 4, 6, 8 тоонуудаас нэгийг сонгож нийт нийлбэрийг тэгш болгож чадна. Иймд $9 \cdot 10^4 \cdot 5 = 450000$ болно. Тэгвэл цифрүүдийн үржвэр сондгой тоо бол бүх цифр нь сондгой байна гэсэн үг. Иймд бүх цифр нь сондгой 6 оронтой 5^6 байна. Эндээс бидний хариу 434375 байна.

Бодлого VI-3. Зурагт үзүүлсэн дүрсийг 2 тэнцүү дүрсэд хуваа.



Бодолт. **V-4.**

Бодлого VI-4. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

Бодолт. Хариу: 12122222112.

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ байна. Натурал тоо 32-д хуваагдахын тулд сүүлийн 5 орон нь 32-д хуваагдах ёстой. Иймд уг тоо 22112-оор төгсөх ёстой. Уг тоо 9-д хуваагдахын тулд цифрүүдийн нийлбэр нь 9-д хуваагдах ёстой. Цифрүүдийн нийлбэр нь 9 байна гэвэл уг тоо 122112 болно. Гэвч уг тоо 7-д хуваагдахгүй. Иймд цифрүүдийн нийлбэр хамгийн багадаа 18 байна. Цифрүүдийн нийлбэр нь 18 байх хамгийн бага тоо нь 2222222112 бөгөөд энэ нь мөн 7-д хуваагдахгүй. Дараагийн бага 2 тоо нь 11222222112, 12122222112 бөгөөд шалгавал 12122222112 тоо нь 2016-д хуваагдана. Иймд зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоо 12122222112 юм.

VII анги

Бодлого VII-1. 40 сурагч гар, гараасаа барилцан тойрон бүжиг хийжээ. Хөвгүүний гараас барьсан сурагчийн тоо 22, охины гараас барьсан сурагчийн тоо 30 бол тойрогт хэдэн охин байсан бэ?

Бодолт. Охидыг "о" үсгээр, хөвгүүдийг "х" үсгээр тэмдэглэе. Дараалан зогссон гурван хүүхдийг авч үзэхэд

$$ooo, oox, oxo, oxx, xoo, xox, xxo, xxx$$

гэсэн боломжууд гарах ба харгалзах тоонуудыг $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ гэе. Дараалан зогссон 3 хүүхдийн голын хүүхдүүдийг ажиглан охин эсвэл хөвгүүнтэй гар барьсан эсэхийг тооцон бодлогын нөхцөлийг хувиргавал:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 40 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 = 22 \\ a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_1 = 30 \end{cases}$$

гэдгээс

$$\begin{cases} a_4 + a_6 + a_3 + a_1 = 22 + 30 - 40 = 12 & (*) \\ a_0 + a_2 = 22 - 12 = 10 & (**) \\ a_7 + a_5 = 30 - 12 = 18 \end{cases}$$

болно. Охидуудын тоог дараалан зогссон 3 хүүхдийн эхний хүүхэд байхаар тоолбол $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ болно. Харин сүүлийн хүүхэд байхаар тоолбол $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ болно. Эдгээр утгууд хоорондоо тэнцүү болохыг санавал:

$$a_1 + a_3 = a_4 + a_6$$

болно. (*)-ыг ашиглавал

$$a_1 + a_3 = \frac{12}{2} = 6$$

болно. (**) -ыг ашиглавал нийт охидын тоо нь

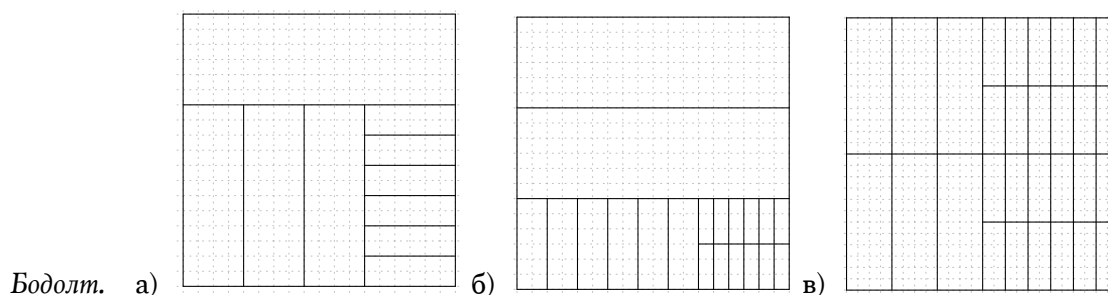
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = (a_0 + a_2) + (a_1 + a_3) = 10 + 6 = 16$$

болно.

Бодлого VII-2. $\overline{ЭНХ} : \overline{БАТ} : \overline{ДОРЖ} = 6 : 9 : 13$ бол $\overline{ЭНХБАТДОРЖ}$ тоог ол. (Ялгаатай үсгээр ялгаатай цифрийг тэмдэглэнэ.)

Бодолт. $\overline{ЭНХ} = 6x, \overline{БАТ} = 9x, \overline{ДОРЖ} = 13x$ гэе. $2000 > \overline{ЭНХ} + \overline{БАТ} = 15x > 13x = \overline{ДОРЖ}$ тул $D = 1$ байна. $\overline{ДОРЖ}$ тоо 13-т хуваагдах тул $\overline{ОРЖ} - 1$ тоо 13-т хуваагдах ёстой болно. Эндээс $O = 0$ гэж хайя. Тэгвэл $\overline{РЖ} - 1$ тоо 13-т хуваагдах ёстой болно. Эндээс $\overline{РЖ} = 27, 53, 79, 92$ гэсэн боломжуудтай. Эндээс шалгахад $\overline{ЭНХ} = 486, \overline{БАТ} = 729, \overline{ДОРЖ} = 1053$ гэсэн тоо олдоно.

Бодлого VII-3. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг "тримино" тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. Квадратыг а) 10 ширхэг, б) 20 ширхэг, в) 30 ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болох уу?



Бодолт. а)

б)

в)

Бодлого VII-4. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

Бодолт. VI-4.

VIII анги

Бодлого VIII-1. Самбарт нийлбэр нь 0 гардаг ялгаатай бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Самбарт бичигдсэн тоонуудын үржвэр 2016 байж болох уу?

Бодолт. Болно. Тухайлбал $-9, 7, -4, 2, 2, 2$ гэсэн тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодлого VIII-2. Шатрын тэмцээнд 70 хөвгүүн, 30 охин оролцжээ. 3 тойрог (хүүхэд бүр нэг тойрогт 1 удаа тоглоно) тоглоход охидууд хоорондоо 21 өрөг тоглосон байв. Энэ үед хөвгүүд хоорондоо хэдэн өрөг тоглосон байх вэ?

Бодолт. Нийт 150 өрөг тоглох ба хүүхэд бүрээс давхардуулж тоолбол нийт 300 тоглолт болсон гэсэн үг. Охидууд хоорондоо $21 \cdot 2 = 42$ тоглолт хийх бөгөөд нийт $30 \cdot 3 = 90$ тоглолтоос нь хасвал $90 - 42 = 48$ тоглолтыг хөвгүүдтэйгээ хийсэн. Иймд хөвгүүд хоорондоо

$$300 - 90 - 48 = 162$$

тоглолт хийх буюу $162 : 2 = 81$ өрөг тоглосон.

Бодлого VIII-3. $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ илэрхийлэлд утга нь 2016 гарч байхаар хаалтууд байрлуулж болох уу?

Бодолт. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 гэсэн тоонуудын үржвэр 2-ын 8 зэрэг агуулах ба $2016 = 2^5 \cdot 7 \cdot 9$ учир бодлого маань 8-ыг хоёр бүхэл тооны нийлбэрт тавихад ялгавар нь 5 гарч болох уу гэсэн бодлого болно. Харин энэ нь боломжгүй.

Бодлого VIII-4. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг “тримино” тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. $n > 5$ бол квадратыг n ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болохыг батал.

Бодолт. VII-3.

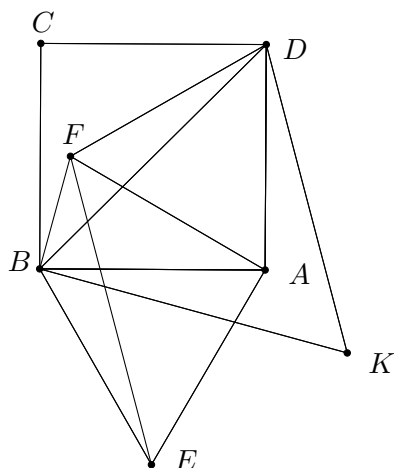
IX анги

Бодлого IX-1. Самбарт нийлбэр нь 0 гардаг ялгаатай бүхэл тоонууд бичигдсэн байв. Самбарт бичигдсэн тоонуудын үржвэр 2016 байж болох уу?

Бодолт. Болно. Тухайлбал $-9, 7, -4, 2, 2, 2$ гэсэн тоонууд бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодлого IX-2. Зурагт $ABCD$ квадрат, зөв ABE , ADF , BDK гурвалжнуудыг дүрсэлжээ. $EF = DK$ гэж батал.

Бодолт. $\triangle ABF$ адил хажуут гэдгээс $\angle ABF = \angle AFB$ болох ба эндээс $\angle EBF = \angle DFB$ болно. Мөн $EB = FD$ ба BF нь ерөнхий, $\angle EBF = \angle DFB$ гэдгээс $\triangle EBF = \triangle DFB$ болох тул $EF = BD$ болно. Харин $\triangle BDK$ зөв гэдгээс $BD = DK$ болж батлагдав.



Бодлого IX-3. Улаан, хөх өнгийн хэдэн бөмбөг байжээ. Бөмбөгнүүдийг 10 уутанд яаж ч хувааж хийхэд, аль нэг 2 уутанд нийлээд дор хаяж 7 улаан, дор хаяж 5 хөх бөмбөг ордог байв. Хамгийн цөөндөө хэдэн бөмбөг байсан бэ?

Бодолт. Хэрэв нэг уутанд бүх хөх бөмбөг орсон гэвэл үлдсэн 9 уутны аль нэгэнд дор хаяж 7 улаан бөмбөг орсон байх ёстой гэдгээс нийтдээ дор хаяж $9 \cdot 6 + 1 = 55$ улаан бөмбөг байх ёстой (Хэрэв хөх бөмбөгтэй уутанд k улаан байдаг бол бусад уутаны аль нэгэнд $7 - k$ байхад л хангалттай болж нийт бөмбөгний тоо цөөрнө). Үүнтэй адилаар дор хаяж $9 \cdot 4 + 1 = 37$ хөх бөмбөг байх ёстой болно. Иймд нийтдээ дор хаяж 92 бөмбөг байх хэрэгтэй.

Одоо 92 нь бодлогын хариу болохыг харуулъя. Эсрэгээс нь бодлогын нөхцөлийг хангахгүйгээр 92 бөмбөгийг 10 уутанд хуваасан гэж үзье.

1-р уут A_1 улаан бөмбөг, B_1 хөх бөмбөгтэй ба энэ нь хамгийн олон улаан бөмбөгтэй уут байг. $55 = 5 \cdot 10 + 5$ тул Дирихлейн зарчим ёсоор $A_1 \geq 6$ болно. $B_1 \geq 5$ бол нөхцөлийг хангах 2 уут олдох нь илэрхий тул $B_1 \leq 4$ гэж үзье. Тэгвэл 1-р уутнаас бусад уутанд нийт $37 - B_1$ хөх бөмбөг байх ба Дирихлейн зарчим ёсоор дор хаяж $\left\lceil \frac{37 - B_1}{9} \right\rceil$ ширхэг хөх бөмбөгтэй уут олдоно. Уг уутыг 2-р уут гээд A_2 улаан, B_2 хөх бөмбөгтэй байгаа гэж үзэхэд явцуурахгүй. $B_1 \leq 4$ гэдгээс

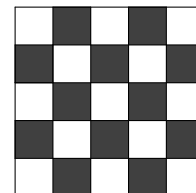
$$B_1 + B_2 \geq B_1 + \left\lceil \frac{37 - B_1}{9} \right\rceil \geq 5$$

болох ба хэрэв $A_1 + A_2 \geq 7$ байвал 1 ба 2-р уутыг авахад бодлогын нөхцөл биелнэ. Иймд $A_1 \geq 6$ болохыг санавал $A_1 = 6$, $A_2 = 0$ болно. Тэгвэл Дирихлейн зарчим ёсоор үлдсэн 8 уутны аль нэг нь дор хаяж $\left\lceil \frac{55 - 6}{8} \right\rceil = 7$ бөмбөг агуулна. Энэ нь A_1 нь хамгийн их гэдэгтэй зөрчилдөнө.

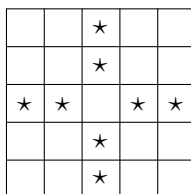
Иймд 92 бөмбөгийг 10 уутанд яаж ч хувааж хийхэд аль нэг 2 уутанд нийлээд дор хаяж 7 улаан, дор хаяж 5 хөх бөмбөг үргэлж олдоно.

Бодлого IX-4.

5×5 хэмжээтэй хөлгийн нүднүүдийг хар, цагаан өнгөөр шатрын хөлөг шиг алаглуулан будсан байв (зураг). Нэг удаагийн үйлдлээр хөлөг дээр шугамын дагуу талуудтай 1×3 эсвэл 3×1 хэмжээтэй тэгш өнцөгт сонгон авч, сонгосон тэгш өнцөгтийн бүх нүдийг нэгэн зэрэг эсрэг өнгөөр сольж будаж болно. Хамгийн цөөндөө хэдэн үйлдлийн дараа хөлгийн бүх нүд цагаан өнгөтэй болох вэ?



Бодолт. Хүснэгтийн аль нэг захад байгаа 2 хар нүдтэй 5 дараалсан нүдийг авч үзье. Энэ 2 нүдийг хар болгоход нэг бол тус тусад нь үйлдэл хийж 2 үйлдлээр цагаан болгоно эсвэл хоёуланг нь агуулсан нэг дүрсэд үйлдэл хийвэл голд байгаа цагаан нь хар болох тул ахин нэг үйлдэл хийж байж уг 5 нүд цагаан болох боломжтой. Иймд дор хаяж 2 үйлдэл хэрэгтэй. Бидэнд ийм захын дүрс 4 байгаа бөгөөд нэг дүрсэд хийх үйлдэл нөгөө дүрсэд нөлөөлөхгүй учир дор хаяж 8 үйлдэл хэрэгтэй.



Дээрх зурагт үзүүлсэн одтой нүднүүд дээр үйлдэл хийхэд бүгд цагаан болно. Иймд хамгийн цөөндөө 8 үйлдэл хэрэгтэй.

Х анги

Бодлого X-1. Хэдэн ялгаатай натурал тооны арифметик дундаж нь x бүхэл, арван мянганы 2016 гарчээ. x нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодолт. n ширхэг тоо байсан ба тэдгээрийн нийлбэрийг s гэе. Тэгвэл өгсөн нөхцөлөөс

$$\frac{s}{n} = x + \frac{126}{625}$$

болно. Эндээс $625(s - xn) = 126n$ болох ба 126, 625 тоонууд харилцан анхны тул $625 \mid n$ болно. Иймд $n \geq 625$ байна. Тэгвэл

$$x = \frac{s}{n} - \frac{126}{625} \geq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} - \frac{126}{625} = \frac{n(n+1)}{2n} - \frac{126}{625} \geq \frac{625+1}{2} - \frac{126}{625} > 312$$

тул $x \geq 313$ байна. Иймд одоо 313.2016 байх тоонуудаа байгуулъя.

$$\frac{1 + 2 + \dots + 624 + 751}{625} = 313 + \frac{126}{625}$$

тул бодлого бодогдов.

Бодлого X-2. Натурал n тооны өөрөөс нь ялгаатай хамгийн их натурал тоон хуваагчийг $d(n)$ гэж тэмдэглэе. $d(n) + d(n+1)$ нийлбэр нь бүтэн квадрат байх n тоо төгсгөлгүй олон олдохыг батал.

Бодолт. $n = 5(14k^2 + 8k + 1)$, $k \equiv 1 \pmod{3}$ байхаар сонгоход

$$d(n) + d(n+1) = (14k^2 + 20k + 3) + (35k^2 + 20k + 3) = (7k + 2)^2$$

Бодлого Х-3. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{a+bc}{a+1}\right) \cdot \left(\frac{b+ca}{b+1}\right) \cdot \left(\frac{c+ab}{c+1}\right) \geq abc$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт.

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = abc + a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^3bc + ab^3c + abc^3$$

ба

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$$

гэдгийг тооцоод тэнцэтгэл бишээ ижил хуваарь өгч задалж эмхтгэвэл

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^3bc + ab^3c + abc^3 \geq a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2$$

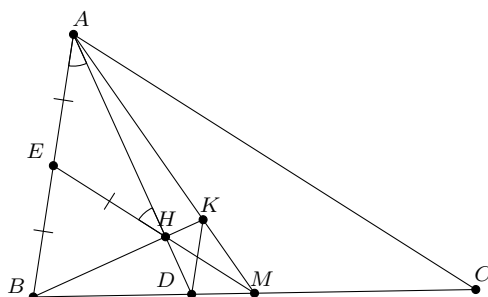
гэж батлахтай адил болно. Дурын x, y, z бодит тоонуудын хувьд $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ биелэн гэдгээс $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ ба $a^3bc + ab^3c + abc^3 \geq abc(ab+bc+ca)$ болох тул эдгээр тэнцэтгэл бишийг харгалзуулж нэмбэл бидний батлах тэнцэтгэл биш батлагдана.

Бодлого Х-4. $AB < AC$ талуудтай ABC гурвалжны AD биссектрисс, AM медианыг татжээ. D цэгийг дайрсан гурвалжны AB талтай параллель шулуун AM медианыг K цэгт огтолно. $BK \perp AD$ гэж батал.

Бодолт. $BK \cap AD = H$ гэе. $AB \parallel DK$ тул $\triangle ABK \sim \triangle DKH$ ба Фалесын теоремоос

$$\frac{DK}{AB} = \frac{DH}{AH} = \frac{DM}{BM} = \frac{DM}{MC}$$

болно. Эндээс $\frac{DH}{AH} = \frac{DM}{MC}$ болох тул $HM \parallel AC$ болно. HM нь AB талыг E цэгт огтолдог гэвэл E нь AB -ийн дундаж цэг болно. $\angle BAD = \alpha$ гэвэл $\angle AEH = \pi - 2\alpha$ тул $\angle AHE = \alpha$ болно. Иймд $AE = EH = EB$ болж $\angle AHB = 90^\circ$ болох нь батлагдав.



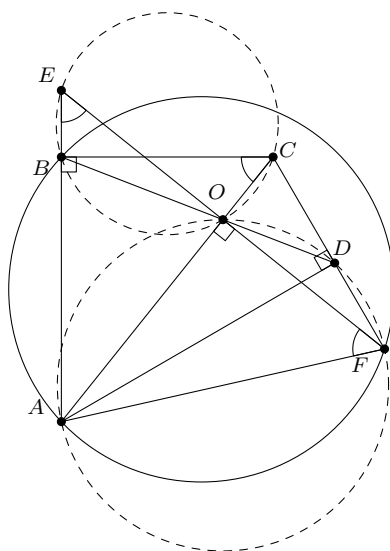
XI анги

Бодлого XI-1. Хэдэн ялгаатай натурал тооны арифметик дундаж нь x бүхэл, арван мянганы 2016 гарчээ. x нь хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

Бодолт. **X-4.**

Бодлого XI-2. $\angle B = \angle D = 90^\circ$ өнцөгтэй гүдгэр $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиуд O цэгт огтлолцоно. O цэгийг дайрсан AC диагоналд перпендикуляр шулуун AB , CD шулуунуудыг E , F цэгүүдэд огтолдог бол $OE = OF$ гэдгийг батал.

Бодолт. $\angle EBC = \angle EOC = 90^\circ$, $\angle AOF = \angle ADF = 90^\circ$ тул $BECO$, $AODF$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтана. $\angle BAC = \alpha$ гэвэл $\angle BCA = 90^\circ - \alpha = \angle BEO = \angle BDA = \angle OFA$ болно. Эндээс $\angle AEF = \angle AFE$ тул $AF = AE$ болж $OE = OF$ гэдэг нь батлагдав.



Бодлого XI-3. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерг тоонууд бол

$$a + b + c + \frac{3}{ab + bc + ca} \geq 4$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

Бодолт.

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{3}{ab + bc + ca} &= \frac{a + b + c}{3} + \frac{a + b + c}{3} + \frac{a + b + c}{3} + \frac{3}{ab + bc + ca} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 \frac{3}{ab + bc + ca}} \\ &= 4 \sqrt[4]{\frac{(a + b + c)^2 \cdot (a + b + c)}{9(ab + bc + ca)}} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{3(ab + bc + ca) \cdot 3\sqrt[3]{abc}}{9(ab + bc + ca)}} = 4 \end{aligned}$$

болж батлагдана. Бодолтын явцаас $a = b = c = 1$ үед тэнцэлдээ хүрнэ гэж гарна.

Бодлого XI-4. Натурал n тооны цифрийн нийлбэрийг $S(n)$ гэж тэмдэглэе. $0.2 \leq \frac{p}{q} \leq 2$ байх ямар ч бутархай $\frac{p}{q}$ тооны хувьд $S(2n) = \frac{p}{q} \cdot S(n)$ байх натурал n тоо олдохыг батал.

Бодолт. $n = \underbrace{11 \cdots 1}_a \underbrace{55 \cdots 5}_b$ хэлбэртэйгээр хайя. Тэгвэл

$$2n = \underbrace{22 \cdots 23}_{a-1} \underbrace{11 \cdots 10}_{b-1}$$

болно. Иймд $S(2n) = 2a + b$, $S(n) = a + 5b$ болно. Одоо бид $0.2 \leq \frac{p}{q} \leq 2$ байх ямар ч бутархай $\frac{p}{q}$ тооны хувьд бодлогын нөхцөлийг хангах a, b олдоно гэж батлахад хангалттай. $\frac{p}{q} = \frac{2a+b}{a+5b}$ байх ёстой гэдгээс $\frac{a}{b} = \frac{5p-q}{2q-p}$ болно. Өөрөөр хэлбэл, $5p \neq q$ ба $2q \neq p$ үеүдэд a, b олдох нь батлагдав. Тэгвэл $0.2q = p$ үед $n = 5$, $p = 2q$ үед $n = 1$ гэж авахад хангалттай тул бодлого бодогдов.

XII анги

Бодлого XII-1. 2-р гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь хоёр хөрш гишүүнийхээ арифметик дундаж ба геометр дунджийн нийлбэрийн хагастай тэнцүү байдаг эерэг тоон $a_1, a_2, \dots$ дараалал өгөгджээ. $a_1 = \frac{2}{7}$ ба $a_{11} = \frac{7}{2}$ бол a_{333} гишүүнийг ол.

Бодолт. Өгсөн нөхцөлөөс

$$a_n = \frac{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} + \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}}{2} \right)^2$$

гэж гарах ба эндээс $2\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n+1}}$ болно. Иймд $b_n = \sqrt{a_n}$ дараалал арифметик үүсгэх тул $b_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $b_{11} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ гэдгээс $d = \frac{b_{11} - b_1}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}$ болно. Эндээс $b_{333} = b_1 + 332d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{166}{\sqrt{14}} = \frac{168}{\sqrt{14}}$ болох ба үүнээс $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$ болох нь гарав.

Бодлого XII-2. Ямар ч эерэг x, y тоонуудын хувьд

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

байх хамгийн их a тоог ол.

Бодолт. $a < 0$ байх нь илэрхий. Мөн $x + y + a\sqrt{xy} \geq 0$ байх ёстой тул $a \geq -2$ болно. Одоо хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлээд эмхтгэвэл

$$0 \geq (a^2 + 2)\sqrt{xy} + 2a(x + y)$$

болно. Эндээс $(a^2 + 2)\sqrt{xy} + 2a(x + y) \leq (a^2 + 2)\frac{x+y}{2} + 2a(x + y) \leq 0$ байх ёстой болох ба $a^2 + 4a + 2 \leq 0$ болно. Иймд $a_{\max} = \sqrt{2} - 2$ байна.

Бодлого XII-3. 100 зураач бие биенийхээ хөргийг зурж эхэлжээ (өөрийнхөө хөргийг зурахгүй). Хэсэг хугацааны дараа зураач бүр 75 зураачийн хөргийг зурсан байв. Аль ч зураач нь нөгөө 2 зураачийнхаа хөргийг зурсан байдаг 3 зураач олдохыг батал.

Бодолт. Нийт зургийн тоо $7500 = 75 \cdot 100$ тул аль нэг зураач дор хаяж 75 зураачаар зурагдсан байна. Түүнийг 52-р зураач гэе. Нөгөө талаас 52-р зураач 75 зураачийн зургийг зурсан тул өөрийг нь зурсан зураачдаас дор хаяж 51-ийнх нь зургийг зурсан байна. Тэдгээрийг 1, 2, ..., 51-р зураачид гээд нийтэд нь анги гэж нэрлэе. Одоо нэгнийгээ зурсан ангийн хоёр зураач байгаа гэж баталхад хангалттай.

Эсрэгээс нь олддоггүй гэе. Тэгвэл ангийн дурын хоёр зураачийн хувьд хамгийн сайндаа яг нэг нь нөгөөгөө зурсан байж болно. Иймд ангийн зураач ангийн зураачаа зурсан зургийн тоо хамгийн ихдээ $\frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$ байна. Гэтэл зураач бүр 75 зураг зурсан байхын тулд ангийн зураач бүр ангийнхаа дор хаяж 26 хүнийг зурсан байх ёстой буюу ангид хамгийн цөөндөө $51 \cdot 26 = 1326$ зураг байна. Гэтэл $1275 < 1326$ тул зөрчил үүсч байна.

Иймд аль ч зураач нь нөгөө 2 зураачаа зурсан байдаг 3 зураач үргэлж олдоно.

Бодлого XII-4. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AH өндөр, CM медианыг татсан бөгөөд CM медианы үргэлжлэл гурвалжныг багтаасан тойргийг K цэгт огтолно. D цэгийг $ABCD$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм байхаар сонгож авсан бол C, D, K, H цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

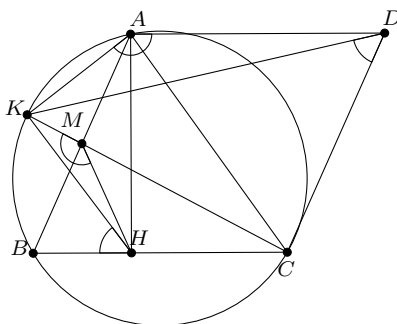
Бодолт. AB -ийн дундаж M болог.

$$\begin{aligned} \angle KMH &= \angle KMB + \angle BMH = (\angle MBC + \angle MCB) + 2\angle BAH = \\ &= \angle MBC + \angle MCB + \pi - 2\angle ABH = \angle MCB + \pi - \angle ABH = \quad (1) \\ &= \angle KAB + \angle BAD = \angle KAD \end{aligned}$$

болно. Мөн нөгөө талаас $\triangle KAM \sim \triangle BCM$ ба $\frac{KM}{KA} = \frac{BM}{BC} = \frac{MH}{AD}$ болох тул (1)-ээс $\triangle KMH \sim \triangle KAD$ болно. Иймд

$$\angle KDC = \angle ADC - \angle ADK = \angle ABC - \angle MHK = \angle MHB - \angle MHK = \angle KHB$$

болж $KHCD$ тойрогт багтах нь батлагдав.



Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10$ илэрхийлэлд утга нь 2016 гарч байхаар хаалтууд байрлуулж болох уу?

Бодолт. Хариу: Болохгүй.

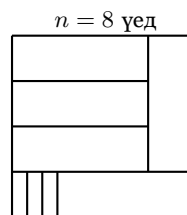
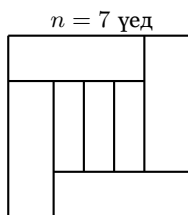
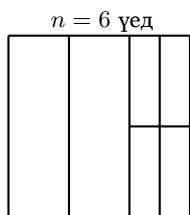
Уг илэрхийлэлд яаж ч хаалт байрлуулсан зарим тоонуудын үржвэрийг үлдсэн тоонуудын үржвэрт хуваасан тоо гарна. 1-10 хүртэлх тоонуудын үржвэрт 2-ийн зэрэг тэгш байгаа тул хаалт байрлуулсны дараа гарах тоо нь 2-ийн тэгш зэрэгтийг агуулна. Гэвч $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ тул болохгүй.

Бодлого ББ-2. Зөвхөн 1 ба 2 цифрээр бичигддэг 2016-д хуваагддаг хамгийн бага тоог ол.

Бодолт. VI-4

Бодлого ББ-3. Урт нь өргөнөөсөө 3 дахин их тэгш өнцөгтийг “тримино” тэгш өнцөгт гэж нэрлэе. $n > 5$ бол квадратыг n ширхэг тримино тэгш өнцөгтөд хувааж болохыг батал.

Бодолт. $n = 6, 7, 8$ үед зурагт үзүүлсэн байдлаар хувааж болох ба $n = k$ үед хуваасан гэж үзвэл аль нэг тэгш өнцөгтийг авч 4 тэнцүү хэсэгт хувааснаар $n = k + 3$ үед хувааж болно. Иймд аливаа хуваалтын тэгш өнцөгтийн тоог 3-аар нэмэгдүүлж чадах тул $n \geq 9$ үед хувааж болно.



Бодлого ББ-4. Цэцгээ өдөр бүр x чихэр эсвэл y чихэр иддэг байв ($x < y$). Цэцгээ сарын эхний 9 хоногт 100 ширхэг чихэр, дараагийн 11 хоногт бас 100 ширхэг чихэр иджээ. Харин тэр яаж ч хичээгээд сүүлийн 10 хоногт яг 100 чихэр идэж чадахгүй бол x ба y -ийг ол.

Бодолт. Хариу: $(x, y) = (4, 12)$.

Цэцгээ эхний 9 өдрийн a өдөрт нь x чихэр, $(9 - a)$ өдөрт нь y чихэр, дараагийн 11 өдрийн b өдөрт нь x чихэр, $(11 - b)$ өдөрт нь y чихэр идсэн гээ. Тэгвэл

$$\begin{cases} a \cdot x + (9 - a) \cdot y = 100 \\ b \cdot x + (11 - b) \cdot y = 100 \end{cases}$$

болно. (1) ба (2) -ийг нэмээд 2-т хуваавал

$$\frac{a+b}{2}x + \left(10 - \frac{a+b}{2}\right)y = 100$$

болно. Энэ нь шийдгүй байхын тулд $a + b$ сондгой байх ёстой. Эндээс $9a - 11b$ нь сондгой гэж гарна.

(1) -ийг b -ээр үржүүлээд, (2) -ийг a -аар үржүүлээд хасвал

$$(9b - 11a)y = 100(b - a)$$

болно. Эндээс $y = \frac{100(b-a)}{9b-11a}$ болно.

(1) -ийг 11 -ээр үржүүлээд, (2) -ийг 9 -өөр үржүүлээд хасвал

$$(9b - 11a)(y - x) = 200$$

болно. $y - x < 100$ тул $9b - 11a = 5$ эсвэл $9b - 11a = 25$ байна.

(i) $9b - 11a = 5$ байг. Тэгвэл $y - x = 40$ болох ба эндээс $x = y - 40$ гэж гарна. $9b = 11a + 5$ гээд (1) -д орлуулбал

$$a(y - 40) + (9 - a)y = 100$$

болно. Эндээс $9y - 40a = 100$ гэж гарна. $0 \leq a \leq 9$ ба $40a + 100$ нь 9 -д хуваагдах ёстой тул $a = 2$ гэж олдоно. Энэ үед $y = 20$ гэж олдох ба $x = 20 - 40 = -20$ болж зөрчил үүснэ.

(ii) $9b - 11a = 25$ байг. Тэгвэл $y - x = 8$ болох ба эндээс $x = y - 8$ гэж гарна. $9b = 11a + 25$ гээд (1) -д орлуулбал

$$a(y - 8) + (9 - a)y = 100$$

болно. Эндээс $9y - 8a = 100$ гэж гарна. $0 \leq a \leq 9$ ба $8a + 100$ нь 9 -д хуваагдах ёстой тул $a = 1$ гэж олдоно. Энэ үед $y = 12$ гэж олдох ба $x = 12 - 8 = 4$ болно.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-1. 2-р гишүүнээс эхлэн гишүүн бүр нь хоёр хөрш гишүүнийхээ арифметик дундаж ба геометр дунджийн нийлбэрийн хагастай тэнцүү байдаг эерэг тоон $a_1, a_2, \dots$ дараалал өгөгджээ. $a_1 = \frac{2}{7}$ ба $a_{11} = \frac{7}{2}$ бол a_{333} гишүүнийг ол.

Бодолт. XII-1.

Бодлого ДБ-2. Ямар ч эерэг x, y тоонуудын хувьд

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y + a\sqrt{xy}$$

байх хамгийн их a тоог ол.

Бодолт. XII-2.

Бодлого ДБ-3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүд H цэгт огтлолцоно. AD өндрийн үргэлжлэл дээр F цэгийг $DH = DF$ байхаар сонгон авчээ. AEF гурвалжны багтаасан тойрог BC шулууныг K, L цэгүүдэд огтолдог бол $BK = BL$ гэж батал.

Бодолт. K цэг BC тал дээр оршдог гэж үзэж болно. Бид

$$DK + DL = 2 \cdot (DK + BD) \quad \text{буюу} \quad DL - DK = 2BD$$

гэж батлах ёстой. Огтлогчийн тухай теоремоор

$$CK \cdot CL = CE \cdot CA$$

буюу

$$(CD - DK) \cdot (CD + DL) = AC \cdot CE$$

болно. Эндээс

$$DL - DK = \frac{AC \cdot CE + DK \cdot DL - CD^2}{CD}$$

болно. Огтлогдсон хөвчүүдийн тухай теоремоор $DK \cdot DL = AD \cdot DF$ байх тул

$$\frac{AC \cdot CE + AD \cdot DF - CD^2}{CD} = 2BD$$

гэж батлахад хангалттай.

$AB = c, AC = b, BC = a, \angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ гэвэл $AD = c \cdot \sin \beta, DF = HD = c \cdot \frac{\cos \beta}{\tan \gamma},$
 $CE = a \cdot \cos \gamma, CD = b \cdot \cos \gamma$ болох ба эдгээрийг орлуулаад хялбар хувиргалт хийвэл

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot CE + AD \cdot DF - CD^2}{CD} &= \frac{ab \cos \gamma + c^2 \sin \beta \cos \beta (\tan \gamma)^{-1} - b^2 \cos^2 \gamma}{b \cos \gamma} \\ &= a - b \cos \gamma + \frac{c \sin \beta}{b \sin \gamma} \cdot c \cos \beta = a - b \cos \gamma + c \cos \beta \\ &= \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} - \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \gamma + c \cos \beta \\ &= \frac{c \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma} - \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \gamma + c \cos \beta \\ &= 2c \cos \beta = 2BD \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Бодлого ДБ-4. Натурал n тооны бүх хуваагчдыг буурах эрэмбээр $n = d_1 > d_2 > \dots > d_m = 1$ гэж тэмдэглэе.

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots + (-1)^{m+1} d_m = n - 1$$

байх бүх натурал n тоог ол.

Бодолт. Хариу: $n = 4$ эсвэл n нь дурын анхны тоо.

- $m = 2$ үед n нь анхны тоо болох ба шийд болно.
- $m = 3$ үед n нь анхны тооны квадрат байх ба $d_1 - d_2 + d_3 = n - d_2 + 1 = n - 1$ болно.
Эндээс $d_2 = 2$ гэж олдох тул $n = 2^2 = 4$ гэж олдоно.
- $m = 2k > 3$ үед

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots - d_{2k} = n - (d_2 - d_3) - \dots - d_{2k} \leq n - 2$$

тул шийдгүй.

- $m = 2k + 1 > 3$ үед

$$d_1 - d_2 + d_3 - \dots + d_{2k+1} = n - (d_2 - d_3) - \dots - (d_{2k} - d_{2k+1}) \leq n - 2$$

тул шийдгүй.

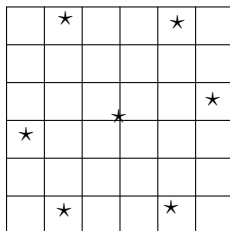
П. Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын XIV уралдаан

П. Энхболдын нэрэмжит математикийн улсын XIV уралдаан 2016 оны 12 сарын 2, 3 өдрүүдэд П. Энхболдын нэрэмжит математикийн гүнзгийрүүлсэн сургалттай 32 дугаар сургууль дээр амжилттай зохион байгуулагдлаа. Хүн хүчний дутагдалаас зарим бодлогуудын бодолт ороогүй болно, хүлцэл өчье.

Бодлогууд

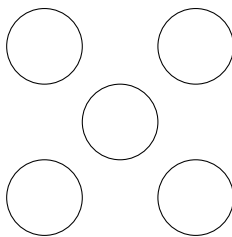
II анги

Бодлого II-1. Өгсөн дүрсийг хэлбэр, хэмжээгээрээ ижил 7 дүрсэд хуваа. Хуваагдсан хэсэг бүрд нэг нэг од орсон байх ёстой.



Бодлого II-2. Өвлийн өвгөнд 20 алим, 30 лийр, 40 гадил, 50 жүрж байв. Хүүхэд бүрт 3 өөр жимс өгөх ёстой бол хамгийн олондоо хэдэн хүүхдэд бэлэг бэлдэж чадах вэ? Учрыг тайлбарлаарай.

Бодлого II-3. Зурагт өгсөн дугуй бүрд 0-ээс ялгаатай нэг цифр бичнэ. Дээд талын хоёр дугуйд бичигдэх тоонуудын нийлбэр нь үлдсэн тоонуудынхаа нийлбэрээс 7 дахин бага, мөн зүүн талын хоёр дугуйд бичигдэх тоонуудын нийлбэр нь үлдсэн тоонуудынхаа нийлбэрээс 5 дахин бага байхаар бичээрэй.



Бодлого II-4. Ангийн 15 сурагчийн 5 нь 2 хоногт 3 ★, үлдсэн нь 3 хоногт 2 ★ авна гэж амлажээ. Хичээлийн эхний 5 хоногт тэд нийт 72 ★ авчээ. Хичээлийн 6 дахь өдөр тэд хэдэн ★ авах ёстой вэ?

III анги

Бодлого III-1. МАТЕМАТИКА гэсэн үгийн үсэгнүүдийг тохирох тэмдэгтээр (0-ээс 9 хүртэлх цифр, +, - тэмдэг) сольж, үр дүн нь 2016 гарах илэрхийлэл зохио. Ижил үсэг ижил тэмдэгтийг, ялгаатай цифр ялгаатай тэмдэгтийг төлөөлнө.

Бодлого III-2. 1-ээс 80 хүртэлх тоог самбарт бичихдээ заримыг нь цэнхэрээр, заримыг нь улаанаар бичжээ. Хамгийн их цэнхэр тоо нь нийт цэнхэр тоонуудын тоотой тэнцүү, хамгийн бага улаан тоо нь нийт улаан тоонуудын тооноос 2 дахин бага байсан бол хэдэн улаан, хэдэн цэнхэр тоо байсан бэ?

Бодлого III-3. 10×10 хүснэгтийн нүд бүрт 100 ялгаатай тоо бичсэн байв. Эхлээд мөр бүрийн хамгийн бага тоог тэмдэглэхэд бүгд ялгаатай багананд байрласан байв. Дараа нь багана бүрийн хамгийн бага тоог тэмдэглэхэд бүгд ялгаатай мөрөнд байрласан байжээ. Нийт хэдэн ялгаатай тоо тэмдэглэгдсэн байгаа вэ?

Бодлого III-4. Дугуй ширээ тойрон хоорондоо ижил зайтай суусан хүмүүсээс А, Б, В, Г (энэ дарааллаараа суусан) нар хурлын даргад нэр дэвшив. Хүн бүр өөртөө ойр сууж байгаа нэр дэвшигчийн төлөө саналаа өгсөн байлаа. А хүн 8 хүний санал авч ялжээ. Харин В хүний төлөө 6 хүн санал өгсөн бол Б болон Г хүмүүсийн төлөө хэдэн хүн санал өгсөн бэ?

IV анги

Бодлого IV-1. Ижилхэн 20 хайрцагийн нэгд нь эрдэнэс хийсэн байв. Хайрцаг бүр дээр “Эрдэнэс хажуугийн хайрцагт байгаа” гэсэн бичиг байсан бөгөөд эдгээрийн нэг нь л үнэн бусад нь худал. Нэг л хайрцаг нээх эрхтэй бол эрдэнэс хаана байгааг хэрхэн мэдэх вэ?

Бодлого IV-2. 60 хүүхэд гар гараасаа хөтлөлцөн тойрог болон зогссон байв. 46 хүүхэд эмэгтэй хүүхэдтэй, 24 хүүхэд эрэгтэй хүүхэдтэй гар барилцсан байв. Хэдэн эмэгтэй хүүхэд байгаа вэ?

Бодлого IV-3. Гүзээлзгэний цэцэг өглөө дэлгэрч, 2 хоногийн дараа унадаг. Энэ үед гүзээлзгэнэ боловсорч эхлэх бөгөөд 3 дахь хоногийнх орой түүж авдаг. Хүлэмжинд өчигдөр 15 цэцэг, 25 гүзээлзгэнэ байсан бөгөөд орой нь 9 гүзээлзгэнэ түүжээ. Өнөөдөр 20 цэцэг, 24 гүзээлзгэнэ байснаас орой 9-ийг нь түүх боломжтой. Нөгөөдөр хэдэн гүзээлзгэнэтэй байх вэ?

Бодлого IV-4. Өндрөөрөө ялгаатай 10 сурагчийн хамгийн намхан болон хамгийн өндөр нь эрэгтэй хүүхэд байв. Хүү бүрээс “Чамаас намхан хэдэн охин байгаа вэ?”, охин бүрээс “Чамаас өндөр хэдэн хүү байгаа вэ?” гэж асуугаад хүүхэд бүрийн хариултыг нэмэхэд 40 гарчээ. Хэдэн охин, хэдэн хүү байгаа вэ?

V анги

Бодлого V-1. 7×5 хүснэгтийн нүднүүдэд, аль ч 2×3 хүснэгтэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 0 байхаар тоонууд бичигдсэн байв. Нэг удаагийн оролдлогоор дурын нүдэнд бичигдсэн тоог мэдэх боломжтой бол 7×5 хүснэгтийн бүх тоонуудын нийлбэрийг хамгийн цөөндөө хэдэн удаагийн оролдлогоор, хэрхэн мэдэх вэ?

Бодлого VII-2. Бат, Болдод харуулахгүйгээр 37 ширхэг эерэг бүхэл тоог дэвтэртээ жагсаан бичсэн байв. Болдын зорилго бол Батын жагсаан бичсэн 37 ширхэг тооны үржвэрийг олох бөгөөд үүний тулд Бат, Болд хоёр дараах дүрмээр тоглоно. Болд хоёр эсвэл түүнээс олон тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч эсвэл хамгийн их ерөнхий хуваагчыг Батаас асуух боломжтой(Жишээ нь эхний 3 тооны ХБЕХ нь хэд вэ? эсвэл хоёр дахь 5 тооны ХБЕХ нь хэд вэ? эсвэл 3, 10, 13 дугаар тооны ХИЕХ нь хэд вэ? гэм мэт). Болд хэдэн ч удаа асуулт асууж болох ба Бат зөв хариулах ёстой. Батаас авсан хариултууд дээр арифметикийн 4 үйлдэл (нэмэх, хасах, үржих, хуваах) хийж Батын бичсэн 37 ширхэг тооны үржвэрийг олох боломжтой юу? Яаж?.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого VII-3. 20 хүүхэдтэй анги шинэ жилийн баярт зориулсан "Монита" зохион байгуулахаар болов. Монитагийн сугалаа явагдахад бие биеэ сугалсан хос 5, бие биеэ тойргоор сугалсан гурвал 2, бие биеэ тойргоор сугалсан дөрвөл 1 байх боломж хэдэн вэ?

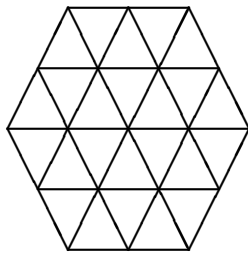
(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого VII-4. Самбарт 1, 2, 3, ..., 39, 40 тоонууд өгөгдөв. Цэцгээ энэ 40 тооноос дурын 2 тоог сонгох байдлаар 20 хос болгон хувааж, харин Бат хуваасан хос бүрээс аль нэг тоог сонгон авч эдгээр авсан тоонуудынхаа нийлбэрийг олно. Хэрэв Бат 300-с их ба 500-с бага ямар нэгэн натурал тоог Цэцгээд хэлсэн бол Батын сонгосон тоонуудын нийлбэр нь тэрхүү хэлсэн тоотойгоо тэнцүү биш байхаар хуваалт хийж ямагт чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

VIII анги

Бодлого VIII-1. Зурагт өгөгдсөн дүрс дэх гурвалжнуудыг 0, 1, 2 тоонуудаар аль ч ,  дүрс дэх тоонуудын нийлбэр 3-т хуваагддаг байхаар бөглөв. Хэрэв өгөгдсөн дүрсийн голын цэг дээр төвтэй  дүрсэд 1 ба 2 тоонууд тэнцүү ширхэг орсон бол нийт 1 ба 2 тоонууд тэнцүү ширхэг байна гэж батал.



Бодлого VIII-2.

$$pqr - (p + q + r) = 2016$$

байх p, q, r анхны тоонууд олдох уу?

Бодлого VIII-3. Самбарт бичигдсэн тоог арилгаад эсвэл уг тоог 5-аар үржүүлсэн тоог, эсвэл уг тооны цифрүүдийг нь сэлгэсэн тоог бичих үйлдлүүд өгөгдөв (энд 0 цифрийг хамгийн эхэнд бичиж болно). Самбарт анх 1 бичигдсэн байсан бол уг хоёр үйлдлийг ашиглан

(а) 35

(б) 30

тоог гарган авч болох уу?

Бодлого VIII-4. 2×8 хүснэгтийн нүднүүдийг 2 өнгөөр будав. Хүснэгтийг 1×2 ба 2×1 дүрсүүдэд аль ч дүрсний хоёр нүд ижил өнгийн биш байхаар хувааж болдог бол уг будалтыг сайн будалт гэе. Сайн будалтын тоог ол.

IX анги

Бодлого IX-1. $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1$, $f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2$, $f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$ квадрат гурван гишүүнтүүд өгчээ. Хэрэв $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$ байвал эдгээр гурван гишүүнтийн ядаж нэг нь 2 язгууртай гэж харуул.

Бодлого IX-2. Тэгш өнцөгт параллелопипедийн урт, өргөн, өндөр нь харгалзан a , b , c бүхэл тоонууд байв. Эхлээд түүний гадаргууг ногоон өнгөөр будав. Дараа нь түүнийг abc ширхэг кубуудад хуваав. Тэгэхэд ногоон өнгө оролцоогүй кубуудийн тоо нийт кубын $\frac{1}{3}$ болж байв. Тэгвэл a , b , c -ийн авч болох бүх утгуудыг ол.

Бодлого IX-3. $\angle A = 120^\circ$ байх ABC гурвалжин өгчээ. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвөөс уг гурвалжны ортотөв хүрэх зай $AB + AC$ нийлбэртэй тэнцүү гэж батал.

Бодлого IX-4. $n \times m$ ($n, m \geq 2$) хүснэгтийн хэсэг нүдийг (нэгээс их) будав. Аль ч багана, аль ч мөр болон аль ч 2×2 хүснэгтэд тэгш тооны будагдсан нүд байсан бол $n \cdot m$ тэгш тоо болохыг үзүүл.

X анги

Бодлого X-1. n ба $n + 14$ тоонууд нь m ба $m + 14$ тоонуудын алийг нь ч хуваахгүй, харин $n(n + 14)$ тоо $m(m + 14)$ тоог хуваадаг m натурал тоо олдох хамгийн бага n натурал тоог ол. Энэ хамгийн бага n тооны хувьд дээрх нөхцөлийг хангах бүх m натурал тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Л. Буянтогтох)

Бодлого X-2. Олимпиадад оролцохоор ирсэн сурагчдын аливаа 2 нь яг нэг сурагч таньдаг бол бие биеэ таньдаггүй сурагчдын танилын тоо тэнцүү болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого X-3. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB ба AC талуудыг харгалзан D ба E цэгүүдэд, харин гадаад багтсан 2 тойрог нь BC талын үргэлжлэлийг P ба Q цэгүүдэд шүргэнэ. Хэрэв D, E, P , ба Q цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол $\angle BAC = 90^\circ$ болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодлого X-4. Тойргийг тэнцүү нумуудад хуваах 180 цэг өгөгдөв. Тэгвэл өгсөн цэгүүдээс ялгаатай тойргийн цэгээс тэдгээр цэгүүд хүртэлх зайнуудын 60-аас цөөнгүй нь иррационал болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

XI-XII анги

Бодлого XI-XII-1. $n \times n$ хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Хэрэв ямар нэгэн будагдсан нүд өөрийн оршиж байгаа мөр болон баганадаа ахиад нэг будагдсан нүд агуулдаг бол энэ гурван нүдийг "сайн гурвал" гэе. Тэгвэл "сайн гурвал" олддоггүй байхаар хамгийн ихдээ хичнээн нүдийг будаж болох вэ?

Бодлого XI-XII-2. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтах ба AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан X, Y, Z, T цэгүүдэд шүргэнэ. AC диагональ багтсан тойрогтой P, Q цэгүүдээр огтлолцох ба PQ хэрчмийн дундаж цэг R бол $\angle BRY = \angle DRZ$ гэж батал.

Бодлого XI-XII-3. Ялгавар нь 10-т хуваагдах 5-аар төгсөөгүй n, m натурал тоонууд өгөгдөв. Тэгвэл $n^n + m^m$ ба $n^m + m^n$ тоонуудын аль нэг нь 5^{2016} -д хуваагдах бол нөгөө тоо нь мөн хуваагдахыг батал.

Бодлого XI-XII-4. Аливаа $x, y \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $f(x^3 + y^5) = f(x)^3 + f(y)^5$ байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцыг ол.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. m натурал тоо ба сондгой k натурал тооны хувьд $(m)_k$ гэдгээр m тоонд хамгийн ойрхон k -д хуваагдах натурал тоог тэмдэглэв. Тэгвэл

$$\begin{cases} (6x)_5 + 4y = 508 \\ (6y)_5 - (2x)_7 = 64 \end{cases}$$

тэгшитгэлийг хангах x, y натурал тоонуудын үржвэрийн бүх утгыг ол.

Бодлого ББ-2. Самбарт 1, 2, 3, ..., 2016 тоонууд бичигджээ. Дурын 2 тоог сонгож авч арилгаад оронд нь арифметик дунджийг нь бичих үйлдэл өгөв. Энэ үйлдлээ ганц тоо үлдтэл хийсэн бол самбарт 1000 үлдсэн байж болох уу?

Бодлого ББ-3. Яг нэг цифр нь 7, үлдсэн нь дан 1 байдаг 2017 оронтой зохиомол тоо дор хаяж 666 ширхэг олдоно гэж батал.

Бодлого ББ-4. 3×6 хүснэгтийн нүднүүдийг 3 өнгөөр будав. Хүснэгтийг 1×3 ба 3×1 дүрсүүдэд аль ч дүрсний гурван нүд гурвуулаа ялгаатай өнгөөр будагдсан байхаар хувааж болдог бол уг будалтыг сайн будалт гэе. Сайн будалтын тоог ол.

Чөлөөт ангилал

Бодлого Ч-1. Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гэе. Дурын $m, n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(m) + f(n) - mn$ тоо тэгээс ялгаатай бөгөөд $mf(m) + nf(n)$ тоог хуваадаг байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого Ч-2. Дурын бодит $x \in \mathbb{R}$ тооны хувьд

$$\sum_{k=1}^{2016} \frac{\cos(kx)}{k^2} \geq -\frac{\pi^2}{12}$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Ч-3. G бүлэг гэе. Ямар нэг зэрэг нь G -ийн коммутатор дэд бүлэгт ордог элементүүдийн олонлог дэд бүлэг болно гэж харуул. Энд G -ийн коммутатор дэд бүлэг нь $ghg^{-1}h^{-1}$ ($g, h \in G$) хэлбэртэй элементүүдээр төрөгдсөн дэд бүлэг.

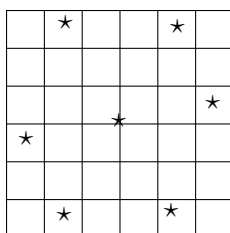
(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого Ч-4. Зарим нүд нь будагдсан $2n \times 2n$ хүснэгтийг 1×2 ба 2×1 дүрсүүдэд хуваав. Аль ч дүрс нь хоёр будагдсан нүднээс тогтдоггүй бол уг хуваалтыг *сайн* хуваалт гэе. Сайн хуваалт цор ганц олддог байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн нүдийг будаж болох вэ?

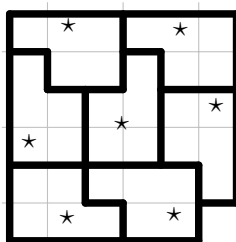
Бодолтууд

II анги

Бодлого II-1. Өгсөн дүрсийг хэлбэр, хэмжээгээрээ ижил 7 дүрсэд хуваа. Хуваагдсан хэсэг бүрд нэг нэг од орсон байх ёстой.



Бодолт.

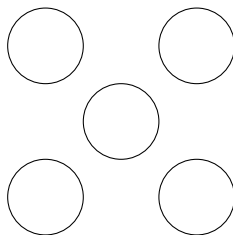


Бодлого II-2. Өвлийн өвгөнд 20 алим, 30 лийр, 40 гадил, 50 жүрж байв. Хүүхэд бүрт 3 өөр жимс өгөх ёстой бол хамгийн олондоо хэдэн хүүхдэд бэлэг бэлдэж чадах вэ? Учрыг тайлбарлаарай.

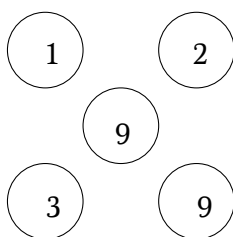
Бодолт. $20+30+40=90$, $90:2=45$ тул 45 хүүхдэд бэлэг өгч чадна.

Бодлого II-3. Зурагт өгсөн дугуй бүрд 0-ээс ялгаатай нэг цифр бичнэ. Дээд талын хоёр дугуйд бичигдэх тоонуудын нийлбэр нь үлдсэн тоонуудынхаа нийлбэрээс 7 дахин бага, мөн

зүүн талын хоёр дугуйд бичигдэх тоонуудын нийлбэр нь үлдсэн тоонуудынхаа нийлбэрээс 5 дахин бага байхаар бичээрэй.



Бодолт.



Бодлого II-4. Ангийн 15 сурагчийн 5 нь 2 хоногт 3 *, үлдсэн нь 3 хоногт 2 * авна гэж амлажээ. Хичээлийн эхний 5 хоногт тэд нийт 72 * авчээ. Хичээлийн 6 дахь өдөр тэд хэдэн * авах ёстой вэ?

Бодолт. 5 сурагч 6 хоногт 45 * авах ёстой, 10 нь 6 хоногт 40 * авах ёстой. Иймд 6 дахь өдөр $85 - 72 = 13$ * авах ёстой.

III анги

Бодлого III-1. МАТЕМАТИКА гэсэн үгийн үсэгнүүдийг тохирох тэмдэгтээр (0-ээс 9 хүртэлх цифр, +, - тэмдэг) сольж, үр дүн нь 2016 гарах илэрхийлэл зохио. Ижил үсэг ижил тэмдэгтийг, ялгаатай цифр ялгаатай тэмдэгтийг төлөөлнө.

Бодолт. М, А үсэгнүүд үйлдлийн тэмдэг байх боломжгүй. Т-г “+” гэвэл МА, ЕМА, ИКА гэсэн 3 тооны нийлбэр 2016 хүрэхгүй. Иймд Е болон И, К үсэгнүүд үйлдлийн тэмдэг байж болно. Эндээс мөн И нь үйлдлийн тэмдэг байх боломжгүй юм. Учир нь МАТ+ МАТ нь 2000 хүрэхгүй. Иймд хариу $184 + 1840 - 8 = 2016$ байна.

Бодлого III-2. 1-ээс 80 хүртэлх тоог самбарт бичихдээ заримыг нь цэнхэрээр, заримыг нь улаанаар бичжээ. Хамгийн их цэнхэр тоо нь нийт цэнхэр тоонуудын тоотой тэнцүү, хамгийн бага улаан тоо нь нийт улаан тоонуудын тооноос 2 дахин бага байсан бол хэдэн улаан, хэдэн цэнхэр тоо байсан бэ?

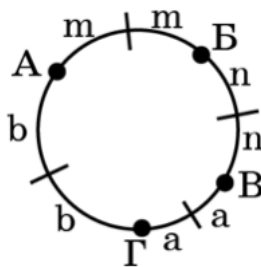
Бодолт. Цэнхэр тоонуудын хамгийн их нь a гэвэл түүнээс бага $a - 1$ ширхэг цэнхэр тоо байна. Эндээс цэнхэр болон улаан тоонууд нь дараалсан тоонууд гэж гарна. Хамгийн их цэнхэр тоо x гэвэл $80 - x = 2(x + 1)$ тул $x = 26$ болно. Хамгийн бага улаан тоо 27. Нийт 26 цэнхэр, 54 улаан тоо байгаа.

Бодлого III-3. 10×10 хүснэгтийн нүд бүрт 100 ялгаатай тоо бичсэн байв. Эхлээд мөр бүрийн хамгийн бага тоог тэмдэглэхэд бүгд ялгаатай багананд байрласан байв. Дараа нь багана бүрийн хамгийн бага тоог тэмдэглэхэд бүгд ялгаатай мөрөнд байрласан байжээ. Нийт хэдэн ялгаатай тоо тэмдэглэгдсэн байгаа вэ?

Бодолт. Хамгийн бага тоог авъя. Энэ тоотой нэг мөр болон багананд өөр тэмдэглэгдсэн тоо байхгүй тул энэхүү мөр баганыг даръя. Энэ мэтчилэн явсаар нийт 10 тоо тэмдэглэгдсэн байна.

Бодлого III-4. Дугуй ширээ тойрон хоорондоо ижил зайтай суусан хүмүүсээс А, Б, В, Г (энэ дарааллаараа суусан) нар хурлын даргад нэр дэвшив. Хүн бүр өөртөө ойр сууж байгаа нэр дэвшигчийн төлөө саналаа өгсөн байлаа. А хүн 8 хүний санал авч ялжээ. Харин В хүний төлөө 6 хүн санал өгсөн бол Б болон Г хүмүүсийн төлөө хэдэн хүн санал өгсөн бэ?

Бодолт. Зургаас харахад А ба В хүмүүсийн төлөө өгсөн саналын тоо Б а Г хүмүүсийн төлөө өгсөн саналын тоотой тэнцүү байна. Иймд Б ба Г хүмүүсийн төлөө нийт 14 хүн санал өгсөн. Эндээс тус бүрийнх нь төлөө 7 хүн санал өгсөн гэж гарна. Учир нь Б, Г нарт 8-аас олон хүн санал өгсөн байх боломжгүй.



IV анги

Бодлого IV-1. Ижилхэн 20 хайрцагийн нэгд нь эрдэнэс хийсэн байв. Хайрцаг бүр дээр “Эрдэнэс хажуугийн хайрцагт байгаа” гэсэн бичиг байсан бөгөөд эдгээрийн нэг нь л үнэн бусад нь худал. Нэг л хайрцаг нээх эрхтэй бол эрдэнэс хаана байгааг хэрхэн мэдэх вэ?

Бодолт. Нөхцөлөөс эрдэнэс захын хайрцагт байгаа гэж олдоно. Ингээд захын 2 хайрцагны нэгийг нь нээхэд хаана байгаа нь мэдэгдэнэ.

Бодлого IV-2. 60 хүүхэд гар гараасаа хөтлөлцөн тойрог болон зогссон байв. 46 хүүхэд эмэгтэй хүүхэдтэй, 24 хүүхэд эрэгтэй хүүхэдтэй гар барилцсан байв. Хэдэн эмэгтэй хүүхэд байгаа вэ?

Бодолт. $46 + 24 - 60 = 10$ хүүхэд эрэгтэй болон эмэгтэй хүүхэдтэй хөтлөлцсөн байгаа. Иймд $46 - 10 = 36$ хүүхэд зөвхөн эмэгтэй хүүхэдтэй хөтлөлцсөн. 36 хүүхдийн 72 гар + 10 гар = 82 гар эмэгтэй хүүхэдтэй хөтлөлцсөн байгаа. Иймд 41 эмэгтэй хүүхэд байжээ.

Бодлого IV-3. Гүзээлзгэний цэцэг өглөө дэлгэрч, 2 хоногийн дараа унадаг. Энэ үед гүзээлзгэнэ боловсорч эхлэх бөгөөд 3 дахь хоногийнх орой түүж авдаг. Хүлэмжинд өчигдөр 15 цэцэг, 25 гүзээлзгэнэ байсан бөгөөд орой нь 9 гүзээлзгэнэ түүжээ. Өнөөдөр 20 цэцэг, 24 гүзээлзгэнэ байснаас орой 9-ийг нь түүх боломжтой. Нөгөөдөр хэдэн гүзээлзгэнэтэй байх вэ?

Бодолт. Цэцэгний тоог Ц1, Ц2, гүээлзгэний тоог Г1, Г2, Г3 гэж тэмдэглэе. Өчигдөр Г3=9 байсан.

	Ц1	Ц2	Г1	Г2	Г3
Өчигдөр	15		16		9
Өнөөдөр	20		8	7	9

Өнөөдрийн 24 цэцэгний 16 нь өчигдөр байсан бөгөөд түүний 9-ийг орой түүнэ. Өнөөдөр $24 - (25 - 9) = 8$ гүээлзгэнэ шинээр ургажээ.

	Ц1	Ц2	Г1	Г2	Г3
Өчигдөр	7	8	7	9	9
Өнөөдөр	20		8	7	9

Өчигдрийн 15 цэцэгнээс 8 нь өнөөдөр гүээлзгэнэ болсон тул 7 нь маргааш гүээлзгэнэ болно.

	Ц1	Ц2	Г1	Г2	Г3	
Өчигдөр	7	8	7	9	9	түүсэн
Өнөөдөр	13	7	8	7	9	түүсэн
Маргааш		13	7	8	7	түүнэ
Нөгөөдөр			13	7	8	

Өнөөдрийн 7 цэцэг маргааш гүээлзгэнэ болох тул $20 - 7 = 13$ нь нөгөөдөр гүээлзгэнэ болно. Иймд $13 + 7 + 8 = 28$ гүээлзгэнэтэй байна.

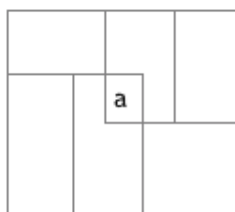
Бодлого IV-4. Өндрөөрөө ялгаатай 10 сурагчийн хамгийн намхан болон хамгийн өндөр нь эрэгтэй хүүхэд байв. Хүү бүрээс “Чамаас намхан хэдэн охин байгаа вэ?”, охин бүрээс “Чамаас өндөр хэдэн хүү байгаа вэ?” гэж асуугаад хүүхэд бүрийн хариултыг нэмэхэд 40 гарчээ. Хэдэн охин, хэдэн хүү байгаа вэ?

Бодолт. Эрэгтэй нь өндөр байх эрэгтэй эмэгтэй хос бүр бие биенээ нэг удаа тоолох тул хөвгүүд болон охидын нийт хариултын тоо нь тэнцүү байна. Иймд хөвгүүдийн (охидын) хэлсэн тоо 20. 1, 2, 3 охин байх боломжгүй. Учир нь хөвгүүдийн хэлсэн тоо 20 хүрэх боломжгүй. Иймд 4 юмуу 5 охин байна.

V анги

Бодлого V-1. 7×5 хүснэгтийн нүднүүдэд, аль ч 2×3 хүснэгтэд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 0 байхаар тоонууд бичигдсэн байв. Нэг удаагийн оролдлогоор дурын нүдэнд бичигдсэн тоог мэдэх боломжтой бол 7×5 хүснэгтийн бүх тоонуудын нийлбэрийг хамгийн цөөндөө хэдэн удаагийн оролдлогоор, хэрхэн мэдэх вэ?

Бодолт. 7×5 хүснэгтийг зурагт үзүүлснээр 2×3 хүснэгтүүдэд хуваая. Тэгвэл давхцалгүй тэгш өнцөгтүүд доторх тоонуудын нийлбэр 0 байна. Давхцалд үүсч байгаа нүдэн дэх тоо а гэе. А тэгш өнцөгтийн нүдэнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэр 0 тул В тэгш өнцөгтийн үлдсэн 5 нүдэн дэх тоонуудын нийлбэр -а байна.



Бодлого V-2. 2×8 хүснэгтийн нүд бүрт 1-ээс 16 хүртэлх тоог бичихдээ аль ч мөр, аль ч баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэр сондгой байхаар хэдэн янзаар бичих боломжтой вэ?

Бодолт. Багана бүрийн нэг нүдэнд сондгой тоо бичигдэх ёстой. Иймд эхний 7 багана бүрийн нэг нүдэнд сондгой тоо бичвэл нийлбэр сондгой байхын тулд сүүлийн баганад тэгш эсвэл сондгой тоо нэг утгатай бичигдэнэ. Сондгой тоо бичих нүдийг 27 аргаар будаж болно. Харин будсан нүднүүдэд 8 сондгой тоог $8!$ янзаар бичиж болно. Мөн будаагүй нүднүүдэд 8 тэгш тоог $8!$ янзаар бичиж болно. Иймд хариу $27 \cdot (8!)^2$

Бодлого V-3. 35 хүүхэд бүр бусад руугаа хэд хэдэн мессеж бичжээ. Харин бие биедээ мессеж бичсэн 2 хүүхэд байсангүй. Тооцож үзэхэд k ширхэг мессеж авсан k ширхэг хүүхэд байсан бол k хамгийн олондоо хэд байх вэ?

Бодолт. k ширхэг хүүхдүүд нь хоорондоо хамгийн олондоо $\frac{k(k-1)}{2}$ ширхэг мессеж бичилцэнэ. Иймд нэг хүүхэд бусад $k-1$ хүүхдээс ширхэг мессеж авсан гэе. Эдгээр хүүхдүүд k ширхэг мессеж авсан тул үлдсэн хүүхдүүдээс $k - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$ мессеж авсан. k хүүхэд болон үлдсэн $\frac{k+1}{2}$ хүүхдүүд нийлээд $k + \frac{k+1}{2} \leq 35$ байх ёстой. Иймд k хамгийн олондоо 23 байна. Жишээ нь 23 хүүхдийн

1 дэх нь 13-аас 23 дахь 11 хүүхдэд,

2 дахь нь 14-өөс 23 дахь болон 1 дэх нийт 11 хүүхдэд,

3 дахь нь 15-аас 23 дахь болон 1, 2 дахь нийт 11 хүүхдэд гэх мэт

12 дахь нь 1-ээс 11 дэх хүүхдэд

13 дахь нь 2-оос 12 дахь хүүхдэд гэх мэт

23 дахь нь 12-оос 22 дахь хүүхдэд мессеж бичсэн байж болно.

Тэгвэл 1 дэх нь 2-оос 12 дахь 11 хүүхдээс 11 мессеж, 24-өөс 35 дахь 12 хүүхдээс 12 мессеж нийт 23 мессеж авна.

Бодлого V-4. 5а, 5б ангийн хүүхдүүд дугуй ширээ тойрон суужээ. Баруун хөрш нь өөрийнх ангийн хүүхэд байх хүүхдийн тоо нь баруун хөрш нь нөгөө ангийн хүүхэд байх хүүхдийн тоотой тэнцүү байв. 5а ангийн 10 хүүхэд байгаа бол 5б ангийн хүүхдүүд хамгийн цөөндөө болон хамгийн олондоо хэд байгаа вэ?

Бодолт. 5а ангийн хүүхдүүдийг А, 5б ангийн хүүхдүүдийг Б гэж тэмдэглэе. Баруун хөршийг нь ард нь бичвэл хөршүүд АБ, АА, БА, ББ хэлбэртэй байна. АА= m , АБ= n гэвэл АА= $10-n$. Нэг ангийн дараалан суусан хүүхдүүдийг нэг бүлэг гэвэл А болон Б ангийн бүлгийн тоо тэнцүү байна. Иймд АБ хэлбэрийн хөршийн тоо БА хэлбэрийн хөршийн тоотой тэнцүү байна.

Иймд БА= n боллоо. ББ= b гэвэл нөхцөлд өгсөнөөр $n+n=10-n+b$ байгаа. Эндээс $3n=10+b$ болно. n нь 1, 2, 3 байх боломжгүй. Иймд $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ байхад $b=2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$ байна. Эндээс $n+b$ нь 6 (хамгийн цөөн), 10, 14, 18, 22, 26, 30 (хамгийн олон) байна..

VI анги

Бодлого VI-1. Хэрэв A гэсэн натурал тооны цифрүүдийн нийлбэр болон $32 \cdot A$ тооны цифрүүдийн нийлбэр нь 2016-аар зөрөөтэй бол A тоо 9-д хуваагдахыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодолт. A тооны цифрүүдийн нийлбэрийг $S(A)$ гэе. Тэгвэл $A - S(A)$ нь 9-д хуваагдахийг хялбархан харж болно. Үүнтэй адилаар $32 \cdot A - S(32 \cdot A)$ нь мөн 9-д хуваагдана. Бодлогын өгөгдсөн нөхцөл ёсоор $S(A) = S(32 \cdot A) \pm 2016$ тул $S(A) - S(32 \cdot A)$ тоо 9-д хуваагдана.

$$S(A) - S(32 \cdot A) = -31 \cdot A + (32 \cdot A - S(32 \cdot A)) - (A - S(A))$$

гэдгээс $31 \cdot A$ тоо 9-д хуваагдана. Иймд A тоо 9-д хуваагдана.

Бодлого VI-2. Тус бүр тэнцүү талбайтай тариалангийн газрыг хоёр компани тус тусдаа нэгэн зэрэг хагалж эхлэв. I компанид 1.75 га газар үлдэхэд II компанид 4.5 га газар хагалах үлдсэн байв. I компани талбайг хагалж дуусахад II компанид 3 га хагалах үлдсэн бол тариалангийн талбайн хэмжээг ол?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. Тариалангийн талбайн хэмжээг A гэе. a хугацаанд I компани $(A - 1.75)$ га, II компани $(A - 4.5)$ га талбайг хагаладаг гэе. b хугацаанд I компани 1.75 га, II компани 1.5 га талбайг хагалдаг гэе. Компани бүрийн нэгж хугацаанд хийх ажлын хэмжээг x, y гэе. $bx = 1.75, by = 1.5$ гэдгээс $x : y = 7 : 6$. $ax - ay = 2.75$ гэдгээс $ax - \frac{6ax}{7} = 2.75$ буюу $\frac{ax}{7} = 2.75$.

$$A = ax + 1.75 = 7 \cdot 2.75 + 1.75 = 21\text{га}.$$

Бодлого VI-3. A нь дөрвөөс ихгүй оронтой натурал тоо байг. A -ийн цифрүүдийг бага оронгоос нь их орон тийш уншихад үүсэх тоог B гэе. (Өөрөөр хэлбэл $A = 2154$ бол $B = 4512$ байна). $A \neq B$ ба B нь A -д хуваагддаг байх бүх A тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сандагдорж)

Бодолт. A бодлогын нөхцлийг хангах тоо ба B нь түүнийг урвуу эрэмбээр бичихэд үүсэх тоо болог. Тэгвэл $B = k \cdot A, k \geq 2$ байна. A дор хаяж хоёр оронтой тоо байна. $A = \overline{a \dots b}$ ба $B = \overline{b \dots a}$ болог. $b \geq ka \geq 2a$ байх ба b -ийн давталт a цифрээр төгсөх учиртай. (a, b) хосын авч болох утгуудыг тооцоолбол: $(1, 3), (1, 7), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 7), (3, 9), (4, 8), (4, 9)$ байна. Эдгээр хосуудаас $(1, 3), (2, 4), (2, 7), (2, 9), (3, 7), (3, 9), (4, 8), (4, 9)$ хосуудын хувьд $ka \leq b$ ба $kb \equiv a \pmod{10}$ нөхцлүүд зөрчигдөнө. Үлдэх хосуудаас $(1, 7)$ хувьд $k = 3$ боловч $3 \cdot \overline{1 \dots 7}$ тооны эхний цифр 7 биш. $(2, 6)$ хувьд $k = 2$ боловч $2 \cdot \overline{2 \dots 6}$ тооны эхний цифр 6 биш. Иймд (a, b) хосын авч болох утга нь $(1, 9)$ ба $(2, 8)$ болно. $19 \nmid 91$ ба $28 \nmid 82$ гэдгээс өгсөн нөхцлийг хангах 2 оронтой тоо олдохгүй.

A -гурван оронтой тоо болог. $A = \overline{1c9}$ бол $B = \overline{9c1}$ гэдгээс $k = 9$ болох ба

$$900 + 10c + 1 = 9(100 + 10c + 9) \Leftrightarrow 80c + 80 = 0$$

тэгшитгэл шийдгүй.

$A = \overline{2c8}$ бол $B = \overline{8c2}$ гэдгээс $k = 4$ болох ба $800 + 10c + 2 = 4(200 + 10c + 8)$ тэгшитгэл мөн шийдгүй. Иймд бодлогын нөхцлийг хангах 3 оронтой тоо олдохгүй.

A -дөрвөн оронтой тоо болог. $A = \overline{1cd9}$ бол $B = \overline{9dc1}$ ба $k = 9$ байна. Энэ тохиолдолд $9000 + 100d + 10c + 1 = 9(1000 + 100c + 10d + 9) \Leftrightarrow d = 89c + 8$. Эндээс $c = 0, d = 8$ гэсэн ганц шийд гарна. Өөрөөр хэлбэл $A = 1089$.

$A = \overline{2cd8}$ бол $B = \overline{8dc2}$ ба $k = 4$ байна. Энэ тохиолдолд $8000 + 100d + 10c + 2 = 4(2000 + 100c + 10d + 8) \Leftrightarrow 2d = 13c + 1$. Эндээс $c = 1, d = 7$ гэсэн ганц шийд гарна. Өөрөөр хэлбэл $A = 2178$.

Хариу: {1089, 2178}.

Бодлого VI-4. 11 мөр, 6 баганатай хүснэгтийн нүд бүрийг ижил будагдсан хоёр мөр үүсэхгүй байхаар хар ба цагаан өнгөөр будав. Тэгвэл аль нэг мөрийн яг хоёр нүдийг эсрэг өнгөөр будаж ижил будагдсан хоёр мөртэй хүснэгт үүсгэж болно гэж батал.

Жишээ нь зурагт үзүүлсэн хоёр будалтыг ялгаатай гэж үзнэ. Харин эхний мөрийн будалтын 2 ба 5-р нүдний өнгийг эсрэг өнгөөр будахад дараагийн мөртэй ижил будагдсан болно.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. 11 мөр, 6 баганатай хүснэгтийн 1, 2, ..., 11-р мөрийн будалтыг харгалзан $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ гэе. $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ будалтаас хоорондоо яг хоёр нүдний өнгө нь эсрэг хоёр будалт олдоно гэж батлах хэрэгтэй. Хэрэв a_i, a_j нь a_k будалтаас яг нэг л нүдний өнгөөр эсрэг байх будалт бол a_i, a_j нь хоорондоо яг хоёр нүдний өнгөөр эсрэг байх будалтууд болно. a_k -ээс яг нэг л нүдний өнгөөр эсрэг байх будалт 6 ширхэг байна. Эдгээр 6 будалтын олонлогийг U_k гэе. Нийт $2^6 = 64$ ялгаатай будалт байгаа. $U_1, U_2, \dots, U_{11}$ олонлог нийлээд 66 будалт байгаа учир дирихлейн зарчим ёсоор дор хаяж 2 олонлогт харьяалагдах будалт оршин байна. Иймд $a_1, a_1, \dots, a_{11}$ будалтаас хоорондоо яг хоёр нүдний өнгө нь эсрэг хоёр будалт олдоно.

VII анги

Бодлого VII-1. Цифрүүдийн квадратуудын нийлбэр нь хоёр оронтой анхны тоо байдаг бүх хоёр оронтой тоог ол. a тоог a тоогоор үржсэнийг a тооны квадрат гэх буюу $a \cdot a = a^2$ болно.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодолт. Олох ёстой 2 оронтой тоогоо $\overline{ab}$ гэе. Тэгвэл бодлогын нөхцөл ёсоор $a^2 + b^2 = p$ буюу p нь хоёр оронтой анхны тоо байна. Иймд бүх хоёр оронтой анхны тоонуудыг жагсаан бичвэл 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 гэсэн 21 ширхэг анхны тоо байна. Хэрэв a тоог 4-д хуваахад гарах үлдэгдлээр нь шинжилвэл a^2 тоог 4-д хуваахад 0 эсвэл 1 гэсэн үлдэгдэл өгнө. Эндээс нийлбэр нь 4-д хуваахад 0 эсвэл 1 эсвэл 2 гэсэн үлдэгдэл өгнө. Харин 3 гэсэн үлдэгдэл хэзээ ч өгөхгүй. Иймд дээрх 2 оронтой анхны тоонуудаас 4-д хуваахад 3 үлдэгдэл өгдөг тоонуудыг ялгавал 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83 гэсэн 11 ширхэг тоо байгаа бөгөөд эдгээр тоонууд нь хасагдана. Иймд үлдсэн тоонуудыг авч үзвэл 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97 гэсэн 10 ширхэг тоо байх бөгөөд эдгээр тоонуудын хувьд $a^2 + b^2 = p$ тэгшитгэлийг бодно. Энэ тэгшитгэлийн хувьд $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ байх нь илэрхий бөгөөд тэгшитгэлийн шийд болдог a, b цифрүүдийн хувьд байр сэлгэн 2 оронтой тоог үүсгэх тул $\overline{ab}$ болон $\overline{ba}$ гэсэн хоёр тоо олдоно. Эдгээр 9 тоог тус бүрд нь авч үзэн шийдүүдийг олбол $a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow 23, 32$ гэсэн шийдүүдтэй.

$$a^2 + b^2 = 17 \Rightarrow 14, 41 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 29 \Rightarrow 25, 52 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 37 \Rightarrow 16, 61 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 41 \Rightarrow 45, 54 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 53 \Rightarrow 27, 72 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 61 \Rightarrow 56, 65 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 73 \Rightarrow 38, 83 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 89 \Rightarrow 58, 85 \text{ гэсэн шийдүүдтэй.}$$

$$a^2 + b^2 = 97 \Rightarrow 49, 94 \text{ гэсэн шийдүүдтэй буюу нийт 20 ширхэг тоо байна.}$$

Бодлого VII-2. Бат, Болдод харуулахгүйгээр 37 ширхэг эерэг бүхэл тоог дэвтэртээ жагсаан бичсэн байв. Болдын зорилго бол Батын жагсаан бичсэн 37 ширхэг тооны үржвэрийг олох бөгөөд үүний тулд Бат, Болд хоёр дараах дүрмээр тоглоно. Болд хоёр эсвэл түүнээс олон тооны хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч эсвэл хамгийн их ерөнхий хуваагчыг Батаас асуух боломжтой(Жишээ нь эхний 3 тооны ХБЕХ нь хэд вэ? эсвэл хоёр дахь 5 тооны ХБЕХ нь хэд вэ? эсвэл 3, 10, 13 дугаар тооны ХИЕХ нь хэд вэ? гэм мэт). Болд хэдэн ч удаа асуулт асууж болох ба Бат зөв хариулах ёстой. Батаас авсан хариултууд дээр арифметикийн 4 үйлдэл (нэмэх, хасах, үржих, хуваах) хийж Батын бичсэн 37 ширхэг тооны үржвэрийг олох боломжтой юу? Яаж?.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. a, b натурал тооны хамгийн их ерөнхий хуваагчыг (a, b) , хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчыг $[a, b]$ гэж тэмдэглэе. $(a, b) = k$ бол $a = ka_1, b = kb_1$ ба $(a_1, b_1) = 1$ гэж үзэж болно. $[a, b] = ka_1b_1$ гэдгээс

$$ab = a, b. \quad (1)$$

a, b, c натурал тооны хамгийн их ерөнхий хуваагчыг (a, b, c) , хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчыг $[a, b, c]$ гэж тэмдэглэе. $(a, b, c) = s, (a, b) = ks, (b, c) = ms, (a, c) = ns$, ба k, m, n тоонууд хос хосоороо харилцан анхны гэж үзэж болно. Тэгвэл $a = a_1kns, b = b_1kms, c = c_1mns$ ба a_1, b_1, c_1 тоонууд хос хосоороо харилцан анхны байна. $[a, b, c] = a_1b_1c_1kmns$ гэдгээс

$$abc = \frac{(a, b)(b, c)(a, c)[a, b, c]}{(a, b, c)}. \quad (2)$$

Болдын бичсэн 37 ширхэг тоог 2 элементтэй 17 олонлог ба 3 элементтэй нэг олонлогт хувааж (1) ба (2) томъёонуудыг ашиглан олонлог бүр дэх тоонуудын үржвэрийг олж чадах учир бүх тооны үржвэрийг олж чадна.

Бодлого VII-3. 20 хүүхэдтэй анги шинэ жилийн баярт зориулсан "Монита" зохион байгуулахаар болов. Монитагийн сугалаа явагдахад бие биеэ сугалсан хос 5, бие биеэ тойргоор сугалсан гурвал 2, бие биеэ тойргоор сугалсан дөрвөл 1 байх боломж хэдэн вэ?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. Эхлээд n хүүхдээс хоёр хүүхэд сонгох тоог $\frac{n(n-1)}{2}$ ба гурван хүүхэд сонгох тоог $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ болохыг харуулах хэрэгтэй.

Одоо a_1 хүүхэд a_2 -г, a_2 хүүхэд a_3 -г, гэх мэт a_k хүүхэд a_1 -г сугалсан бол $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ гэж бичье. Тэгвэл (a, b) бол (b, a) -тай адил, (a, b, c) бол (b, c, a) ба (c, a, b) -тэй адил болохыг мэдэх хэрэгтэй. a, b бие биеэ сугалсан хос үүгэх боломж 1, a, b, c гурван хүүхэд бие биеэ тойргоор сугалсан гурвал үүсгэх боломж $\frac{3!}{3} = 2$, a, b, c, d дөрвөн хүүхэд бие биеэ тойргоор сугалсан дөрвөл үүсгэх боломж $\frac{4!}{4} = 6$ байна.

Ангийн 20 хүүхдийг $(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)(*, *)$ хаалтанд байрлуулах боломжийн тоо

$$\frac{20 \cdot 19}{2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \frac{16 \cdot 15}{2} \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6} \cdot \frac{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 6 = \frac{20!}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4}$$

$(*, *)$ ба $(*, *, *)$ нь харгалзан 5 ба 2 ширхэг байгаа учир эцсийн хариу нь

$$\frac{20!}{5! \cdot 2^5 \cdot 2! \cdot 3^2 \cdot 4}.$$

Бодлого VII-4. Самбарт $1, 2, 3, \dots, 39, 40$ тоонууд өгөгдөв. Цэцгээ энэ 40 тооноос дурын 2 тоог сонгох байдлаар 20 хос болгон хувааж, харин Бат хуваасан хос бүрээс аль нэг тоог сонгон авч эдгээр авсан тоонуудынхаа нийлбэрийг олно. Хэрэв Бат 300-с их ба 500-с бага ямар нэгэн натурал тоог Цэцгээд хэлсэн бол Батын сонгосон тоонуудын нийлбэр нь тэрхүү хэлсэн тоотойгоо тэнцүү биш байхаар хуваалт хийж ямагт чадах уу?

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодолт. Хариу: Чадна.

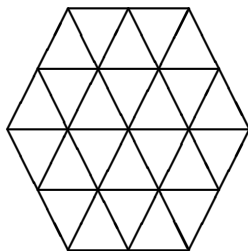
Үүнийг харуулахын тулд

$$\begin{aligned} P_1 &= (\{1; 2\}, \{3; 4\}, \{5; 6\}, \dots, \{39; 40\}), \\ P_2 &= (\{1; 21\}, \{2; 22\}, \{3; 33\}, \dots, \{20; 40\}), \\ P_3 &= (\{1; 40\}, \{2; 21\}, \{3; 22\}, \dots, \{20; 39\}) \end{aligned}$$

гэсэн гурван хуваалтыг авч үзье. Хуваалтын i -р хосоос Батын сонгон авсан тоог a_i гэж тэмдэглээд эдгээр тоонуудын нийлбэрийг $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = s$ гэе.

- I) $P_1 = (\{1; 2\}, \{3; 4\}, \{5; 6\}, \dots, \{39; 40\})$ хуваалтын хувьд сонгон авсан тоонуудын нийлбэр нь $1 + 3 + 5 + \dots + 39 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{20} \leq 2 + 4 + 6 + \dots + 40$ буюу $400 \leq s \leq 420$ байна. Эндээс хэрэв Бат 400-аас бага, 420-оос их тоо хэлбэл Цэцгээ энэ хуваалтыг хийхэд Батын сонгосон тоонуудын нийлбэр хэлсэн тоотой нь тэнцүү байж чадахгүй.
- II) $P_2 = (\{1; 21\}, \{2; 22\}, \{3; 33\}, \dots, \{20; 40\})$ хуваалтын хувьд аль ч хосоос тоо авсан 20-д хуваахад өгөх үлдэгдэл нь ижил байна. Иймд $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = s$ нийлбэрийн 20-д хуваахад өгөх үлдэгдэл нь $1 + 2 + \dots + 20$ тооны 20-д хуваахад өгөх үлдэгдэлтэй ижил байна. Иймд хэрэв Батын хэлсэн тоо 400-аас багагүй, 420-оос ихгүй бөгөөд 20-д хуваахад өгөх үлдэгдэл нь 10-тай тэнцүү биш бол энэ хуваалтыг Цэцгээ хийхэд Батын сонгосон тоонуудын нийлбэр нь хэлсэн тоотойгоо тэнцүү байж чадахгүй.
- III) Одоо Батын хэлсэн тоо нь 400-аас багагүй, 420-оос ихгүй бөгөөд 20-д хуваахад 10 үлдэгдэл өгдөг буюу 410 байх ганц тохиолдолдын хувьд $P_3 = (\{1; 40\}, \{2; 21\}, \{3; 22\}, \dots, \{20; 39\})$ гэсэн хуваалтыг авч үзье. Хэрэв энэ хуваалтын i -р хосоос сонгосон тоо нь i -тэй тэнцүү бол 20-д хуваахад i -үлдэгдэл өгнө, харин i -р хосоос сонгосон тоо нь i -тэй тэнцүү биш бол 20-д хуваахад $(i - 1)$ гэсэн үлдэгдэл өгнө. Иймд P_3 хуваалтын хувьд k ширхэг тоог нь i -р хосоос i -тэй тэнцүү биш байхаар сонгосон гэж үзвэл $a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = s$ нийлбэр нь 20-д хуваахад $(1 + 2 + \dots + 20) - k = 210 - k$ гэсэн үлдэгдэл өгнө. Иймд нийлбэр нь 410 буюу 20-д хуваахад 10 гэсэн үлдэгдэл өгөх тул $210 - k$ нь мөн 10 гэсэн үлдэгдэл өгөхийн тулд $k = 0$ эсвэл $k = 20$ байх ёстой болно. Гэтэл үед 1, 2, ..., 20 гэсэн тоонууд сонгогдох тул нийлбэр нь 410 байж болохгүйд хүрч зөрчилдөнө. Харин $k = 20$ үед 40, 21, 22, ..., 39 тоонууд сонгогдох тул нийлбэр нь $21 + 21 + 23 + \dots + 40 = 610$ болох буюу 410-аас ялгаатай тул мөн боломжгүй болно.

Бодлого VIII-1. Зурагт өгөгдсөн дүрс дэх гурвалжнуудыг 0, 1, 2 тоонуудаар аль ч ,  дүрс дэх тоонуудын нийлбэр 3-т хуваагддаг байхаар бөглөв. Хэрэв өгөгдсөн дүрсийн голын цэг дээр төвтэй  дүрсэд 1 ба 2 тоонууд тэнцүү ширхэг орсон бол нийт 1 ба 2 тоонууд тэнцүү ширхэг байна гэж батал.



Бодолт. Аливаа  дүрсийн хувьд хоёр ширхэг  дүрсэд хуваагдах учир бүх тоонуудын нийлбэр нь 3-д хуваагдана. Мөн голын  дүрс дэх тоонуудын нийлбэр 3-д хуваагдах тул булангийн хоёр гурвалжин дахь тоонуудын нийлбэр 3-д хуваагдана. Иймд уг хоёр тоо нь (1, 2) эсвэл (0, 0) байх нь тодорхой буюу 1 ба 2 тэнцүү ширхэг орсон байна. Өгөгдсөн дүрсийн хүрээний гурвалжнуудыг ямар нэгэн  дүрсний булангийн гурвалжнууд болгон хоёр хоёроор нь хосууд болгон хувааж болох тул өгөгдсөн дүрсэд 1 ба 2 тэнцүү ширхэг орсон байна.

Бодлого VIII-2.

$$pqr - (p + q + r) = 2016$$

байх p, q, r анхны тоонууд олдох уу?

Бодолт. Хариу: Олдохгүй.

Хэрэв p, q, r нь сондгой анхны тоонууд бол 4-д хуваахад 1 эсвэл 3 үлдэгдэл өгнө. Бүх боломжийг шалгавал $pqr - (p + q + r)$ нь 4-д хуваагдахгүй гэж гарна. Иймд p, q, r тоонуудын аль нэг нь 2 байна.

Мөн p, q, r нь 3-аас ялгаатай анхны тоонууд бол 3-д хуваахад 1 эсвэл 2 үлдэгдэл өгнө. Бүх боломжийг шалгавал $pqr - (p + q + r)$ нь 3-д хуваагдахгүй гэж гарна. Иймд p, q, r тоонуудын аль нэг нь 3 байна.

p, q, r нь тэгш эрхтэй тул $p = 2, q = 3$ гэж үзэж болно. Энэ үед $r = \frac{2021}{5}$ буюу бүхэл биш болж зөрчил үүснэ. Иймд олдохгүй.

Бодлого VIII-3. Самбарт бичигдсэн тоог арилгаад эсвэл уг тоог 5-аар үржүүлсэн тоог, эсвэл уг тооны цифрүүдийг нь сэлгэсэн тоог бичих үйлдлүүд өгөгдөв (энд 0 цифрийг хамгийн эхэнд бичиж болно). Самбарт анх 1 бичигдсэн байсан бол уг хоёр үйлдлийг ашиглан

(a) 35

(б) 30

тоог гарган авч болох уу?

Бодолт.

- (а) Болно. $1 \rightarrow 5 \rightarrow 25 \rightarrow 52 \rightarrow 260 \rightarrow 026 \rightarrow 130 \rightarrow 013 \rightarrow 65 \rightarrow 56 \rightarrow 280 \rightarrow 028 \rightarrow 140 \rightarrow 014 \rightarrow 70 \rightarrow 07 \rightarrow 35$.
- (б) Болохгүй. 3-д хуваагддаггүй тооны цифрүүдийн байрыг сэлгэхэд эсвэл 3-д хуваагддаггүй тоог 5-аар үржүүлэхэд мөн л 3-д хуваагддаггүй тоо гарна. Иймд самбар дээрх бүх тоо 3-д хуваагдахгүй тул 30 гарах боломжгүй.

Бодлого VIII-4. 2×8 хүснэгтийн нүднүүдийг 2 өнгөөр будав. Хүснэгтийг 1×2 ба 2×1 дүрсүүдэд аль ч дүрсний хоёр нүд ижил өнгийн биш байхаар хувааж болдог бол уг будалтыг сайн будалт гэе. Сайн будалтын тоог ол.

Бодолт. Хариу: 2448. n нь натурал тоо ба $2 \times n$ хүснэгтийн хувьд сайн будалтын тоог a_n гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $a_n = 6 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$ харьцаа биелэхийг $n = 4, 5, 6, 7, 8$ үед шалгана уу. Мөн $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 16$ гэдгийг хялбархан шалгаж болно. Эндээс $a_8 = 2448$ гэж олдоно.

IX анги

Бодлого IX-1. $f_1(x) = x^2 + 2a_1x + b_1, f_2(x) = x^2 + 2a_2x + b_2, f_3(x) = x^2 + 2a_3x + b_3$ квадрат гурван гишүүнтүүд өгчээ. Хэрэв $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$ байвал эдгээр гурван гишүүнтийн ядаж нэг нь 2 язгууртай гэж харуул.

Бодолт. Эсрэгээс нь бүх квадрат гишүүнт 2 язгуургүй гэж үзье. Тэгвэл гурван гишүүнт бүрийн дискриминантын хувьд $a_k^2 \leq b_k, k = 1, 2, 3$ тэнцэтгэл биш гарна. Тэнцэтгэл бишийн зүүн тал сөрөг биш тул эдгээрийг үржүүлбэл $(a_1a_2a_3)^2 \leq b_1b_2b_3$ буюу $a_1a_2a_3 \leq 1$ болж өгсөн нөхцөлийг зөрчинө.

Бодлого IX-2. Тэгш өнцөгт паралелопипедийн урт, өргөн, өндөр нь харгалзан a, b, c бүхэл тоонууд байв. Эхлээд түүний гадаргууг ногоон өнгөөр будав. Дараа нь түүнийг $\frac{1}{3}$ ширхэг кубуудад хуваав. Тэгэхэд ногоон өнгө оролцоогүй кубуудийн тоо нийт кубын $\frac{1}{3}$ болж байв. Тэгвэл a, b, c -ийн авч болох бүх утгуудыг ол.

Бодолт. a, b, c бүгд 2-оос эрс их ба бүх талс нь ногооноор будагдах тул

$$3(a-2)(b-2)(c-2) = abc$$

буюу

$$\frac{a}{a-2} \cdot \frac{b}{b-2} \cdot \frac{c}{c-2} = 3$$

тэнцэтгэл биелэх болно. Эндээс $a, b, c \geq 7$ бол

$$\frac{a}{a-2} = 1 + \frac{2}{a-2} \leq 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}, \frac{b}{b-2} \leq \frac{7}{5}, \frac{c}{c-2} \leq \frac{7}{5}$$

болно. Эндээс

$$\frac{a}{a-2} \cdot \frac{b}{b-2} \cdot \frac{c}{c-2} \leq \left(\frac{7}{5}\right)^3 < 3$$

тул a, b, c -ийн ядаж нэг нь 7-оос бага байна. $3 \leq a \leq 6$ ба $b \leq c$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Иймээс

1. $a = 3$ байг. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл $bc = (b - 2)(c - 2)$ тэнцэтгэлтэй эквивалент ба энэ нь шийдгүй байна.

2. $a = 4$ байг. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл $24 = (b - 6)(c - 6)$ тэнцэтгэлтэй эквивалент ба энэ нь

$$(b, c) = (7, 30), (8, 18), (9, 14), (10, 12)$$

гэсэн шийдүүдтэй.

3. $a = 5$ байг. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл $45 = (2b - 9)(2c - 9)$ тэнцэтгэлтэй эквивалент ба энэ нь

$$(b, c) = (5, 27), (6, 12), (7, 9)$$

гэсэн шийдүүдтэй.

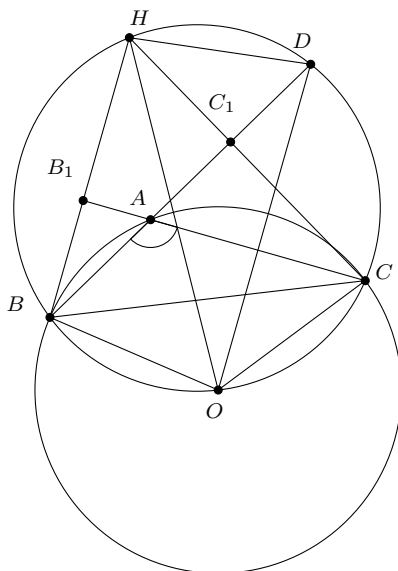
4. $a = 6$ байг. Тэгвэл дээрх тэнцэтгэл $8 = (b - 4)(c - 4)$ тэнцэтгэлтэй эквивалент ба энэ нь

$$(b, c) = (5, 12), (6, 8)$$

гэсэн шийдүүдтэй.

Бодлого IX-3. $\angle A = 120^\circ$ байх ABC гурвалжин өгчээ. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвөөс уг гурвалжны ортотөв хүрэх зай $AB + AC$ нийлбэртэй тэнцүү гэж батал.

Бодолт. BB_1, CC_1 нь ABC гурвалжны өндрүүд, харин H ба O нь харгалзан уг гурвалжны ортотөв ба гурвалжныг багтаасан тойргийн төв болог. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн хувьд BAC нум 120° , иймээс BOC төв өнцөг 120° байна. ω нь BOC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв байг. B_1AC_1H дөрвөн өнцөгтөөс $\angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, иймээс H цэг ω тойрог дээр оршино. BA хэрчмийн үргэлжлэл дээр A цэгээс ялгаатай $AD = AC$ хэрчим таслая. Өнцөг DAC нь 60° -тай тэнцүү, иймээс DAC зөв гурвалжин байна. Эндээс $\angle BDC = \angle ADC = 60^\circ$ тул D цэг ω тойрог дээр оршино. $AB + AC = AB + AD = BD$ тул манай бодлого OH ба BD хөвчүүд тэнцүүг батлахад шилжинэ. OB ба HD бага нумууд 60° -тай тэнцүү, учир нь $BO = OC$ ба $\angle BHD = \frac{1}{2}\angle ABC$ байна. Өөрөөр хэлбэл, $\angle BHD = 30^\circ$ ба $\angle HBD = 90^\circ - \angle B_1AB = 30^\circ$ болно. Тэгэхээр OH ба BD нь адил хажуут $BHDO$ трапецийн диагоналиуд болно.



Бодлого IX-4. $n \times m$ ($n, m \geq 2$) хүснэгтийн хэсэг нүдийг (нэгээс их) будав. Аль ч багана, аль ч мөр болон аль ч 2×2 хүснэгтэд тэгш тооны будагдсан нүд байсан бол $n \cdot m$ тэгш тоо болохыг үзүүл.

Бодолт.

Х анги

Бодлого X-1. n ба $n + 14$ тоонууд нь m ба $m + 14$ тоонуудын алийг нь ч хуваахгүй, харин $n(n + 14)$ тоо $m(m + 14)$ тоог хуваадаг m натурал тоо олдох хамгийн бага n натурал тоог ол. Энэ хамгийн бага n тооны хувьд дээрх нөхцөлийг хангах бүх m натурал тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Л. Буянтогтох)

Бодолт. 1. Эхлээд дараах хялбар өгүүлбэрүүдийг авч үзье.

- (i) $n, n + 14$ тоонууд нь p эсвэл $2p$ (p анхны тоо) хэлбэртэй бол бодлогын нөхцөл биелэхгүй болохыг харахад төвөггүй.
- (ii) n эсвэл $n + 14$ нь p^2 ($2 < p \neq 7$ анхны тоо) хэлбэртэй байг. Тэгвэл бодлогын нөхцөлөөс $p \mid m$ ба $p \mid m + 14$ болно. Эндээс $p \mid 14$ болж зөрчилд хүрнэ.
- (iii) n эсвэл $n + 14$ нь 2^k (k натурал тоо) хэлбэртэй байг. Иймд хэрэв m ба $m + 14$ тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагч d бол $4 \mid d$ учраас $2^k \mid m$ эсвэл $2^k \mid m + 14$ болж зөрчилд хүрнэ.

1-29 хүртэлх тоонууд (i), (ii), (iii) өгүүлбэрүүдийн ядаж нэгнийх нь нөхцөлийг хангахыг хялбархан шалгаж болно. Харин $n = 30$ тооны хувьд $m = 66$ нь бодлогын нөхцөлийг хангана. Одоо $30 \cdot 44 \mid m(m + 14)$ байг. Тэгвэл $m = 2m_0$ байна. Иймд

$$(3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 11) \mid m_0(m_0 + 7)$$

болно. Дараах 4 тохиолдол байх боломжтой.

1. $3 \cdot 2 \mid m_0, 5 \cdot 11 \mid m_0 + 7$ ба $5 \nmid m_0, 11 \nmid m_0, 3 \nmid m_0 + 7, 2 \nmid m_0 + 7$.

$55 \mid m_0 + 7$ гэдгээс $m_0 = 55k - 7$ болох ба $m_0 = 55k - 7 \equiv k - 1 \equiv 0 \pmod{6}$. Иймд $k = 6t + 1$ буюу $m_0 = 330t + 48$ тул $m = 660t + 96$.

2. $3 \cdot 11 \mid m_0, 5 \cdot 2 \mid m_0 + 7$ ба $5 \nmid m_0, 2 \nmid m_0, 3 \nmid m_0 + 7, 11 \nmid m_0 + 7$.

$33 \mid m_0$ гэдгээс $m_0 = 33k$ болох ба $m_0 + 7 = 33k + 7 \equiv 3(k - 1) \equiv 0 \pmod{10}$. Иймд $k = 10t + 1$ буюу $m_0 = 330t + 33$ тул $m = 660t + 66$.

3. $5 \cdot 2 \mid m_0, 3 \cdot 11 \mid m_0 + 7$ ба $3 \nmid m_0, 11 \nmid m_0, 5 \nmid m_0 + 7, 2 \nmid m_0 + 7$.

$33 \mid m_0 + 7$ гэдгээс $m_0 = 33k - 7$ болох ба $m_0 = 33k - 7 \equiv 3(k + 1) \equiv 0 \pmod{10}$. Иймд $k = 10t - 1$ буюу $m_0 = 330t - 40$ тул $m = 660t - 80$.

4. $5 \cdot 11 \mid m_0, 3 \cdot 2 \mid m_0 + 7$ ба $3 \nmid m_0, 2 \nmid m_0, 5 \nmid m_0 + 7, 11 \nmid m_0 + 7$.

$55 \mid m_0$ гэдгээс $m_0 = 55k$ болох ба $m_0 + 7 = 55k + 7 \equiv k + 1 \equiv 0 \pmod{6}$. Иймд $k = 6t - 1$ буюу $m_0 = 330t - 55$ тул $m = 660t - 110$.

Иймээс $n = 30, m = 660t + 66, m = 660t + 96, m = 660t + 550, m = 660t + 580$ (энд t нь натурал тоо) болох ба эдгээр тоонууд бодлогын нөхцөл хангахыг шалгаж болно.

Бодлого Х-2. Олимпиадад оролцохоор ирсэн сурагчдын аливаа 2 нь яг нэг сурагч таньдаг бол бие биеэ таньдаггүй сурагчдын танилын тоо тэнцүү болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

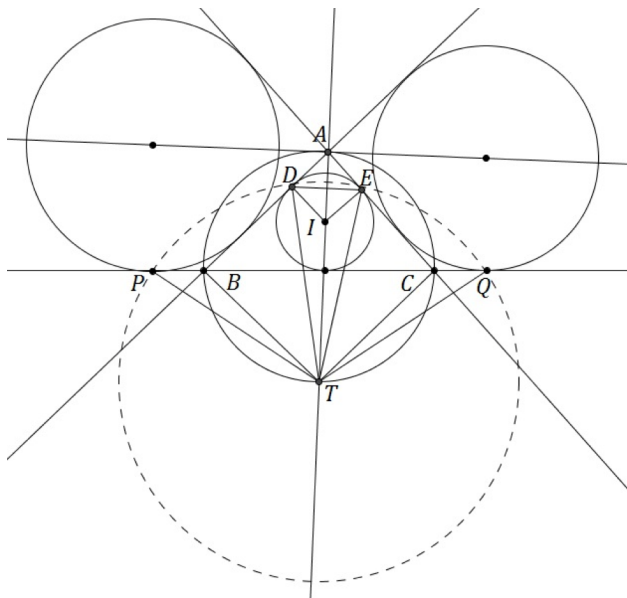
Бодолт. Олимпиадад n хүүхэд оролцсон гэе. $n > 3$ үед бодлогын нөхцлөөс бие биеэ таньдаггүй A ба B хоёр хүүхэд олдоно. A, B -ийн ерөнхий танилыг C гээд, A -ийн танилыг $C, X_2, \dots, X_k$, B -ийн танилыг $C, Y_2, \dots, Y_s$ гэе. Тэгвэл $k \geq s$ гэж үзэж болно. A ба A -ийн аливаа танилыг авахад ерөнхий танил олдох тул $C, X_2, \dots, X_k$ -ийн аль нь ч $C, X_2, \dots, X_k$ -ээс яг нэг хүнийг таньдаг (2 хүн таньдаг бол ерөнхий танилын тоо нь 2 байх хоёр сурагч олдоно), A -ийн аливаа танил ба B авахад $C, X_2, \dots, X_k$ -ийн аль нь ч $C, Y_2, \dots, Y_s$ -ээс яг нэг хүнийг таньдаг байна (2 хүн таньдаг бол ерөнхий танилын тоо нь 2 байх хоёр сурагч олдоно).

Хэрэв $k \geq 3$ бол $C, X_2, \dots, X_k$ -ийн аль ч хоёрынх нь танил ялгаатай байна (ижил бол ерөнхий танилын тоо нь 2 байх хоёр сурагч олдоно). Иймд $k \leq s$ гэж гарах учир $k = s$ болно. Y_i бүр A -тай танил биш учир Y_i бүрийн танилын тоо k байна. X_i бүр B -тэй танил биш учир X_i бүрийн танилын тоо k байна. C -тэй танил биш X_i хүүхэд олдоно. Иймд C -ийн танилын тоо k байна. Иймд хүүхэд бүрийн танилын тоо k болно. Хэрэв $k = 2$ бол C нь X_2 -тэй танил болно. B ба C авахад Y_2 олдоно. Анх $k \geq s$ гэж үзсэн учир $s = k = 2$.

Бодлого Х-3. ABC гурвалжинд багтсан тойрог AB ба AC талуудыг харгалзан D ба E цэгүүдэд, харин гадаад багтсан 2 тойрог нь BC талын үргэлжлэлийг P ба Q цэгүүдэд шүргэнэ. Хэрэв D, E, P ба Q цэгүүд нэг тойрог дээр оршдог бол $\angle BAC = 90^\circ$ болохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт.



Хэрэв BC талыг a , гурвалжны хагас периметрийг p гэж тэмдэглэвэл D ба E нь шүргэлтийн цэгүүд учраас $AD = AE = p - a$ болно. Үүнтэй адилаар $BP = CQ = p - a$ байна. Иймд

$$AD = BP$$

D, E, P ба Q цэгүүд нэг тойрог дээр орших учир энэ тойргийн төв нь DE ба PQ хэрчмүүдийн дунджаас босгосон перпендикуляруудын огтлол болно. Түүнийг T гэе. BC талын дундаж

цэг нь PQ хэрчмийн дундаж цэгтэй давхцана. Иймд T нь BC нумын дундаж цэг болно. Гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг I гэвэл $TB = TI = TC$ болохыг хялбархан харж болно. Мөн T тойргийн төв учраас

$$TP = TD = TE = TQ$$

байна. Хэрэв $\angle BAC = \alpha$ гэж тэмдэглэвэл $\angle PBT = 180^\circ - \alpha/2$ болно. ADT гурвалжнаас синусын теоремоор

$$\sin \angle DTA = \frac{AD \sin \alpha/2}{TD},$$

мөн PBT гурвалжнаас

$$\sin \angle PTB = \frac{PB \sin(180^\circ - \alpha/2)}{TP}$$

болно. Эндээс $()$ ба $()$ ашиглавал $\angle DTA = \angle PTB$ болно. Иймд TOT шинжээр $\triangle PTB = \triangle DPI$ болно. Эндээс $PB = DI = DA = p - a$. Иймд ADI гурвалжин адил хажуут тэгш өнцөгт гурвалжин болох тул $\alpha/2 = 45^\circ$ буюу $\angle BAC = 90^\circ$.

Бодлого Х-4. Тойргийг тэнцүү нумуудад хуваах 180 цэг өгөгдөв. Тэгвэл өгсөн цэгүүдээс ялгаатай тойргийн цэгээс тэдгээр цэгүүд хүртэлх зайнуудын 60-аас цөөнгүй нь иррационал болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодолт. Тойргийг тэнцүү нумуудад хуваах цэгүүдийг $A_1, A_2, \dots, A_{180}$, эдгээрээс ялгаатай цэгийг A гэе. Өгсөн цэгүүдээ гурав гурваар нь

$$A_1 A_2 A_3, A_4 A_5 A_6, \dots, A_{178} A_{179} A_{180}$$

гэсэн 60 хэсэгт хуваая. $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ нь дээрх гурвалуудын нэг байг. Тэгвэл $AA_i A_{i+1} A_{i+2}$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд Птолемейн теорем бичвэл

$$|AA_{i+1}| \cdot |A_i A_{i+2}| = |AA_i| \cdot |A_{i+1} A_{i+2}| + |AA_{i+2}| \cdot |A_i A_{i+1}|.$$

Мэдээж $|A_i A_{i+1}| = |A_{i+1} A_{i+2}|$ ба нэг нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү учраас $\angle A_{i+1} A_i A_{i+2} = 1^\circ$. Иймд адил хажуут $A_{i+1} A_i A_{i+2}$ гурвалжнаас $|A_i A_{i+2}| = 2 |A_i A_{i+1}| \cdot \cos 1^\circ$ ба $()$ томъёоноос

$$\cos 1^\circ = \frac{|AA_i| + |AA_{i+2}|}{2 |AA_{i+1}|}.$$

Эндээс хэрэв $\cos 1^\circ$ иррационал бол $|AA_i|, |AA_{i+1}|, |AA_{i+2}|$ зайнуудын дор хаяж нэг нь иррационал байх ба нийт гурвалын тоо 60 учраас бодлого бодогдоно. Иймд одоо $\cos 1^\circ$ иррационал болохыг харуулъя. Эсрэгээс нь $\cos 1^\circ$ рационал гэж үзье. Тэгвэл $\cos 2^\circ = 2 \cos^2 1^\circ - 1$ тул $\cos 2^\circ$ мөн рационал. Нөгөө талаас $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ тул $\cos 3^\circ = 2 \cos 2^\circ \cos 1^\circ - \cos 1^\circ$. Иймд $\cos 3^\circ$ рационал. Үүнийг цааш үргэлжлүүлэн $\cos 30^\circ$ рационал гэсэн зөрчилд хүрнэ.

Нэмэлт . Птолемейн теорем мэдэхгүй бол $AA_i A_{i+1}$ ба $AA_{i+1} A_{i+2}$ гурвалжнуудаас косинусын теоремоор

$$|AA_i|^2 + |AA_{i+1}|^2 - 2|AA_i| \cdot |AA_{i+1}| \cos 1^\circ = |AA_{i+1}|^2 + |AA_{i+2}|^2 - 2|AA_{i+1}| \cdot |AA_{i+2}| \cos 1^\circ$$

болно. $1 \leq i \leq 178$ байх аливаа i тооны хувьд $|AA_i| \neq |AA_{i+2}|$ болохыг хялбархан харж болох тул дээрх тэнцэтгэлээс $()$ гарна.

XI-XII анги

Бодлого XI-XII-1. $n \times n$ хүснэгтийн зарим нүдийг буджээ. Хэрэв ямар нэгэн будагдсан нүд өөрийн оршиж байгаа мөр болон баганадаа ахиад нэг будагдсан нүд агуулдаг бол энэ гурван нүдийг "сайн гурвал" гэе. Тэгвэл "сайн гурвал" олддоггүй байхаар хамгийн ихдээ хичнээн нүдийг будаж болох вэ?

Бодолт. Бодолтоо $m \geq 2$ мөр $n \geq 2$ багана бүхий $m \times n$ хүснэгтийн хувьд хийе. Сайн гурвал олддоггүй будалтыг сайн будалт гэе. Хүснэгтийн эхний мөрийн эхний $n - 1$ нүдийг, сүүлийн баганын сүүлийн $m - 1$ нүдийг будахад сайн будалт үүснэ. Одоо $n + m - 1$ нүдийг будахад сайн будалт болж чадахгүйг n тоогоор индукцлэн батлая.

$n = 2, 3$ үед илэрхий. $(n - 2) \rightarrow n$ шилжилт хийе.

Мөрүүдийн (багануудын) байрыг солиход будалт нь чанараа хадгална

Эсрэгээс нь $m + n - 1$ нүд нь будагдсан $m \times n$ хүснэгтийн сайн будалт байдаг гэж үзье. $m + n - 1 \geq m + 1$ тул Дирихлейн зарчим ёсоор аль нэг мөрөнд дор хаяж 2 нүд нь будагдсан байна. (1)-ийг ашиглавал бид энэ 2 нүдийг эхний мөрийн эхний 2 нүд гэж үзэж чадна. Энэ будалт нь сайн будалт учир эхний 2 баганад өөр будагдсан нүд байж болохгүй. Үлдсэн хүснэгтийг ажиглавал $m \times (n - 2)$ хүснэгт нь $m + n - 3$ нүд нь будагдсан байх ба сайн будалт байна. Гэтэл индукцын өмнөх алхам ёсоор $m \times (n - 2)$ хүснэгтэнд $m + (n - 2) - 1$ нүд нь будагдсан сайн будалт оршин байхгүй тул зөрчил үүснэ.

Иймд бодлогын хариу: $2n - 2$

Бодлого XI-XII-2. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд тойрог багтах ба AB, BC, CD, DA талуудыг харгалзан X, Y, Z, T цэгүүдэд шүргэнэ. AC диагональ багтсан тойрогтой P, Q цэгүүдээр огтлолцох ба PQ хэрчмийн дундаж цэг R бол $\angle BRY = \angle DRZ$ гэж батал.

Бодолт. $\angle ORC = \angle OYC = \angle OZC = 90^\circ$ тул $ORYCZ$ нь OC диаметртэй тойрогт багтана. $CY = CZ$ тул $\angle YRC = \angle CRZ$ болох нь гарна. Одоо бид $\angle BRC = \angle DRC$ гэж баталхад хангалттай.

$AC \cap BD = E$ гэе. $AXBCDT$ -г тойрог багтаасан зургаан өнцөгт хэмээн сэтгэвэл Брианшоны теорем ёсоор AC, BT, DX шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно. Иймд $XT \cap DB = F$ гэвэл $FBED$ нь гармоник дөрвөл болно. Мөн адилаар $YZ \cap BD = F'$ гэвэл $F'BED$ нь гармоник дөрвөл болох тул $F = F'$ болно. Нөгөө талаас $F \in \ell_A, F \in \ell_C$ тул $\ell_F = AC$ болно. Иймд $AC \perp OF$ буюу $F \in OR$ болов.

$\angle FRE = 90^\circ$ ба $FBED$ гармоник дөрвөл гэдгээс $\angle BRC = \angle DRC$ болох нь гарна. (Мэргэжлийн Курс-1 номны зарим үр дүнг баталгаагүй ашиглав.)

Бодлого XI-XII-3. Ялгавар нь 10-т хуваагдах 5-аар төгсөөгүй n, m натурал тоонууд өгөгдөв. Тэгвэл $n^n + m^m$ ба $n^m + m^n$ тоонуудын аль нэг нь 5^{2016} -д хуваагдах бол нөгөө тоо нь мөн хуваагдахыг батал.

Бодолт. $v_5(n - m) = k$ гэж бичье. Зэргийг өргөх леммээр $v_5(n^n - m^n) = k$ (1). $k \geq 1$ тул $n^n + m^m \equiv m^n + m^m \equiv m^n + n^m \pmod{5}$. Иймд өгсөн нөхцөлөөс $n^{n-m} \equiv m^{n-m} \equiv -1 \pmod{5}$ гэж мөрдөх бөгөөд Фермагийн бага теоремоор

$$n^{(n-m)/5^k} \equiv m^{(n-m)/5^k} \equiv -1 \pmod{5}.$$

Иймд зэргийг өргөх леммээр $n^{n-m} \equiv m^{n-m} \equiv -1 \pmod{5^{k+1}}$ болох тул

$$v_5(m^m + m^n), v_5(n^n + n^m) \geq k + 1 \quad (2).$$

Хэрэв $n^n + m^m$ нь 5^{2016} -д хуваагдах бол $n^n - m^m = n^n + m^m - (m^m + m^n)$ гэдгээс (1), (2)-оор $k \geq 2016$ болно. Иймд $m^n + n^m = n^n + n^m - (n^n - m^n)$ тэнцэлээс $m^n + n^m$ нь 5^{2016} -д хуваагдана гэж мөрдөнө. Урвуу нь мөн адилаар бодогдоно.

Бодлого XI-XII-4. Аливаа $x, y \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд $f(x^3 + y^5) = f(x)^3 + f(y)^5$ байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцыг ол.

Бодолт. $f(0) = a$ гээд $x \mapsto 0, y \mapsto 0$ гэж авахад $a = a^3 + a^5$ болно. Эндээс $a = 0$ эсвэл $a = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ болно. Аль ч тохиолдолд тогтмол $f = a$ функц шийд болох нь илт.

Одоо f тогтмол биш гэе. $x \mapsto 0$ гэвэл $f(y^5) = f(y)^5 + a^3$ болох ба $y \mapsto 0$ гэвэл $f(x^3) = f(x)^3 + a^5$ болно. Тэгэхлээр $f(x^3 + y^5) = f(x^3) + f(y^5) - a^3 - a^5$ байна. x, y тоонууд хувирахад x^3, y^5 нь дурын утга авч чадах тул

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a$$

болно. Энд $g(x) = f(x) - a$ гэж тодорхойлбол $g(x + y) = g(x) + g(y)$ болно. Эндээс ямар ч бүхэл n тооны хувьд $g(nx + y) = ng(x) + g(y)$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} f((nx + y)^3) &= g((nx + y)^3) + a \\ &= g(n^3x^3 + 3n^2x^2y + 3nxy^2 + y^3) + a \\ &= n^3g(x^3) + 3n^2g(x^2y) + 3ng(xy^2) + g(y^3) + a \end{aligned}$$

ба

$$\begin{aligned} f(nx + y)^3 + a^5 &= (g(nx + y) + a)^3 + a^5 \\ &= (ng(x) + g(y) + a)^3 + a^5 \\ &= n^3g(x)^3 + 3n^2g(x)^2(g(y) + a) + 3ng(x)(g(y) + a)^2 + (g(y) + a)^3 + a^5 \end{aligned}$$

болно. Эдгээр илэрхийллүүд нь n -ээс хамаарсан 3 зэргийн олон гишүүнтүүд ба дурын бүхэл n -ийн хувьд хоорондоо тэнцэх тул коэффициентүүд нь тэнцэх ёстой. Иймд

$$g(xy^2) = g(x)(g(y) + a)^2$$

болно. $x \mapsto 1$ гэвэл $g(y^2) = g(1)(g(y) + a)^2$ болно. Эндээс $g(x)$ монотон болох нь мөрдөх ба $g(x) = bx$ хэлбэртэй болно. Орлуулбал $bxy^2 = bx(by + a)^2$ болох ба f тогтмол биш тул $b \neq 0$ байна. Эндээс $b = \pm 1, a = 0$ болно. Иймд $f(x) = x$ эсвэл $f(x) = -x$ байна. Нөгөө талаас эдгээр функцүүд шийд болох нь илт. Ингээд нийт 5 шийдтэй.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-1. m натурал тоо ба сондгой k натурал тооны хувьд $(m)_k$ гэдгээр m тоонд хамгийн ойрхон k -д хуваагдах натурал тоог тэмдэглэв. Тэгвэл

$$\begin{cases} (6x)_5 + 4y = 508 \\ (6y)_5 - (2x)_7 = 64 \end{cases}$$

тэгшитгэлийг хангах x, y натурал тоонуудын үржвэрийн бүх утгыг ол.

Бодолт. $(6x)_5 = 508 - 4y$ гэдгээс $(6x)_5$ нь 4-т хуваагдах гэж гарах ба $(6x)_5$ нь 5-д хуваагдана гэдгээс $(6x)_5$ тэгээр төгсөнө. Иймээс y нь 2 эсвэл 7 цифрээр төгсөнө. Үүнээс $6y$ нь 20ор төгсөнө. Эндээс $(6y)_5$ тэгээр төгсөх болох ба эндээс $(2x)_7$ нь 6-аар төгсөнө гэж гарах юм. Мөн $(2x)_7$ тоо 7-д хуваагдана гэдгээс $(2x)_7 = 70t + 56$ хэлбэртэй гэж гарна. Эндээс $2x = 70t + 56$ болох ба $x = 35t + 28$ хэлбэртэй болно. $(6x)_5 = 210t + 170$ тэгээр төгсөнө гэдгээс t сондгой болно. Мөн $y = \frac{163 - 105t}{2}$ гэдгээс $t \leq 1$ болно. Иймээс $t = 1$ ганц байх цор ганц шийдтэй ба эндээс $x = 63$, $y = 32$ гэсэн шийдтэй болно. Эндээс бидний хариу 2016 болов.

Бодлого ББ-2. Самбарт 1, 2, 3, ..., 2016 тоонууд бичигджээ. Дурын 2 тоог сонгож авч арилгаад оронд нь арифметик дунжийг нь бичих үйлдэл өгөв. Энэ үйлдлээ ганц тоо үлдтэл хийсэн бол самбарт 1000 үлдсэн байж болох уу?

Бодолт. Хариу: Болно.

Эхлээд (a, b) -ээр a, b сонгож аваад арифметик дунжийн тэмдэглэе. Тэгвэл $(1,3)=2$, $(2,2)=2$, $(2,4)=3$, $(3,5)=4$, $(4,6)=5$, $(5,7)=6$, $(6,8)=7$ гэх мэт $(997, 999)=998$ болохыг хялбархан тооцож болно.

Мөн нөгөө талаас яг адилаар $(2016, 2014)=2015$, $(2015, 2015)=2015$, $(2015, 2013)=2014$, $(2014, 2012)=2013$ гэдгээс $(2003, 2001)=2002$ болохыг мөн хялбархан тооцож чадна. Одоо самбарт 998, 1000, 1002 тоонууд үлдсэн.

$(998, 1002)=1000$ болох ба одоо $(1000, 1000)=1000$ болж бодлого бодогдов.

Бодлого ББ-3. Яг нэг цифр нь 7, үлдсэн нь дан 1 байдаг 2017 оронтой зохиомол тоо дор хаяж 666 ширхэг олдоно гэж батал.

Бодолт. $\underbrace{711\dots1}_{2016}$, $\underbrace{1711\dots1}_{2015}$ гэх мэт $\underbrace{11\dots1}_{2016}7$ гэж 2017 ширхэг тоо байна. Эдгээр тоонууд дотор 2, 3, 5, 11, 13-д хуваагдах тоонууд байхгүй гэдэг нь илэрхий. Иймд 7, 17, 19, 23, 29 тоонуудад хуваагдах тоонуудын тоог сонирхоё.

1. 7-ийн цифр $6k + 1$ дугаартай байруудад байрласан үед 7-д хуваагдахыг хялбархан шалгаж болно. Өөрөөр хэлбэл, 7-д хуваагдах тоо 336 ширхэг байна.
2. 17-д хуваагдах дан 1-ээс тогтох хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{16}$ ба яг нэг ширхэг 7 ба бусад нь 1 байх хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{13}7111$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Эндээс 7-ийн цифр $16k + 4$ дугаартай байруудад байхад уг 2017 оронтой тоо 17-д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, 17-д хуваагдах тоо 125 ширхэг байна.
3. 19-д хуваагдах дан 1-ээс тогтох хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{18}$ ба яг нэг ширхэг 7 ба бусад нь 1 байх хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{13}711111$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Эндээс 7-ийн цифр $18k + 6$ дугаартай байруудад байхад уг 2017 оронтой тоо 19-д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, 19-д хуваагдах тоо 112 ширхэг байна.
4. 23-д хуваагдах дан 1-ээс тогтох хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{22}$ ба яг нэг ширхэг 7 ба бусад нь 1 байх хамгийн бага тоо $\underbrace{11\dots1}_{10}7111$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Эндээс 7-ийн цифр $22k + 4$ дугаартай байруудад байхад уг 2017 оронтой тоо 23-д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, 23-д хуваагдах тоо 91 ширхэг байна.

5. 29-д хуваагдах дан 1-ээс тогтох хамгийн бага тоо $\underbrace{11 \dots 1}_{28}$ ба яг нэг ширхэг 7 ба бусад нь 1 байх хамгийн бага тоо $\underbrace{11 \dots 1}_{24}71111$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Эндээс 7-ийн цифр $28k + 5$ дугаартай байруудад байхад уг 2017 оронтой тоо 29-д хуваагдана. Өөрөөр хэлбэл, 29-д хуваагдах тоо 69 ширхэг байна.

Эндээс давхцсан тоогоор дор хаяж $336 + 125 + 111 + 91 + 71 = 734$ ширхэг зохиомол тоо байна. Эндээс давцсан тохиолдлуудыг тооцъё.

1. $6x + 1 = 16y + 4$ шийдгүй.
2. $6x + 1 = 18y + 6$ шийдгүй.
3. $6x + 1 = 22y + 4$ шийдгүй.
4. $6x + 1 = 28y + 5$ гэдгээс $3x - 14y = 2$ ба эндээс $x = 10 + 14t$, $y = 2 + 3t$ ($t \geq 0$) хэлбэрийн тоонууд шийд болно. Өөрөөр хэлбэл 7 цифр $28(2+3t)+5$ дугаартай орон дээр байрлахад уг тоо 7 болон 29-д хуваагдана. Эндээс $28(2+3t)+5 \leq 1993$ тул $0 \leq t \leq 23$ болно.
5. $16x + 4 = 18y + 6$ гэдгээс $8x - 9y = 1$ ба эндээс $x = 8 + 9t$, $y = 7 + 8t$ ($t \geq 0$) хэлбэрийн тоонууд шийд болно. Өөрөөр хэлбэл 7 цифр $18(7+8t)+6$ дугаартай орон дээр байрлахад уг тоо 17 болон 19-д хуваагдана. Эндээс $18(7+8t)+6 \leq 2004$ тул $0 \leq t \leq 13$ болно.
6. $16x + 4 = 22y + 4$ гэдгээс $8x = 11y$ ба эндээс $x = 11t$, $y = 8t$ ($t \geq 0$) хэлбэрийн тоонууд шийд болно. Өөрөөр хэлбэл 7 цифр $16 \cdot 11t + 4$ дугаартай орон дээр байрлахад уг тоо 17 болон 23-д хуваагдана. Эндээс $16 \cdot 11t + 4 \leq 2004$ тул $0 \leq t \leq 11$ болно.
7. $16x + 4 = 28y + 5$ шийдгүй.
8. $18x + 6 = 22y + 4$ гэдгээс $11y - 9x = 1$ ба эндээс $x = 6 + 11t$, $y = 5 + 9t$ ($t \geq 0$) хэлбэрийн тоонууд шийд болно. Өөрөөр хэлбэл 7 цифр $18(6+11t)+6$ дугаартай орон дээр байрлахад уг тоо 19 болон 23-д хуваагдана. Эндээс $18(6+11t)+6 \leq 2004$ тул $0 \leq t \leq 9$ болно.
9. $18x + 6 = 28y + 5$ шийдгүй.
10. $22x + 4 = 28y + 5$ шийдгүй.

Эндээс $734 - 24 - 13 - 12 - 10 = 675$ болж дор хаяж 666 ширхэг зохиомол тоо байх нь батлагдав.

Бодлого ББ-4. 3×6 хүснэгтийн нүднүүдийг 3 өнгөөр будав. Хүснэгтийг 1×3 ба 3×1 дүрсүүдэд аль ч дүрсний гурван нүд гурвуулаа ялгаатай өнгөөр будагдсан байхаар хувааж болдог бол уг будалтыг *сайн* будалт гээ. *Сайн* будалтын тоог ол.

Чөлөөт ангилал

Бодлого Ч-1. Натурал тоон олонлогийг $\mathbb{N}$ гээ. Дурын $m, n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(m) + f(n) - mn$ тоо тэгээс ялгаатай бөгөөд $mf(m) + nf(n)$ тоог хуваадаг байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. Хариу: $f(n) = n^2$. Дурын n, m натурал тоонуудын хувьд

$$f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n)$$

гэж өгөгдсөн. $m = n = 1$ гэвэл $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$ болох ба эндээс $2f(1) - 1 \mid 2f(1) - (2f(1) - 1) = 1$ болно. Иймд $f(1) = 1$.

$p \geq 7$ анхны тоо байг. $m = p, n = 1$ гэвэл $f(p) - p + 1 \mid pf(p) + 1$ гэдгээс

$$f(p) - p + 1 \mid pf(p) + 1 - p(f(p) - p + 1) = p^2 - p + 1$$

болно. Хэрэв $f(p) - p + 1 = p^2 - p + 1$ бол $f(p) = p^2$ болно. Хэрэв $f(p) - p + 1 \neq p^2 - p + 1$ бол $p^2 - p + 1$ нь сондгой натурал тоо тул $p^2 - p + 1 \geq 3(f(p) - p + 1)$ буюу

$$f(p) \leq \frac{1}{3}(p^2 + 2p - 2)$$

байна. $f(p) \geq 1$ ба $p \geq 7$ тул

$$-p^2 < 2f(p) - p^2 \leq \frac{2}{3}(p^2 + 2p - 2) - p^2 < -p \quad (*)$$

болно. $m = n = p$ гэвэл $2f(p) - p^2 \mid 2pf(p)$ гэдгээс

$$2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) - p(2f(p) - p^2) = p^3$$

болж $(*)$ -ийг зөрчнө. Иймд $p \geq 7$ анхны тооны хувьд $f(p) = p^2$ байна.

Одоо n -ийг бэхлээд p -г хангалттай том анхны тоо гэе. $m = p$ гэвэл

$$f(p) + f(n) - pn \mid pf(p) + nf(n) - n(f(p) + f(n) - pn) = pf(p) - nf(p) + pn^2$$

болно. $f(p) = p^2$ гэдгээс $p^2 - pn + f(n) \mid p(p^2 - pn + n^2)$ болно. p хангалттай том тул $f(n)$ -ийг хуваахгүй гэж үзэж болно. Тэгвэл $\gcd(p, p^2 - pn + f(n)) = 1$ болно. Иймд

$$p^2 - pn + f(n) \mid p^2 - pn + n^2 - (p^2 - pn + f(n)) = n^2 - f(n)$$

байна. Энд $n^2 - f(n)$ бэхлэгдсэн ба p дурын тул $f(n) = n^2$ байхаас өөр аргагүй.

Эцэст нь $f(n) = n^2$ функцийн хувьд

$$f(m) + f(n) - mn = m^2 + n^2 - mn \mid (m + n)(m^2 + n^2 - mn) = m^3 + n^3 = mf(m) + nf(n)$$

тул $f(n) = n^2$ функц бодлогын нөхцөл хангана.

Бодлого Ч-2. Дурын бодит $x \in \mathbb{R}$ тооны хувьд

$$\sum_{k=1}^{2016} \frac{\cos(kx)}{k^2} \geq -\frac{\pi^2}{12}$$

гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $n \geq 1$ хувьд

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2}, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$$

гэе. Тэгвэл $C'_n(x) = -S_n(x)$ байна.

Одоо $0 < x < \pi$ хувьд $S_n(x) > 0$ гэж баталъя. $n = 1$ үед илэрхий. $n \geq 2$ үед $0 < x < \pi$ дээр $S_{n-1}(x) > 0$ байдаг гэж үзээд $S_n(u) = \min S_n(x)$, $0 < u < \pi$ гэе. $u = 2v$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} S'_n(u) &= \sum_{k=1}^n \cos(2kv) \\ &= \frac{\sin((2n+1)v) - \sin(v)}{2\sin(v)} \\ &= \frac{\cos((n+1)v) \sin(nv)}{\sin(v)} \end{aligned}$$

тул $\sin(nv) = 0$ эсвэл $\cos((n+1)v) = 0$ байна.

Хэрэв $\sin(nv) = 0$ бол $\sin(nu) = 0$ болох ба эндээс индукцийн өмнөх алхамаар $S_n(u) = S_{n-1}(u) > 0$ болно.

Одоо $\cos((n+1)v) = 0$ гэе. Тэгвэл

$$\sin(nu) - \sin(u) = 2\sin((n-1)v)\cos((n+1)v) = 0$$

болно. Иймд мөн индукцийн өмнөх алхамаар $S_n(u) = S_{n-1}(u) + \frac{\sin(u)}{n} > 0$ байна.

Одоо $\pi < x < 2\pi$ хувьд $y = 2\pi - x$ гэвэл $0 < y < \pi$ ба $S_n(x) = S_n(2\pi - y) = -S_n(y) < 0$ болно. Иймд $C_n(x)$ функц $x = \pi$ цэг дээр хамгийн бага утгаа авах ба 2016 нь тэгш тул

$$C_{2016}(x) \geq C_{2016}(\pi) = \sum_{k=1}^{2016} \frac{(-1)^k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

болж бодлого бодогдоно.

Бодлого Ч-3. G бүлэг гэе. Ямар нэг зэрэг нь G -ийн коммутатор дэд бүлэгт ордог элементүүдийн олонлог дэд бүлэг болно гэж харуул. Энд G -ийн коммутатор дэд бүлэг нь $ghg^{-1}h^{-1}$ ($g, h \in G$) хэлбэртэй элементүүдээр төрөгдсөн дэд бүлэг.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. G -ийн коммутатор дэд бүлгийг $H = [G, G]$ гэвэл

$$\text{дурын } g \in G \text{ хувьд } gHg^{-1} = H$$

буюу өөрөөр хэлбэл H нь G -ийн нормаль дэд бүлэг болохыг саная.

Одоо дурын $n \geq 1$ ба $g, h \in G$ хувьд $(gh)^n g^{-n} h^{-n} \in H$ болохыг индукцээр баталъя.

$n = 1$ үед H -ийн тодорхойлолтоос илэрхий.

$n \geq 1$ ба $(gh)^n g^{-n} h^{-n} \in H$ гэе. H нормаль тул $(gh)((gh)^n g^{-n} h^{-n})(gh)^{-1} \in H$ болох ба эндээс

$$[(gh)((gh)^n g^{-n} h^{-n})(gh)^{-1}] [g(h^{n+1}g^{-1})g^{-1}(h^{n+1}g^{-1})^{-1}] \in H$$

буюу $(gh)^{n+1}g^{-n-1}h^{-n-1} \in H$ байна.

Одоо $g^n \in H$, $h^m \in H$ гэе. Тэгвэл $(gh)^{nm} \in H$ болно.

Нэмэлт: $T(G) = \{g \in G \mid \text{ямар нэг } n \text{ хувьд } g^n \in [G, G]\}$ гэе. G абелийн үед $[G, G] = 0$ тул $T(G)$ нь G -ийн torsion дэд бүлэг болно. Ерөнхий тохиолдолд $A = G/[G, G]$ нь абелийн бүлэг болох $T(G) = \pi^{-1}(T(A))$ болно, энд $\pi: G \rightarrow A$ нь ноогдвор буулгалт.

Бодлого Ч-4. Зарим нүд нь будагдсан $2n \times 2n$ хүснэгтийг 1×2 ба 2×1 дүрсүүдэд хуваав. Аль ч дүрс нь хоёр будагдсан нүднээс тогтдоггүй бол уг хуваалтыг *сайн* хуваалт гэе. Сайн хуваалт цор ганц олддог байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн нүдийг будаж болох вэ?

Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын III Даваа

Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын III даваа 2017 оны 3 сарын 30, 31 өдрүүдэд амжилттай зохион байгуулагдлаа.

Бодлогууд

VII анги

Бодлого VII-1. Дараах тэнцэтгэл биелэхээр $*$ -нуудын оронд 1, 2, ..., 9 цифрүүдийг байрлуул. Цифр бүрийг яг нэг удаа ашиглана.

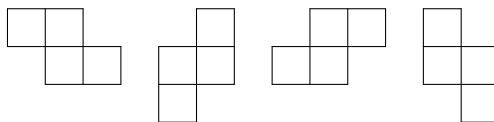
$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} = *$$

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-2. 2017-г аль ч хоёр нь харилцан анхны биш гурван ширхэг натурал тооны нийлбэрт задалж болох уу.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-3. Хүснэгтэд дотор байрлах зурагт үзүүлсэн хэлбэртэй 4 нүдтэй ямар ч дүрсэд сондгой тооны нүд тэмдэглэсэн байхаар 9×9 хэмжээтэй хүснэгтийн хамгийн цөөндөө хэдэн нүдийг тэмдэглэж болох вэ?



(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-4. Волейболын тэмцээнд 8 баг оролцож хоорондоо тойргоор тогложээ (нэг тоглолтод хожсон баг 1 оноо, хожигдсон баг 0 оноо авна.) Тэмцээний дараа A, B багуудын авсан нийт оноо, C, D багуудын авсан нийт оноотой тэнцүү байх A, B, C, D багууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

VIII анги

Бодлого VIII-1. Хүүхдийн зуслан 6 сарын 10-наас 8 сарын 31 хүртэл амрагчид хүлээн авдаг бөгөөд сурагчид ямар ч өдөр очиж, 14 хоног амраад буцдаг байв. Энэ зусланд нэг ангийн 26 сурагч нэг, нэг удаа очиж амарчээ. Ангийн сурагчдын аль нэг 6 нь зуслан дээр нэг өдөр хамт амарсан гэдгийг харуул. (6 сар 30 хоногтой, харин 7 ба 8 сар 31 хоногтой).

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VIII-2. 1-ээс k хүртэлх бүх натурал тоог ямар нэгэн дарааллаар ар араас нь залгуулан байрлуулахад үүсэх олон оронтой тоог k -сэлгэмэл тоо гэж нэрлэе. Хоёр k -сэлгэмэл тооны нийлбэр 10-ийн зэрэгт тоо байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого VIII-3. Талууд нь бүхэл тоон урттай дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. Хэрэв аль ч талын урт нь үлдсэн гурван талынхаа уртуудын нийлбэрийг хуваадаг бол ижил урттай 2 тал олдохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодлого VIII-4. $a_1 < a_2 < \dots < a_{53}$ байх натурал $a_1, a_2, \dots, a_{53}$ тоонууд өгөгджээ. $i < j$ байх ямар ч i, j дугаарын хувьд $a_j - a_i$ ялгавар ба $a_i + a_j$ нийлбэрийн ядаж нэг нь өгөгдсөн тоонуудын аль нэгтэй тэнцдэг байв. Ямар ч i дугаарын хувьд $a_i = i \cdot a_1$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сандагдорж)

IX анги

Бодлого IX-A1. VIII-1

Бодлого IX-A2. 2017×2017 хүснэгтийн нүднүүдэд сондгой бүхэл тоонууд бичжээ. Хүснэгтийн i -р мөрөнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг m_i гэж, j -р баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг n_j гэж тэмдэглэвэл

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{2017} + n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{2017} = 0$$

байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал, Т. Базар)

Бодлого IX-A3. ABC гурвалжны B оройг AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргаж B' цэгийг, C оройг AB шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргаж C' цэгийг байгуулжээ. BC' ба $B'C$ шулуунууд D цэгт огтлолцдог бол AD шулуун дээр ABC гурвалжны багтаасан тойргийн төв оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого IX-B1. ABC гурвалжны BC тал дээр орших D цэгийг дайрсан гурвалжны BM , CN медиантай параллель шулуунууд AC , AB талуудыг харгалзан E , F цэгүүдэд огтолно. EF хэрчим нь BM , CN медиануудтай огтлолцох цэгүүдээр 3 тэнцүү хэсэгт хуваагдахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B2. k натурал тоо. $1, 2, \dots, k$ тоонуудыг хоёр хэсэгт яаж ч хуваахад, аль нэг хэсэгт нь $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ ноогдвор бүхэл байх ялгаатай a, b тоонууд олддог байв. k -ийн байж болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого IX-B3. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд $a^3 + c(b+c)^2 \geq 4abc$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

X анги

Бодлого X-A1. Нүднүүд нь шатрын хөлөг шиг хар, цагаан өнгөөр алаглан будагдсан 20×20 хэмжээтэй хөлгийн яг 150 ширхэг нүдний өнгийг эсрэгээр нь өөрчилж буджээ (харыг цагаанаар, цагааныг хараар будна). Тэгэхэд хөлгийн мөр багана бүрд ижил тооны хар өнгөтэй нүд байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-A2. m, n нь үржвэр нь бүтэн квадрат байх ялгаатай натурал тоонууд бол

$$(m - n)^2 + 1 \geq 2(m + n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого X-A3. $AB < BC$ талуудтай хурц өнцөгт ABC гурвалжны BD өндрийг татжээ. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O бөгөөд D цэгийг дайрсан CO шулуунтай параллель шулуун BO шулуунтай K цэгт огтлолцоно. K цэг нь гурвалжны BC талтай параллель дундаж шугамын үргэлжлэл дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-B1. $\angle B = 90^\circ$ өнцөгтэй тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AB катет дээр N цэг, BC катет дээр M цэгийг сонгон авчээ. MN шулуун дээр D цэгийг $MN = ND$ байхаар сонгон авчээ. Хэрэв $\angle DAN = \angle ACB$ бол $\angle BAM = \angle ACD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого X-B2. Ямар ч натурал a, b, c тоонуудын хувьд

$$[a, b] + [b, c] + [c, a]$$

хэлбэртэй бичигддэггүй бүх натурал тоог ол. Энд $[m, n]$ -ээр m, n тоонуудын хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-B3. $11^n + n^2 + 71 = m^2$ байх бүх натурал m, n тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

XI анги**Бодлого XI-A1. X-A2****Бодлого XI-A2. X-A3****Бодлого XI-A3.** $1 \leq k \leq 100$ байх ямар ч k тооны хувьд

$$aa_k = 101 - k$$

байх $1, 2, \dots, 100$ тоонуудын хэдэн ялгаатай $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ сэлгэмэл олдох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-B1. $1 \leq k \leq n$ байх натурал n, k тоонууд өгчээ. Нийлбэр нь $2n - 1$ байдаг n ширхэг натурал тооноос нийлбэр нь k байх хэдэн тоог сонгож болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XI-B2. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I , гурвалжны BC талыг шүргэдэг гадаад багтсан тойргийн төв I' байг. AI шулуун BC талыг D цэгт огтлох бөгөөд D цэгийг дайрсан AI шулуунаас ялгаатай шулуун ABC гурвалжны багтаасан тойргийг M, N цэгт огтолно. I, I', M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого XI-B3. $m > n > 2$ үед $\frac{a^m + a^n + 1}{a^3 + a^2 + 1}$ ноогдвор бүхэл байх зөвхөн төгсгөлөг тооны натурал a тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

XII анги**Бодлого XII-A1.** $(2017^2)!$ нь $(2017!)^n$ -д хуваагддаг байх хамгийн их натурал n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XII-A2. XI-A3**Бодлого XII-A3.** $a, b, c > 0$ бол

$$\frac{7}{1+a} + \frac{9}{1+a+b} + \frac{36}{1+a+b+c} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XII-B1. XI-B1**Бодлого XII-B2. XI-B3****Бодлого XII-B3.** Ω тойрогт багтсан ABC гурвалжин өгөгджээ. Гурвалжны AB, AC талыг шүргэдэг тойрог Ω тойргийг D цэгт шүргэдэг байв. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бөгөөд CI шулуун Ω тойргийг M цэгт, BI шулуун Ω тойргийг N цэгт тус тус дахин огтолно. DI шулуун MN хэрчмийг огтлолын цэгээрээ хагаслан хуваана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Дэс дараалсан 17 ширхэг натурал тоо өгөгджээ. Эдгээр тоонуудын аль нэг хоёрын үржвэр нь үлдсэн 15 тооны нийлбэрийн $\frac{1}{3}$ -тэй тэнцүү байв. Өгөгдсөн тоонуудаас хамгийн бага тоо нь хэд байх боломжтой вэ?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодлого ББ-А2. IX-A2**Бодлого ББ-А3. VII-4**

Бодлого ББ-Б1. Эхнийх нь 50% хөнгөн цагаан, 15% зэс, 35% магни, хоёр дахь хайлшийн 40% зэс, 60% магни, гурав дахь хайлшийн 40% хөнгөн цагаан, 60% нь магни агуулдаг гурван хайлш байжээ. Эдгээрээс 20% нь зэс байх шинэ хайлшийг гаргахад уг хайлшид хөнгөн цагаан хамгийн ихдээ болон хамгийн багадаа хэдэн хувь агуулагдах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б2. Уутанд 2017 хар, 2017 цагаан бөмбөг байв. Баяраа нэг үйлдлээр уутнаас 3 бөмбөг авч, оронд нь 2 бөмбөг хийнэ. Хэрэв авсан бөмбөг нь

- 3 хар бол оронд нь 1 хар 1 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 2 хар 1 цагаан бол оронд нь 2 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 1 хар 2 цагаан бол оронд нь 1 хар 1 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 3 цагаан бол оронд нь 2 хар бөмбөг хийнэ.

Баяраа энэ үйлдлээ 3 бөмбөг үлдтэл хийхэд ямар өнгийн бөмбөгнүүд үлдэж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б3. Нэгэн сургуулийн сурагчид 92 төрлийн дугуйланд хамрагддаг байжээ. Дугуйлан бүрд яг 10 сурагч явдаг бөгөөд аль ч 2 дугуйланг авахад яг нэг сурагч хоёуланд нь хамрагддаг байв.

- (i) Дор хаяж 11 төрлийн дугуйланд явдаг сурагч олдохыг батал.
- (ii) Сургууль дор хаяж 829 сурагчтай гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Дунд ангийн багш**Бодлого ДБ-А1. XII-A1****Бодлого ДБ-А2. XII-A3**

Бодлого ДБ-А3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , BE өндрүүдийг татжээ. AD , BE диаметртай тойргууд X , Y цэгт огтлолцдог бол $\angle ACX = \angle BCY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа, Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-Б1. $P(x)^2 = Q(x)^3 + 1$ нөхцөлийг хангах бодит коэффициенттой $P(x)$, $Q(x)$ олон гишүүнтүүд нь зөвхөн тогтмол олон гишүүнтүүд гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого ДБ-Б2. Долоон одойн өндөр бүгд ялгаатай. Тэд өдөр бүр жагсаалаар ажилдаа явдаг бөгөөд өндөр нь өсөх дарааллаар зогссон дараалсан 3 одой байж болохгүй дүрэмтэй (буурах дараалалтай зогссон 3 одой байж болно). Тэд өдөр бүр өөр өөр дарааллаар ажилдаа явдаг бол хамгийн олондоо хэдэн өдөр ажилдаа явж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар, Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-Б3. $3^n + 5^n$ нийлбэр нь $n^2 - 25$ ялгаварт хуваагддаг $n > 5$ байх натурал n тоо олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолтууд**VII анги**

Бодлого VII-1. Дараах тэнцэтгэл биелэхээр $*$ -нуудын оронд 1, 2, ..., 9 цифрүүдийг байрлуул. Цифр бүрийг яг нэг удаа ашиглана.

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} + \frac{*}{*} = *$$

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Олон янзаар байрлуулж болно. Жишээлбэл:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{7}{2} + \frac{4}{8} = 5, \quad \frac{2}{1} + \frac{9}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{8} = 7, \quad \frac{7}{4} + \frac{2}{8} + \frac{5}{1} + \frac{6}{3} = 9.$$

Бодлого VII-2. 2017-г аль ч хоёр нь харилцан анхны биш гурван ширхэг натурал тооны нийлбэрт задалж болох уу.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

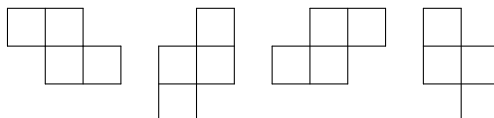
Бодолт. Хариу: Болно.

Нэгээс их x , y , z тоонуудын хувьд xy , yz , zx тоонууд хос хосоороо харилцан анхны биш юм. $xy + yz + zx = 2017$ тэгшитгэлийн $z = 2$ байх шийдийг хайя. $xy + 2x + 2y = 2017$

тэгшитгэлийг $(x+2)(y+2) = 2021 = 41 \cdot 47$ гэж бичвэл $x = 41, y = 45$ гэсэн шийд олдоно. Тэгэхлээр $41 \cdot 45 + 41 \cdot 2 + 45 \cdot 2 = 2017$ гэж задалж болно. Өөр хялбар жишээнүүд:

$$10 + 12 + 1995 = 2017, \quad 12 + 15 + 1990 = 2017.$$

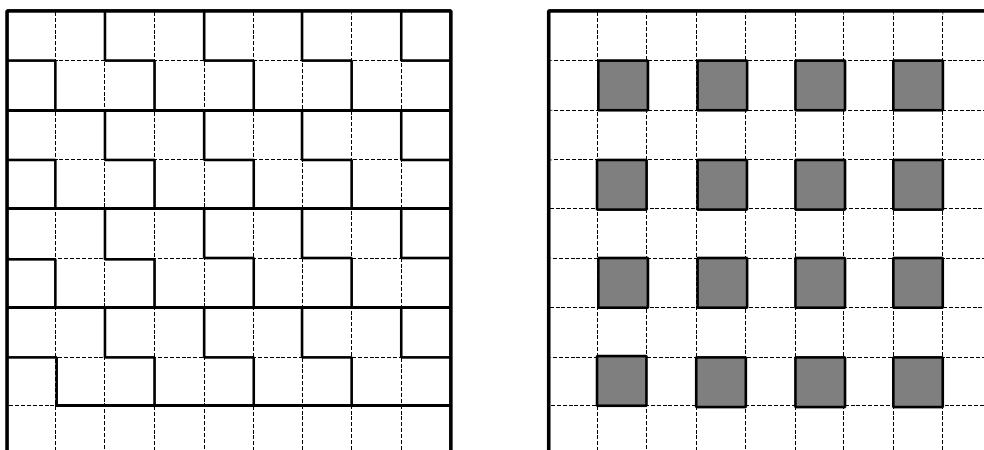
Бодлого VII-3. Хүснэгтэд дотор байрлах зурагт үзүүлсэн хэлбэртэй 4 нүдтэй ямар ч дүрсэд сондгой тооны нүд тэмдэглэсэн байхаар 9×9 хэмжээтэй хүснэгтийн хамгийн цөөндөө хэдэн нүдийг тэмдэглэж болох вэ?



(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: 16 нүд.

Дүрс дотор сондгой тооны тэмдэглэгдсэн нүд байх тул ядаж нэг нүд заавал тэмдэглэгдсэн байх ёстой. Эхний зурагт үзүүлсэн 16 дүрсэд тус бүр ядаж нэг нүд тэмдэглэх ёстой гэдгээс тэмдэглэгдсэн нүдний тоо дор хаяж 16 гэж гарна. Дараагийн зурагт үзүүлсэн 16 нүдийг тэмдэглэхэд дүрсийг яаж ч байрлуулахад уг дүрсэд яг нэг ширхэг тэмдэглэгдсэн нүд байна.



Бодлого VII-4. Волейболын тэмцээнд 8 баг оролцож хоорондоо тойргоор тогложээ (нэг тоглолтод хожсон баг 1 оноо, хожигдсон баг 0 оноо авна.) Тэмцээний дараа A, B багуудын авсан нийт оноо, C, D багуудын авсан нийт оноотой тэнцүү байх A, B, C, D багууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Тэмцээний дараа багууд $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq a_7 \geq a_8$ оноотой байсан гэж үзээд

$$a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_5, a_5 - a_6, a_6 - a_7, a_7 - a_8$$

гэсэн 7 ялгаврыг сонирхье. Эдгээр ялгаврын нийлбэр $a_1 - a_8$ бөгөөд хамгийн ихдээ $8 - 0 = 8$ байж болно. Нөгөө талаас, хэрэв энэ 7 ялгаварт 3 ижил тоо олдохгүй бол нийлбэр нь хамгийн багадаа $2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9$ байх ёстой. Иймд эдгээр ялгавруудад 3 ижил ялгавар олдоно. Тэр ижил ялгаврууд $m < n < k$ үед $a_m - a_{m+1} = a_n - a_{n+1} = a_k - a_{k+1}$ болог. $m < n < k$ гэдгээс $a_m, a_{m+1}, a_k, a_{k+1}$ оноотой багууд хоорондоо ялгаатай бөгөөд $a_m + a_{k+1} = a_{m+1} + a_k$ тул бодлогын нөхцөлийг хангана.

VIII анги

Бодлого VIII-1. Хүүхдийн зуслан 6 сарын 10-наас 8 сарын 31 хүртэл амрагчид хүлээн авдаг бөгөөд сурагчид ямар ч өдөр очиж, 14 хоног амраад буцдаг байв. Энэ зусланд нэг ангийн 26 сурагч нэг, нэг удаа очиж амарчээ. Ангийн сурагчдын аль нэг 6 нь зуслан дээр нэг өдөр хамт амарсан гэдгийг харуул. (6 сар 30 хоногтой, харин 7 ба 8 сар 31 хоногтой).

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. 6 сарын 10-наас 8 сарын 31-нийг дуустал нийт $21 + 31 + 31 = 83$ хоног бий. Амралтын хоногуудаа эхнээс нь 1, 2, ..., 83 гэж, сурагчдаа амралтад ирсэн дарааллаар нь 1, 2, ..., 26 гэж дугаарлаад, k -р хүүхэд амралтад a_k -р хоногоос эхлэн $(a_k + 13)$ -р хоногийг дуустал амарсан гэж үзье. Тэгвэл $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{26} \leq 70$ байх ёстой. Хэрэв $a_{k+5} \leq a_k + 13$ бол $k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5$ сурагчид бүгд ядаж нэг өдөр хамт амарсан байна. Эсрэгээс нь, нэг өдөр хамт амарсан 6 сурагч байхгүй бол

$$a_6 \geq a_1 + 14, \quad a_{11} \geq a_6 + 14, \quad a_{16} \geq a_{11} + 14, \quad a_{21} \geq a_{16} + 14, \quad a_{26} \geq a_{21} + 14$$

байх ёстой. Эндээс $a_{26} \geq a_1 + 70$ гэж гарах бөгөөд $a_1 \geq 1$ учраас энэ нь $a_{26} \leq 70$ гэдэгт зөрчинө.

Бодлого VIII-2. 1-ээс k хүртэлх бүх натурал тоог ямар нэгэн дарааллаар ар араас нь залгуулан байрлуулахад үүсэх олон оронтой тоог k -сэлгэмэл тоо гэж нэрлэе. Хоёр k -сэлгэмэл тооны нийлбэр 10-ийн зэрэгт тоо байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. Хоёр k -сэлгэмэл тооны нийлбэр 10-ийн зэрэгт гардаг байг. Тэгвэл уг 2 тооны цифрүүдийн нийлбэр ижил байна гэдгээс 9-д хуваахад гарах үлдэгдлүүд нь бас ижил байна. 10-ийн зэрэгтийг 9-д хуваахад үргэлж 1 үлдэгдэл өгөх учраас k -сэлгэмлийг 9-д хуваагаад гарах үлдэгдэл нь 5 байх хэрэгтэй. Гэтэл 1, 2, ..., k тоонуудыг 9-д хуваагаад гарах үлдэгдлүүд нь 1, 2, ..., 8, 0, 1, 2, ..., 8, 0, 1, ... гэсэн дарааллаар явах учир k -сэлгэмлийн цифрүүдийн нийлбэр 1, 3, 6, 1, 6, 3, 1, 0, 0, 1, 3, 6, 1, ... гэх мэтээр үелэх ба эдгээрээс өөр нийлбэр гарахгүй нь харагдаж байна. Иймд үлдэгдэл 5 гарахгүй учраас нийлбэр нь 10-ийн зэрэгт гарахгүй.

Бодлого VIII-3. Талууд нь бүхэл тоон урттай дөрвөн өнцөгт өгөгдөв. Хэрэв аль ч талын урт нь үлдсэн гурван талынхаа уртуудын нийлбэрийг хуваадаг бол ижил урттай 2 тал олдохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

Бодолт. Эсрэгээс нь бүх талуудынх нь урт ялгаатай байдаг гэж үзье. Дөрвөн өнцөгтийн талын уртуудыг a, b, c, d гээд нийлбэрийг нь $n = a + b + c + d$ гэж тэмдэглэе. Бодлогын нөхцөлөөс a, b, c, d нь n -ийг хуваах ба эндээс

$$x = \frac{n}{a}, \quad y = \frac{n}{b}, \quad z = \frac{n}{c}, \quad u = \frac{n}{d}$$

ноогдворууд бүхэл тоонууд байна.

Дөрвөн өнцөгтийн талуудын уртууд ялгаатай учир $a < b < c < d$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $x > y > z > u$ болно.

Дөрвөн өнцөгтөө нэг диагоналиар нь хоёр гурвалжинд хуваан гурвалжны тэнцэтгэл биш давтан ашиглавал $a + b + c > d$ болно. Нөгөө талаас $a < d, b < d, c < d$ тул $a + b + c < 3d$

болно. Иймд $a + b + c = 2d$ байна. Эндээс $a + b + c + d = 3d$ буюу $u = 3$ болно. Иймд $z \geq 4$, $y \geq 5$, $x \geq 6$ байна. Эндээс

$$2d = a + b + c = \frac{3d}{x} + \frac{3d}{y} + \frac{3d}{z} \leq \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)3d = \frac{37}{20}d < 2d$$

болж зөрчил гарна. Иймд ижил урттай хоёр тал олдоно.

Бодлого VIII-4. $a_1 < a_2 < \dots < a_{53}$ байх натурал $a_1, a_2, \dots, a_{53}$ тоонууд өгөгджээ. $i < j$ байх ямар ч i, j дугаарын хувьд $a_j - a_i$ ялгавар ба $a_i + a_j$ нийлбэрийн ядаж нэг нь өгөгдсөн тоонуудын аль нэгтэй тэнцдэг байв. Ямар ч i дугаарын хувьд $a_i = i \cdot a_1$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сандагдорж)

Бодолт. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{53}\}$ гэе. $1 \leq k \leq 52$ хувьд $a_{53} + a_k > a_{53}$ тул $a_{53} + a_k$ нийлбэр A -д орж чадахгүй. Иймд $a_{53} - a_k$ ялгавар A -д орно. Эндээс

$$a_{53} - a_{52} < a_{53} - a_{51} < \dots < a_{53} - a_1 < a_{53}$$

жагсаалт нь A -д ордог 53 тоог багаас нь их рүү нь жагсаан бичсэн байгаа тул $a_1 < a_2 < \dots < a_{53}$ жагсаалттай давхцана. Өөрөөр хэлбэл, $1 \leq k \leq 52$ хувьд $a_{53} - a_{53-k} = a_k$ байна.

$2 \leq k \leq 51$ хувьд $a_{52} + a_k > a_{52} + a_1 = a_{53}$ тул $a_{52} + a_k$ нийлбэр A -д орохгүй. Иймд $a_{52} - a_k$ ялгавар A -д орох ёстой. Мөн $a_{52} - a_2 = (a_{53} - a_1) - (a_{53} - a_{51}) = a_{51} - a_1 < a_{51}$ байна. Одоо

$$a_{52} - a_{51} < a_{52} - a_{50} < \dots < a_{52} - a_2 < a_{51} < a_{52} < a_{53}$$

жагсаалтыг авч үзвэл дээрхтэй нэгэн адилаар $2 \leq k \leq 51$ хувьд $a_{52} - a_{52-k} = a_k$ болно. Иймд $1 \leq k \leq 51$ хувьд

$$a_{k+1} = a_{53} - a_{53-(k+1)} = a_1 + a_{52} - a_{52-k} = a_1 + a_k$$

болно. $k = 52$ үед $a_{k+1} = a_1 + a_k$ болохыг харсан. Иймд индукцээр ямар ч k дугаарын хувьд $a_k = ka_1$ болно.

IX анги

Бодлого IX-A1. VIII-1

Бодлого IX-A2. 2017×2017 хүснэгтийн нүднүүдэд сондгой бүхэл тоонууд бичжээ. Хүснэгтийн i -р мөрөнд бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг m_i гэж, j -р баганад бичигдсэн тоонуудын нийлбэрийг n_j гэж тэмдэглэвэл

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{2017} + n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{2017} = 0$$

байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал, Т. Базар)

Бодолт. Хариу: Болохгүй.

$M = m_1 m_2 \cdots m_{2017}$, $N = n_1 n_2 \cdots n_{2017}$ гэе. Хүснэгтэд бичигдсэн бүх тооны нийлбэрийг S гэвэл

$$S = m_1 + m_2 + \cdots + m_{2017} = n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{2017}$$

байна. m_i, n_i ($1 \leq i \leq 2017$) нь 2017 ширхэг сондгой тооны нийлбэр тул мөн сондгой тоо байна. Иймд 4 модулиар ± 1 утга авна.

$m_i \equiv -1 \pmod{4}$ байх дугаарын тоог r гээд, $n_i \equiv -1 \pmod{4}$ байх дугаарын тоог c гэе. Тэгвэл $m_i \equiv 1 \pmod{4}$ байх дугаарын тоо $2017 - r$, харин $n_i \equiv 1 \pmod{4}$ байх дугаарын тоо $2017 - c$ байх ба

$$S \equiv (2017 - r) - r \equiv (2017 - c) - c \pmod{4}$$

тул $r \equiv c \pmod{2}$ байна. Иймд

$$M \equiv 1^{2017-r} (-1)^r \equiv (-1)^r \pmod{4}$$

$$N \equiv 1^{2017-c} (-1)^c \equiv (-1)^c \pmod{4}$$

гэдгээс $M \equiv N \equiv \pm 1 \pmod{4}$ гэж гарна. Эндээс $M + N \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{4}$ болж бодлого бодогдов.

Бодлого IX-A3. ABC гурвалжны B оройг AC шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргаж B' цэгийг, C оройг AB шулууны хувьд тэгш хэмтэй хувиргаж C' цэгийг байгуулжээ. BC' ба $B'C$ шулуунууд D цэгт огтлолцдог бол AD шулуун дээр ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв оршихыг батал.

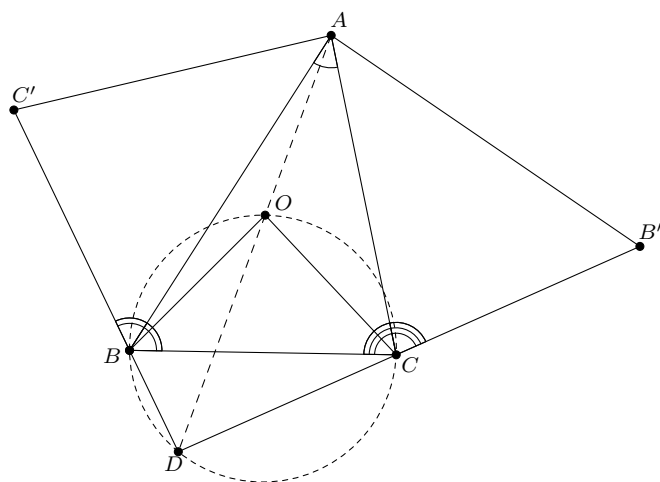
(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт I.

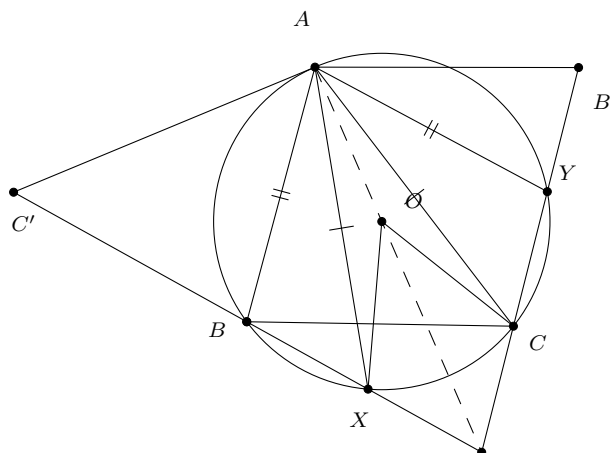
ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төвийг O гэе. Оройн өнцгүүдийг $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл тэгш хэмийн нөхцөл ёсоор $\angle CBD = 180^\circ - 2\beta$ ба $\angle BCD = 180^\circ - 2\gamma$ болно. Эндээс

$$\begin{aligned} \angle BDC &= 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\gamma) \\ &= 180^\circ - 2\alpha \end{aligned}$$

болно. Нөгөө талаас $\angle BOC = 2\alpha$ болохыг санавал $BOCD$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Иймд $\angle COD = \angle CBD = 180^\circ - 2\beta$ ба $\angle AOC = 2\beta$ гэдгээс A, O, D нь нэг шулуун дээр байх нь батлагдав.



Бодолт II. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг ω гэе. BC' шулуун ω тойргийг дахин X цэгээр, $B'C$ шулуун ω тойргийг дахин Y цэгээр огтлолцдог гэе. Тэгш хэмийн нөхцөл ёсоор $\angle YCA = \angle ACB$ тул $AY = AB$ байна. $\angle ACX = \angle ABC' = \angle ABC = \angle AXC$ тул $AC = AX$ болно. Эндээс $BYCX$ нь адил хажуут трапец болох тул $DX = DC$ болно. Одоо $AX = AC$, $OX = OC$, $DX = DC$ тул A, O, D нь нэг шулуун дээр байх нь батлагдав.



Бодлого IX-Б1. ABC гурвалжны BC тал дээр орших D цэгийг дайрсан гурвалжны BM , CN медиантай параллель шулуунууд AC , AB талуудыг харгалзан E , F цэгүүдэд огтолно. EF хэрчим нь BM , CN медиануудтай огтлолцох цэгүүдээр 3 тэнцүү хэсэгт хуваагдахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт.

EF хэрчим BM медиантай P цэгт огтлолцдог болог. AFE гурвалжны BPM огтлогчийн хувьд Менелайн теорем бичвэл

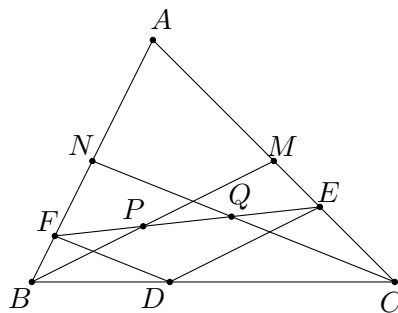
$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FP}{PE} \cdot \frac{EM}{MA} = 1$$

гэж гарна. Энд $\frac{AB}{BF} = 2 \cdot \frac{BN}{BF}$ бөгөөд $DF \parallel CN$ тул Фалесын

теоремоор $\frac{BN}{BF} = \frac{BC}{BD}$ байна. Нөгөө талаас, $\frac{EM}{MA} = \frac{EM}{MC}$

бөгөөд $DE \parallel BM$ тул Фалесын теоремоор $\frac{EM}{MC} = \frac{BD}{BC}$ юм.

Олсон 2 харьцаагаа өмнөх тэнцэлд орлуулахад $\frac{FP}{PE} = \frac{1}{2}$ буюу $PE = 2 \cdot FP$ гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар, EF хэрчим CN медиантай Q цэгт огтлолцдог бол AFE гурвалжны NQC огтлогчийн хувьд Менелайн теорем бичихэд, $FQ = 2 \cdot QE$ гэж гарна.



Бодлого IX-Б2. k натурал тоо. $1, 2, \dots, k$ тоонуудыг хоёр хэсэгт яаж ч хуваахад, аль нэг хэсэгт нь $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ ноогдвор бүхэл байх ялгаатай a, b тоонууд олддог байв. k -ийн байж болох хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт. Хариу: $k = 30$.

$1 \leq a, b \leq 30$ тоонуудыг $a \neq b$ ба $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ ноогдвор бүхэл байдаг бол *сайн хос* гэе.

10, 15, 30 тоонуудын аль ч хоёр нь сайн хос үүсгэнэ. Иймд $\{1, 2, \dots, 30\}$ олонлогийг хоёр хэсэгт яаж ч хуваахад аль нэг хэсэг нь сайн хос агуулна.

Одоо $k = 29$ үед $\{1, 2, \dots, 29\}$ олонлогийг аль ч хэсэгт нь сайн хос ордоггүй байхаар хуваая. Эхлээд

$$A = \{2, 3, 12, 18, 28, 5, 8, 10\}$$

$$B = \{6, 15, 4, 20, 24, 21, 9\}$$

$$C = \{1, 7, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 29\}$$

гэе. Тэгвэл

- (i) A дотор сайн хос байхгүй
- (ii) B дотор сайн хос байхгүй
- (iii) $a \in C$ бол a, b сайн хос болох $b \leq 29$ тоо олдохгүй

болохыг хялбархан шалгаж болно.

Иймд нэгдүгээр хэсэгт A тоонууд орсон, хоёрдугаар хэсэгт B тоонууд орсон, үлдсэн C тоонууд нь дурын байдлаар орсон байхаар авахад хангалттай.

Бодлого IX-Б3. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд $a^3 + c(b+c)^2 \geq 4abc$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. Тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх нөхцөлийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт. Хоёр талыг ac -д хуваан Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+c}$$

болох ба одоо $\frac{(a+b+c)^2}{a+c} \geq 4b$ гэж батлахад болно. Энэ нь $(a-b+c)^2 \geq 0$ тэнцэтгэл биштэй эквивалент юм.

Сүүлийн тэнцэтгэл биш $a-b+c=0$ үед тэнцэлдээ хүрнэ. Харин Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш нь $a^2 = (b+c)c$ үед тэнцэлдээ хүрнэ. Үүнийг тооцвол тэнцэлдээ $(a, b, c) = (2t, 3t, t)$, $t > 0$ үед хүрнэ гэж гарна.

Нэмэлт: $a^3 + c(b+c)^2 - 4abc = c(b+c-2a)^2 + a(a-2c)^2 \geq 0$ гэж бичиж болно.

Х анги

Бодлого Х-А1. Нүднүүд нь шатрын хөлөг шиг хар, цагаан өнгөөр алаглан будагдсан 20×20 хэмжээтэй хөлгийн яг 150 ширхэг нүдний өнгийг эсрэгээр нь өөрчилж буджээ (харыг цагаанаар, цагааныг хараар будна). Тэгэхэд хөлгийн мөр багана бүрд ижил тооны хар өнгөтэй нүд байж болох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: Болохгүй.

A	B
C	D

Мөрүүдийн байрыг, багануудын байрыг хооронд нь солиход мөр, баганад байгаа хар өнгөтэй нүдний тоо өөрчлөгдөхгүй. Иймд хөлгийг хялбар болгож зурагт үзүүлсэн 10×10 хэмжээтэй A, B, C, D гэсэн 4 ширхэг квадратад хуваагдсан, A, D квадратын бүх нүднүүд хар өнгөтэй, харин B, C квадратын бүх нүднүүд цагаан өнгөтэй хөлөг гэж үзүж болно. Хэдэн нүдний өнгийг өөрчилж будсаны дараа хөлгийн мөр, багана бүрд $10 + k$ ширхэг хар өнгийн нүд байсан гэж үзье. Энэ нь мөр, багана бүрд өнгө нь өөрчлөгдсөн цагаан өнгийн нүдний тоо хар өнгийн нүдний тооноос k -аар их гэсэн үг юм. A хэсэгт a ширхэг нүдний өнгө өөрчлөгдсөн болог.

Тэгвэл дээрх дүгнэлтээр B, C хэсгүүдэд тус бүр $a + 10k$ ширхэг нүдний өнгө өөрчлөгдсөн байх ёстой. Мөн D хэсэгт $a + 10k - 10k = a$ ширхэг нүдний өнгө өөрчлөгдсөн байна. Эндээс өнгө нь өөрчлөгдсөн нийт нүдний тоо $2a + 2(a + 10k) = 4a + 20k$ гэсэн 4-д хуваагддаг тоо гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар хөлгийн мөр, багана бүрд $10 + k$ ширхэг цагаан өнгийн нүд байсан бөгөөд B хэсэгт яг b ширхэг нүдний өнгө өөрчлөгдсөн гэж үзвэл, өнгө нь өөрчлөгдсөн нүдний нийт тоо $2b + 2(b + 10k) = 4b + 20k$ болж бас 4-д хуваагдана. 150 нь 4-д хуваагдахгүй учраас болохгүй.

Бодлого Х-А2. m, n нь үржвэр нь бүтэн квадрат байх ялгаатай натурал тоонууд бол

$$(m - n)^2 + 1 \geq 2(m + n)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. m ба n нь ялгаатай натурал тоонууд учраас $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 > 0$ байх бөгөөд mn нь бүтэн квадрат учир

$$(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2 = m + n - 2\sqrt{mn}$$

нь натурал тоо болно. Иймд

$$m + n - 2\sqrt{mn} \geq 1$$

байх буюу эндээс

$$(m + n - 1)^2 \geq (2\sqrt{mn})^2 = 4mn$$

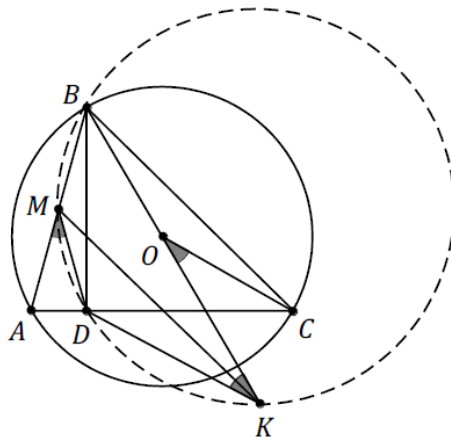
болно. Үүнийг хувиргавал бидний батлах зүйл гарна. Зөвхөн $\{m, n\} = \{k^2, (k + 1)^2\}$ үед тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрнэ.

Бодлого Х-А3. $AB < BC$ талуудтай хурц өнцөгт ABC гурвалжны BD өндрийг татжээ. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O бөгөөд D цэгийг дайрсан CO шулуунтай параллель шулуун BO шулуунтай K цэгт огтлолцоно. K цэг нь гурвалжны BC талтай параллель дундаж шугамын үргэлжлэл дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт.

$\angle BAC = \alpha$ гэж тэмдэглэвэл, төв өнцөг тул $\angle BOC = 2\alpha$ байна. Гурвалжны AB талын дундаж цэг M болог. Тэгвэл AMD гурвалжин нь суурийн $\angle MAD = \alpha$ өнцөгтэй адил хажуут гурвалжин юм. Иймд $\angle BMD = \angle MAD + \angle ADM = 2\alpha$ байна. Нөгөө талаас, $KM \parallel BC$ гэж батлахад хангалттай. $DK \parallel OC$ тул $\angle BKD = \angle OKD = \angle KOC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$ юм. $\angle BMD = 2\alpha$ ба $\angle BKD = 180^\circ - 2\alpha$ гэдгээс $BMDK$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Тэгэхлээр $\angle BKM = \angle BDM = 90^\circ - \angle MDA = 90^\circ - \alpha$ юм. BOC нь оройн $\angle BOC = 2\alpha$ өнцөгтэй адил хажуут гурвалжин тул суурийн өнцөг нь $\angle OBC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$ байна. $\angle BKM = \angle OBC = \angle KBC$ тэнцэл нь $KM \parallel BC$ буюу K цэг нь M цэгийг дайрсан BC талтай параллель шулуун дээр оршихыг харуулж байна.

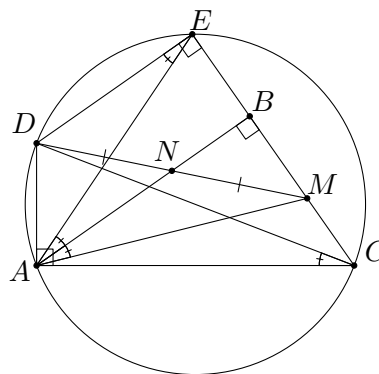


Бодлого Х-Б1. $\angle B = 90^\circ$ өнцөгтэй тэгш өнцөгт ABC гурвалжны AB катет дээр N цэг, BC катет дээр M цэгийг сонгон авчээ. MN шулуун дээр D цэгийг $MN = ND$ байхаар сонгон авчээ. Хэрэв $\angle DAN = \angle ACB$ бол $\angle BAM = \angle ACD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт.

$\angle BAD = \angle ACB$ тул $\angle DAC = 90^\circ$ болно. $[CB]$ цацраг дээр $MB = BE$ байх E цэг авъя. Тэгвэл $MN = ND$ тул $BN \parallel DE$ болох тул $\angle DEC = 90^\circ$ болно. Иймд $ADEC$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Нөгөө талаас $MB = BE$ ба $AB \perp ME$ тул $AE = AM$ болох ба иймд AB нь MAB гурвалжны A өнцгийн биссектрис болно. Эндээс $\angle MAB = \angle BAE$ болох ба солбисон өнцгүүд гэдгээс $\angle BAE = \angle DAE$ болно. Иймд ижил нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү гэдгээс $\angle DAE = \angle DCA$ болж $\angle MAB = \angle DCA$ болох нь батлагдав.



Бодлого Х-Б2. Ямар ч натурал a, b, c тоонуудын хувьд

$$[a, b] + [b, c] + [c, a]$$

хэлбэртэй бичигддэггүй бүх натурал тоог ол. Энд $[m, n]$ -ээр m, n тоонуудын хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: Бүх 2-ын зэрэгт тоонууд буюу $k \geq 0$ үед 2^k хэлбэртэй тоонууд.

$n \geq 1$ үед $2n + 1 = [1, 1] + [1, n] + [n, 1]$ билээ. Цаашилбал $k \geq 0$ ба $n \geq 1$ үед

$$2^k(2n + 1) = [2^k, 2^k] + [2^k, 2^k \cdot n] + [2^k \cdot n, 2^k]$$

гэж бичиж болно. Тэгэхлээр сондгой хэсэг нь 1-ээс их байх бүх натурал тоо $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ хэлбэрт бичигдэж байна.

Одоо сондгой хэсэг нь 1 байдаг, өөрөөр хэлбэл, 2-ын зэрэгт тоонууд ийм хэлбэрт бичигдэхгүй гэдгийг баталъя. Үүнийг батлахад “ $x + y = 2^k$ бол x, y тоонуудыг хуваадаг 2-ын зэргүүд нь ижил” гэсэн хялбархан дүгнэлтийг ашиглах болно. $2^k = [a, b] + [b, c] + [c, a]$ бөгөөд сондгой a_1, b_1, c_1 тоонууд, сөрөг биш m, n, l зэргүүдийн хувьд $a = 2^m a_1, b = 2^n b_1, c = 2^l c_1$ гэж үзье. $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ илэрхийлэл a, b, c тоонуудын хувьд тэгш хэмтэй тул $m \leq n \leq l$ гэж үзэж болно.

$m = n = l$ бол $2^{k-m} = [a_1, b_1] + [b_1, c_1] + [c_1, a_1]$ болох ба баруун гар талд байгаа илэрхийлэл нь 1-ээс их сондгой тоо тул тэнцэл биелэх боломжгүй.

$m < n = l$ болог. Энэ үед $[a, b], [b, c], [c, a]$ тоонууд нь гурвуулаа 2^n -д хуваагддаг тоо байх бөгөөд 2^n -д хураахад $2^{k-n} = [a_1, b_1] + [b_1, c_1] + [c_1, a_1]$ болж өмнөхтэй нэгэн адил зөрчил үүснэ.

$m \leq n < l$ болог. Энэ үед $[a, b] = 2^n [a_1, b_1]$ нь яг 2^n -д хуваагддаг тоо байх бөгөөд $[b, c], [c, a]$ тоонууд нь 2^l -д хуваагддаг тоонууд тул нийлбэр нь 2^l -д хуваагддаг тоо байна. Иймд дээр дурдсан дүгнэлтээр $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ нийлбэр 2-ын зэрэг байж болохгүй.

Бодлого Х-БЗ. $11^n + n^2 + 71 = m^2$ байх бүх натурал m, n тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Хариу: $n = 2, m = 14$.

n сондгой гэвэл $11^n + n^2 + 71 \equiv (-1)^n + 1 - 1 \equiv -1 \equiv m^2 \pmod{4}$ болно. Гэтэл бүтэн квадрат 4 модулиар 0, 1 байдаг тул зөрчил гарна. Иймд n тэгш тоо байна.

$n = 2k$ байг. $k = 1$ үед $n = 2, m = 14$ гэсэн цор ганц шийдтэй.

$k \geq 2$ үед $11^k = (9 + 2)^k \geq 9^k + k9^{k-1}2 + \frac{k(k-1)}{2}9^{k-2}2^2 \geq 81 + 18k + 2k(k-1) > 2k^2 + 35$ гэдгээс

$$11^{2k} < m^2 = 11^{2k} + 4k^2 + 71 < (11^k + 1)^2$$

тул натурал шийдгүй.

XI анги

Бодлого XI-A1. X-A2

Бодлого XI-A2. X-A3

Бодлого XI-A3. $1 \leq k \leq 100$ байх ямар ч k тооны хувьд

$$aa_k = 101 - k$$

байх 1, 2, ..., 100 тоонуудын хэдэн ялгаатай $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ сэлгэмэл олдох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: $2^{25} \cdot 49!! = \frac{50!}{25!}$.

Хэрэв $a_m = m$ бол $a_{a_m} = a_m = m$ байх бөгөөд өгсөн нөхцөлөөс $101 - m = m$ болж болохгүй. Иймд ямар ч m тооны хувьд $a_m \neq m$ байна. $a_m = n$ гэж үзье. Тэгвэл өгсөн нөхцөлөөс,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{a_m} = 101 - m \\ a_{101-m} &= a_{a_n} = 101 - n \\ a_{101-n} &= a_{a_{101-m}} = 101 - (101 - m) = m \end{aligned}$$

гэж гарна. Иймд сэлгэмлийг буулгалт мэтээр сэтгэвэл $m, n, 101 - m, 101 - n$ тоонууд нь 4 урттай цикл үүсгэж байна. Энд $101 - m = a_n \neq n$ байх тул $m, n, 101 - m, 101 - n$ тоонууд нь хоорондоо ялгаатай тоонууд юм.

Одоо сэлгэмлээ тоолъё. 1, 2, ..., 99, 100 тоонуудаас дурын m тоог сонгоход $a_m = n$ тоог m ба $101 - m$ -ээс ялгаатай нийт $100 - 2 = 98$ янзаар сонгож болно. $m, n, 101 - m, 101 - n$ гэсэн дугааруудын хувьд a_k нь ямар тоо байх нь дээрх томъёогоор тодорхойлогдох бөгөөд эдгээр тоонуудыг 1, 2, ..., 99, 100 тоонуудаас хасахад 96 тоо үлдэнэ. Үлдсэн тоонуудаас дурын m' тоог сонгоход $a_{m'} = n'$ тоог $96 - 2 = 94$ янзаар сонгож болно. Гэх мэтчилэн үргэлжлүүлэхэд бодлогын нөхцөлийг хангах сэлгэмлийн нийт тоо нь

$$98 \cdot 94 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2$$

гэж олдоно. Факториалын тэмдэг ашиглан энэ боломжийн тоог $2^{25} \cdot 49!!$ эсвэл $\frac{50!}{25!}$ гэж бичиж болно.

Бодлого XI-Б1. $1 \leq k \leq n$ байх натурал n, k тоонууд өгчээ. Нийлбэр нь $2n - 1$ байдаг n ширхэг натурал тооноос нийлбэр нь k байх хэдэн тоог сонгож болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $x_1, x_2, \dots, x_n$ натурал тоонуудын нийлбэр нь $2n - 1$ болог. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. Ямар нэг натурал k ($k \leq n$) тооны хувьд нийлбэр нь k -тай тэнцүү хэдэн тоо эдгээр тоон дотор байхгүй гэе. $n = kp + q$ ($0 \leq q < k$) гэж бичвэл $p \geq 1$ байна. Дурын k ширхэг бүхэл тоонууд дотор нийлбэр нь k -д хуваагдах хэдэн тоо үргэлж байх тул $1 \leq i \leq p$ бүрийн хувьд $S_i = x_{(i-1)k+1} + \dots + x_{ik} \geq 2k$ байна. Энэ үед $x_{kp} \geq 2$ байна. Иймд

$$2n - 1 = \sum_{i=1}^p S_i + \sum_{j=1}^q x_{kp+j} \geq 2kp + 2q = 2n$$

болж мөн зөрчил гарна.

Бодлого XI-Б2. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I , гурвалжны BC талыг шүргэдэг гадаад багтсан тойргийн төв I' байг. AI шулуун BC талыг D цэгт огтлох бөгөөд D цэгийг дайрсан AI шулуунаас ялгаатай шулуун ABC гурвалжныг багтаасан тойргийг M, N цэгт огтлоно. I, I', M, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

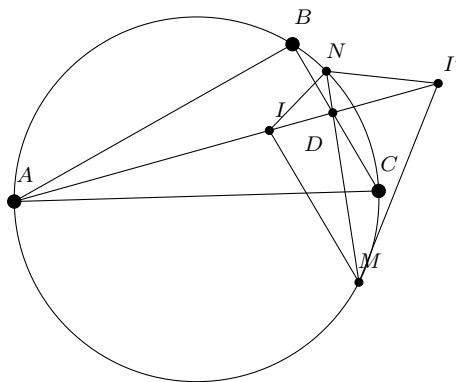
Бодолт. I нь багтсан тойргийн төв, I' нь гадаад багтсан тойргийн төв учраас $\angle IBI' = \angle ICI' = 90^\circ$ байна. Эндээс $IBI'C$ тойрогт багтах бөгөөд огтлолцсон хөвчүүдийн тухай теорем ёсоор

$$BD \cdot DC = ID \cdot DI'$$

болно. D цэгийг дайрсан аливаа MN хөвчийн хувьд огтлолцсон хөвчүүдийн тухай теоремоор $MD \cdot DN = BD \cdot DC$ тул

$$MD \cdot DN = ID \cdot DI'$$

гэж гарна. Иймд огтлолцсон хөвчүүдийн тухай теорем ёсоор $IMI'N$ тойрогт багтана.



Бодлого XI-Б3. $m > n > 2$ үед $\frac{a^m + a^n + 1}{a^3 + a^2 + 1}$ ноогдвор бүхэл байх зөвхөн төгсгөлөг тооны натурал a тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. Эсрэгээс бодлогын нөхцөлийг хангах $n > k > 2$ тоонууд олддог гэж үзье. $x^n + x^k + 1$ -г $x^3 + x^2 + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад $r(x)$ олон гишүүнт үлддэг байг. Өөрөөр хэлбэл

$$x^n + x^k + 1 = (x^3 + x^2 + 1)q(x) + r(x)$$

ба энд $r(x)$ нь 2-оос ихгүй зэргийн олон гишүүнт. $\frac{m^n + m^k + 1}{m^3 + m^2 + 1}$ ноогдвор нь төгсгөлгүй олон натурал m -ийн хувьд бүхэл байх тул $\frac{r(m)}{m^3 + m^2 + 1}$ ноогдвор нь мөн төгсгөлгүй олон натурал m -ийн хувьд бүхэл байх ёстой болно.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{r(m)}{m^3 + m^2 + 1} = 0$$

тул $r(x) = 0$ гэж гарна.

Одоо бид үлдэгдэл $r(x)$ олон гишүүнтийг олж. Үүний тулд эхлээд x^n олон гишүүнтийг $x^3 + x^2 + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг олж.

$$x^n = (x^3 + x^2 + 1)(a_0 x^{n-3} + a_1 x^{n-4} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-3}) + (b_n x^2 + c_n x + d_n)$$

байг. a_i коэффициентуудыг эхнээс нь хөөвөл

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_i = -(a_{i-1} + a_{i-3}) \quad i = 3, 4, \dots$$

гэдгийг хялбархан харж болно. Иймд a_i коэффициентүүдийн хувьд тэгш гишүүд нь эерэг, сондгой гишүүд нь сөрөг байх бөгөөд дээрх рекуррент харьцаанаас a_i коэффициентууд нь

2-р гишүүнээсээ эхлэн модулиараа үргэлж өснө гэж гарна. Мөн b_n нь $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ дарааллын гишүүн байх нь тодорхой.

x^k олон гишүүнтийг $x^3 + x^2 + 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг $b_k x^2 + c_k x + d_k$ гэвэл $x^n + x^k + 1$ олон гишүүнт нь $x^3 + x^2 + 1$ олон гишүүнтэд үлдэгдэлгүй хуваагдахын тулд $b_n + b_k = 0$ байх ёстой. Гэвч $n > k > 2$ үед $|b_n| > |b_k|$ тул энэ нь боломжгүй болж зөрчил үүсэв. Иймд $\frac{m^n + m^k + 1}{m^3 + m^2 + 1}$ ноогдвор нь зөвхөн төгсгөлөг натурал m -ийн хувьд бүхэл байж чадна.

ХII анги

Бодлого ХII-A1. $(2017^2)!$ нь $(2017!)^n$ -д хуваагддаг байх хамгийн их натурал n тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. Хариу: $n = 2018$.

Эхлээд m, k натурал тоонууд бол $\frac{(mk)!}{(m!)^k k!}$ ноогдвор бүхэл тоо болохыг харуулъя. Үнэхээр, $\frac{(mk)!}{(m!)^k k!}$ нь өнгө бүрээс m ширхэг байдаг k өнгийн нийт mk ширхэг чулууг тус бүр нь m чулуутай k ширхэг бүлэгт хуваах боломжийн тоо (бүлгүүдийг дугаарлаагүй) юм.

Энд $m = k = 2017$ гэж авбал $(2017^2)!$ нь $(2017!)^{2018}$ -д хуваагдах нь харагдана.

Одоо $1, 2, \dots, 2017^2$ тоонууд дотроос 2017 -д хуваагддаг тоонуудыг жагсаавал

$$1 \cdot 2017, 2 \cdot 2017, 3 \cdot 2017, \dots, 2016 \cdot 2017, 2017 \cdot 2017$$

болох тул $(2017^2)!$ тоо хамгийн олондоо 2017 -ийн 2018 зэрэгт хуваагдана. Энд 2017 нь анхны тоо болохыг ашиглав. Иймд тус тоо $(2017!)^{2019}$ -д хуваагдахгүй.

Бодлого ХII-A2. XI-A3

Бодлого ХII-A3. $a, b, c > 0$ бол

$$\frac{7}{1+a} + \frac{9}{1+a+b} + \frac{36}{1+a+b+c} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $p, q, x, y > 0$ бол Коши-Шварцын тэнцэтгэл бишээс

$$\frac{(p+q)^2}{x+y} \leq \frac{p^2}{x} + \frac{q^2}{y}$$

болно. Иймд

$$\begin{aligned} \frac{6^2}{1+a+b+c} &\leq \frac{4^2}{1+a+b} + \frac{2^2}{c} \\ \frac{5^2}{1+a+b} &\leq \frac{3^2}{1+a} + \frac{2^2}{b} \\ \frac{4^2}{1+a} &\leq \frac{2^2}{1} + \frac{2^2}{a} \end{aligned}$$

болох ба эдгээрийг нэмбэл бидний батлах тэнцэтгэл биш гарна.

Зөвхөн $(a, b, c) = (3/3, 4/3, 5/3)$ үед тэнцэлдээ хүрэхийг хялбархан шалгаж болно.

Бодлого XII-Б1. XI-Б1

Бодлого XII-Б2. XI-Б3

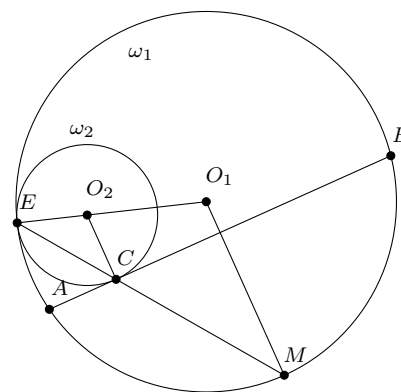
Бодлого XII-Б3. Ω тойрогт багтсан ABC гурвалжин өгөгджээ. Гурвалжны AB, AC талыг шүргэдэг тойрог ω_1 тойргийг D цэгт шүргэдэг байв. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I бөгөөд CI шулуун Ω тойргийг M цэгт, BI шулуун Ω тойргийг N цэгт тус тус дахин огтлоно. DI шулуун MN хэрчмийг огтлолын цэгээрээ хагаслан хуваана гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодолт. Эхлээд дараах леммийг баталъя.

Лемм. ω_1 тойргийн AB хөвчийг C цэгт, ω_1 тойргийг дотоод байдлаар E цэгт шүргэдэг ω_2 тойрог өгөгдөв. Тэгвэл EC шулуун E цэгийг агуулаагүй AB нумын дунджийг дайрна.

Баталгаа. ω_1 ба ω_2 тойргийн төвүүд харгалзан O_1 ба O_2 байг. $EC \cap \omega_1 = M$ гээд E цэг дээр төвтэй ω_2 тойргийг ω_1 тойрог руу буулгасан гомотетыг авч үзвэл O_2C хэрчим O_1M хэрчим рүү бууна. $O_2C \perp AB$ гэдгээс $O_1M \perp AB$ болох ба эндээс M нь E цэгийг агуулаагүй AB нумын дундаж болж батлагдав.



Одоо бодлого руугаа орёе. ABC гурвалжны багтаасан тойргийг ω_1 , ω_1 тойргийг шүргэж байгаа тойргийг ω_2 гэе. ω_2 тойрог нь AB, AC талуудыг харгалзан K, L цэгүүдэд шүргэдэг байг. Лемм ёсоор D, K, M цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Мөн адилаар D, L, N цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. $A(2), B(1), C(3), D(5), M(4), N(6)$ цэгүүдийн хувьд Паскалийн теоремоор $AB \cap MD = K, AC \cap DN = L, BN \cap MC = I$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. $AK = AL$ ба I нь BAC өнцгийн биссектрис дээр орших учраас $KI = IL$ байна. D цэг дээр төвтэй ω_1 тойргийг ω_2 тойрог руу буулгасан гомотетоор K цэгийн дүр M, L цэгийн дүр N болно. Эндээс I цэгийн дүр MN хэрчмийн дундаж дээр бууна. Иймд DI шулуун MN хэрчмийг таллан хуваана.

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Дэс дараалсан 17 ширхэг натурал тоо өгөгджээ. Эдгээр тоонуудын аль нэг хоёрын үржвэр нь үлдсэн 15 тооны нийлбэрийн $\frac{1}{3}$ -тэй тэнцүү байв. Өгөгдсөн тоонуудаас хамгийн бага тоо нь хэд байх боломжтой вэ?

(Дэвшүүлсэн: Э. Азжаргал)

Бодолт. Хариу: $n = 1, 9$.

Өгөгдсөн тоонуудаа $n, n+1, \dots, n+16$ гэвэл нийлбэр нь $17(n+8)$ болно. $0 \leq p < q \leq 16$ тоонуудын хувьд

$$(n+p)(n+q) = \frac{17(n+8) - (n+p) - (n+q)}{3}$$

байдаг гэе. Тэгвэл

$$n(n+1) \leq (n+p)(n+q) = 5n + \frac{17 \cdot 8 - p - q}{3} \leq 5n + \frac{17 \cdot 8 - 1}{3} = 5n + 45$$

байна. Эндээс

$$(n-2)^2 = n^2 - 4n + 4 \leq 45 + 4 = 49$$

буюу $n \leq 9$ гэж гарна. Анхны адилтгалаа хувиргавал

$$\begin{aligned} (3(n+p)+1)(3(n+q)+1) &= 3(3(n+p)(n+q) + (n+p) + (n+q)) + 1 \\ &= 54(n+8) + 1 \end{aligned}$$

болох ба үүнийг хангах $0 \leq p < q \leq 16$ тоонууд олддог байх $1 \leq n \leq 9$ тоо зөвхөн $n = 1$, $n = 9$ болохыг хялбархан шалгаж болно.

Бодлого ББ-А2. IX-A2

Бодлого ББ-А3. VII-4

Бодлого ББ-Б1. Эхнийх нь 50% хөнгөн цагаан, 15% зэс, 35% магни, хоёр дахь хайлшийн 40% зэс, 60% магни, гурав дахь хайлшийн 40% хөнгөн цагаан, 60% нь магни агуулдаг гурван хайлш байжээ. Эдгээрээс 20% нь зэс байх шинэ хайлшийг гаргахад уг хайлшид хөнгөн цагаан хамгийн ихдээ болон хамгийн багадаа хэдэн хувь агуулагдах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. 1-р хайлшаас x , 2-р хайлшаас y , 3-р хайлшаас z хэмжээтэйг тус тус авсан гэвэл уг хайлш 20% зэс агуулж байхын тулд

$$0.15x + 0.4y = 0.2(x + y + z),$$

гэсэн нөхцөлийг хангана. Мөн бид нар нийт хайлшийн жинг 1 гэж үзэж болох учир $x + y + z = 1$ гэсэн нөхцөлтэй болно. Энэ хоёр нөхцөлөөс y -ийг олж тэнцүүлбэл $0.2(1 - x - z) = 0.05x + 0.2z$ буюу $x = \frac{4 - 8z}{5}$ болно. Харин уг хайлшийн хөнгөн цагааны хэмжээг олбол $0.5x + 0.4z$ учир $0.5x + 0.4z = 0.5 \cdot \frac{4 - 8z}{5} + 0.4z = 0.4 - 0.4z$ болно. $z \geq 0$ учир $z = 0$, $x = 0.8$, $y = 0.2$ үед хөнгөн цагааны хэмжээ хамгийн их утгадаа хүрч 0.4 болно. Энэ нь 40% гэсэн үг.

Харин хөнгөн цагааны хэмжээг x хувьсагчаар олбол $0.5x + 0.4z = 0.5x + 0.4 \cdot \frac{4 - 5x}{8} = 0.2 + 0.25x$ болох ба $x \geq 0$ учир $x = 0$, $y = 0.5$, $z = 0.5$ үед хөнгөн цагааны хэмжээ хамгийн бага утгадаа хүрч 0.2 болно. Энэ нь 20% юм.

Бодлого ББ-Б2. Уутанд 2017 хар, 2017 цагаан бөмбөг байв. Баяраа нэг үйлдлээр уутнаас 3 бөмбөг авч, оронд нь 2 бөмбөг хийнэ. Хэрэв авсан бөмбөг нь

- 3 хар бол оронд нь 1 хар 1 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 2 хар 1 цагаан бол оронд нь 2 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 1 хар 2 цагаан бол оронд нь 1 хар 1 цагаан бөмбөг хийнэ.
- 3 цагаан бол оронд нь 2 хар бөмбөг хийнэ.

Баяраа энэ үйлдлээ 3 бөмбөг үлдтэл хийхэд ямар өнгийн бөмбөгнүүд үлдэж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. Хариу: 1 хар 2 цагаан эсвэл 3 хар.

Аль ч үйлдэлд анх байсан хар бөмбөгний тэгш сондгой өөрчлөгдөхгүй учир хамгийн сүүлд нэг бол 1 хар 2 цагаан бөмбөг, нэг бол 3 хар бөмбөг үлдэнэ.

Аль аль нь боломжтойг харуулъя. Үйлдлүүдээ 1-ээс 4 гэж дугаарлая. Уутанд a хар, b цагаан бөмбөг байгааг (a, b) гэж тэмдэглэе. k -р үйлдлийг хийхэд (a, b) -ээс (c, d) -д шилждэг гэхийг $(a, b) \xrightarrow{k} (c, d)$ гэж илэрхийлье. Жишээлбэл $(2017, 2017) \xrightarrow{4} (2019, 2014)$.

Тэгвэл

$$(2017, 2017) \xrightarrow{4} \dots \xrightarrow{4} (3361, 1) \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} (1, 1681) \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{3} (1, 2)$$

гээд 1 хар 2 цагаан бөмбөг үлдэж болно. Мөн

$$(2017, 2017) \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} (1, 3025) \xrightarrow{3} \dots \xrightarrow{3} (1, 3) \xrightarrow{4} (3, 0)$$

гээд 3 хар үлдэж болно.

Бодлого ББ-БЗ. Нэгэн сургуулийн сурагчид 92 төрлийн дугуйланд хамрагддаг байжээ. Дугуйлан бүрд яг 10 сурагч явдаг бөгөөд аль ч 2 дугуйланг авахад яг нэг сурагч хоёуланд нь хамрагддаг байв.

(i) Дор хаяж 11 төрлийн дугуйланд явдаг сурагч олдохыг батал.

(ii) Сургууль дор хаяж 829 сурагчтай гэж харуул.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт.

(i) A гэсэн ямар нэг дугуйланг авахад цаана нь үлдэх аль ч дугуйлантай A дугуйлан нэг ерөнхий сурагчтай. Бас A дугуйлан 10 сурагчтай бөгөөд A -аас гадна $91 = 9 \cdot 10 + 1$ дугуйлан байгаа учир Дирихлейн зарчим ёсоор A дугуйлангийн ядаж нэг хүүхэд A -аас өөр 10 дугуйланд бас явдаг гэсэн үг. Иймд энэ сурагч 11 дугуйланд явдаг гэсэн үг.

(ii) Эхний хэсэгт олсон 11 дугуйланд явдаг хүүхдийг O гэе. O сурагчийг агуулдаггүй дугуйлан олдог гээд түүнийг B гэж тэмдэглэе. B дугуйлан O сурагчийг агуулдаг 11 дугуйлантай нэг нэг ерөнхий сурагчтай гэдгээс Дирихлейн зарчим ёсоор B дугуйлангийн ямар нэг O' сурагч эдгээр 11 дугуйлангийн ядаж хоёрт нь явдаг гэсэн үг. Эндээс энэ хоёр дугуйланд O ба O' сурагчид явдаг болж зөрчил үүснэ. Иймээс O сурагч бүх дугуйланд явдаг боллоо. Иймд дугуйлан бүрийн O -оос бусад бүх сурагчид ялгаатай буюу $92(10 - 1) = 828$ сурагч байх ба O сурагчтай нийлээд 829 сурагч дор хаяж байна.

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. XII-A1

Бодлого ДБ-А2. XII-A3

Бодлого ДБ-А3. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , BE өндрүүдийг татжээ. AD , BE диаметртай тойргууд X , Y цэгт огтлолцдог бол $\angle ACX = \angle BCY$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа, Б. Батцэнгэл)

Бодолт. AD , BE диаметртай тойргуудыг ω_1 , ω_2 гэж тэмдэглэе. $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ тул D , E цэгүүд AB диаметртай ω тойрог дээр оршино. ω_1 , ω_2 , ω гэсэн 3 тойргийн хос хосоороо радикал тэнхлэгүүд нь AD , BE , XY бөгөөд энэ шулуунууд нэг цэгт огтлолцох ёстой. Эндээс AD , BE өндрүүдийн огтлолцлын цэг буюу ABC гурвалжны ортотөв H нь XY шулуун дээр орших нь гарна. CDE гурвалжны DD' , EE' өндрүүдийг татъя. Тэгвэл $\angle AD'D = \angle ED'D = 90^\circ$ тул D' цэг ω_1 тойрог дээр оршино, мөн $\angle BE'E = \angle DE'E = 90^\circ$ тул E' цэг ω_2 тойрог дээр оршино. Цаашилбал, D' , E' цэгүүд DE диаметртай γ тойрог дээр оршино. ω_1 , ω_2 , γ гэсэн 3 тойргийн хос хосоороо радикал тэнхлэгүүд нь DD' , EE' , XY бөгөөд өмнөхтэй нэгэн адилаар DD' , EE' өндрүүдийн огтлолцлын цэг буюу CDE гурвалжны ортотөв H' нь XY шулуун дээр орших нь гарна. Иймд XY шулуун нь HH' шулуунтай давхцах бөгөөд $EHDH'$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм тул XY буюу HH' шулуун нь DE хэрчмийн дунджийг дайрна. Цаашид DE хэрчмийн дундаж цэгийг M гэж тэмдэглэе.

ω_1 тойрог BC шулууны нэг талд, ω_2 тойрог AC шулууны нэг талд оршино гэдгээс тэр 2 тойргийн огтлолцлын цэгүүд $\angle ACB$ өнцөг дотор оршихыг хялбархан харж болно. Эндээс тухайлбал, тэнцүү гэж батлах ёстой $\angle ACX$, $\angle BCY$ өнцгүүд $\angle ACB$ өнцгөөс бага хурц өнцгүүд гэж гарна. ω_1 тойрог BC талыг шүргэх тул шүргэгч, огтлогчийн хоорондох өнцгийн чанараар $\angle CDX = \angle DXY$ ба $\angle CDY = 180^\circ - \angle DXY$ байна. Үүнтэй нэгэн адилаар ω_2 тойрог AC талыг шүргэх тул $\angle CEX = \angle EYX$ ба $\angle CEY = 180^\circ - \angle EYX$ гэж гарна. $\angle CDX = \angle DXY$ ба $\angle CEX = \angle EYX$ гэдгээс

$$\frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle CEX} = \frac{\sin \angle DXY}{\sin \angle EYX} = \frac{\sin \angle DYM}{\sin \angle EYM}$$

болно. DYM , EYM гурвалжнуудад синусийн теоремыг

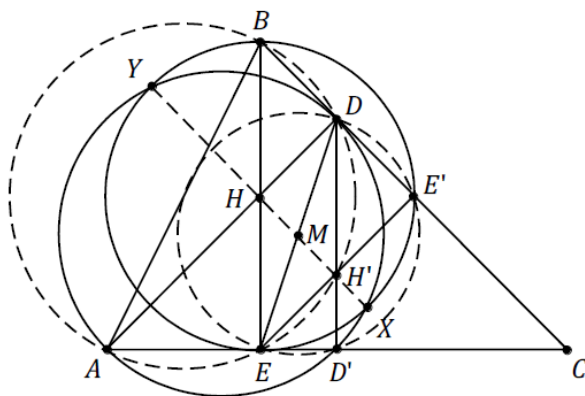
$$\frac{\sin \angle DYM}{\sin \angle DMY} = \frac{DM}{DY}, \quad \frac{\sin \angle EYM}{\sin \angle EMY} = \frac{EM}{EY}$$

гэж бичээд $DM = EM$ ба $\sin \angle DMY = \sin \angle EMY$ гэдгийг ашиглавал

$$\frac{\sin \angle DYM}{\sin \angle EYM} = \frac{EY}{DY}$$

гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар $\angle CDY = 180^\circ - \angle DXY$ ба $\angle CEY = 180^\circ - \angle EYX$ гэдгээс

$$\frac{\sin \angle CDY}{\sin \angle CEY} = \frac{\sin \angle DXM}{\sin \angle EXM} = \frac{EX}{DX}$$



гэж гарна. Одоо CDE гурвалжны X цэгийн хувьд тригонометрийн хэлбэртэй Чевийн теоремыг бичвэл

$$\frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle EDX} \cdot \frac{\sin \angle DEX \sin \angle ECX}{\sin \angle CEX \sin \angle DCX} = 1$$

болно. Энд өмнө харуулсан $\frac{\sin \angle CDX}{\sin \angle CEX} = \frac{EY}{DY}$ гэсэн харьцааг, бас DEX гурвалжны хувьд синусийн теоремоор гарах $\frac{\sin \angle DEX}{\sin \angle EDX} = \frac{DX}{EX}$ гэсэн харьцаануудыг тооцвол, эндээс

$$\frac{\sin \angle DCX}{\sin \angle ECX} = \frac{EY}{DY} \cdot \frac{DX}{EX}$$

гэж гарна.

Үүнтэй нэгэн адилаар CDE гурвалжны Y цэгийн хувьд тригонометрийн хэлбэртэй Чевийн теоремыг

$$\frac{\sin \angle CDY}{\sin \angle EDY} \cdot \frac{\sin \angle DEY \sin \angle ECY}{\sin \angle CEY \sin \angle DCY} = 1$$

гэж бичээд, $\frac{\sin \angle CDY}{\sin \angle CEY} = \frac{EX}{DX}$ ба $\frac{\sin \angle DEY}{\sin \angle EDY} = \frac{DY}{EY}$ гэдгийг тооцвол

$$\frac{\sin \angle ECY}{\sin \angle DCY} = \frac{DX}{EX} \cdot \frac{EY}{DY}$$

гэж олдоно. Үүгээр

$$\frac{\sin \angle DCX}{\sin \angle ECX} = \frac{\sin \angle ECY}{\sin \angle DCY}$$

гэдгийг баталлаа. Эцэст нь, $\angle DCX + \angle ECX = \angle ECY + \angle DCY = \angle ACB$ гэдгийг ашиглан энэ тэгшитгэлээс хялбархан $\text{ctg} \angle ECX = \text{ctg} \angle DCY$ гэдгийг гаргаж болно. Тэгэхлээр $\angle ECX = \angle DCY$ юм.

Бодлого ДБ-Б1. $P(x)^2 = Q(x)^3 + 1$ нөхцөлийг хангах бодит коэффициенттой $P(x)$, $Q(x)$ олон гишүүнтүүд нь зөвхөн тогтмол олон гишүүнтүүд гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. $(P(x) - 1)(P(x) + 1) = P(x)^2 - 1 = Q(x)^3$ бөгөөд $P(x) - 1$ ба $P(x) + 1$ нь харилцан анхны (эсвэл ижил комплекс тоон язгуургүй) тул $P(x) - 1 = A(x)^3$, $P(x) + 1 = B(x)^3$ байх $A(x)$, $B(x)$ олон гишүүнтүүд олдоно. Тэгвэл

$$2 = B(x)^3 - A(x)^3 = (B(x) - A(x))(B(x)^2 + B(x)A(x) + A(x)^2)$$

болох ба эндээс

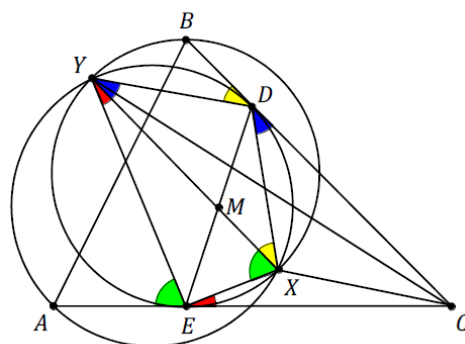
$$c = B(x) - A(x)$$

$$d = B(x)^2 + B(x)A(x) + A(x)^2$$

байх c , d бодит тоонууд олдоно. Энд $cd = 2$. Иймд

$$d - c^2 = 3A(x)B(x) = 3Q(x)$$

тул $Q(x)$ тогтмол олон гишүүнт болно. Энэ үед $P(x)^2 = Q(x)^3 + 1$ тул $P(x)$ мөн тогтмол байна.



Бодлого ДБ-Б2. Долоон одойн өндөр бүгд ялгаатай. Тэд өдөр бүр жагсаалаар ажилдаа явдаг бөгөөд өндөр нь өсөх дарааллаар зогссон дараалсан 3 одой байж болохгүй дүрэмтэй (буурах дараалалтай зогссон 3 одой байж болно). Тэд өдөр бүр өөр өөр дарааллаар ажилдаа явдаг бол хамгийн олондоо хэдэн өдөр ажилдаа явж чадах вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар, Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: 2017 өдөр.

1, 2, ..., n гэсэн өндөртэй n ширхэг одойн жагсаалыг цаашид тоонуудын $a_1, a_2, \dots, a_n$ сэлгэмэл гэж үзье. Бид ямар ч k -ийн хувьд $a_{k-1} < a_k < a_{k+1}$ байдаггүй сэлгэмлийн тоог олох ёстой. Энэ нөхцөлийг хангадаг

$$\begin{aligned} a_{n-1} &< a_n \text{ байх сэлгэмлийн тоог } x_n, \\ a_{n-1} &> a_n \text{ байх сэлгэмлийн тоог } y_n \end{aligned}$$

гэж тус тус тэмдэглээд, x_n, y_n тоонуудын рекуррент харьцааг олъё.

$a_{n-1} < a_n$ байх бодлогын нөхцөлийг хангах сэлгэмлийг авч үзье. $a_k = n$ болог (энд $k = n - 1$ байж болохгүй). Тэгвэл $a_{k-1} < a_k = n$ байх бөгөөд энэ сэлгэмэл бодлогын нөхцөлийг хангахын тулд заавал $a_{k-2} > a_{k-1}$ байх ёстой. Тэгэхлээр $a_k = n$ одойгоор жагсаалыг

$$a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \text{ ба } a_{k+1}, \dots, a_n$$

нөхцөлийг хангах жагсаал байна. Энд $a_1, \dots, a_{k-1}$ тоонуудыг 1, 2, ..., $n - 1$ тоонуудаас C_{n-1}^{k-1} янзаар сонгож болох тул $a_1, \dots, a_{k-1}$ жагсаалын сонголт $C_{n-1}^{k-1} \cdot y_{k-1}$ янз, үлдсэн $a_{k+1}, \dots, a_n$ жагсаалын сонголт x_{n-k} янз байна. Эндээс

$$x_n = x_{n-1} + C_{n-1}^1 y_1 x_{n-2} + \dots + C_{n-1}^{n-3} y_{n-3} x_2 + y_{n-1}$$

гэсэн рекуррент харьцаа батлагдав.

$a_{n-1} > a_n$ байх бодлогын нөхцөлийг хангах сэлгэмлийг авч үзье. $a_k = n$ болог (энд $k = n$ байж болохгүй). Өмнөхтэй нэгэн адилаар заавал $a_{k-2} > a_{k-1}$ байх ёстой. Тэгэхлээр $a_k = n$ одойгоор жагсаалыг

$$a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \text{ ба } a_{k+1}, \dots, a_n$$

гэсэн 2 хэсэгт хуваахад $a_1, \dots, a_{k-1}$ нь $a_{k-2} > a_{k-1}$ байх бодлогын нөхцөлийг хангах жагсаал, харин $a_{k+1}, \dots, a_n$ нь $a_{n-1} > a_n$ байх бодлогын нөхцөлийг хангах жагсаал байна. Энд $a_1, \dots, a_{k-1}$ тоонуудыг 1, 2, ..., $n - 1$ тоонуудаас C_{n-1}^{k-1} янзаар сонгож болох тул $a_1, \dots, a_{k-1}$ жагсаалын сонголт $C_{n-1}^{k-1} \cdot y_{k-1}$ янз, үлдсэн $a_{k+1}, \dots, a_n$ жагсаалын сонголт y_{n-k} янз байна. Эндээс

$$y_n = y_{n-1} + C_{n-1}^1 y_1 y_{n-2} + \dots + C_{n-1}^{n-2} y_{n-2} y_1$$

гэсэн рекуррент харьцаа батлагдав.

$x_1 = 0, y_1 = x_2 = y_2 = 1$ гэдгээс эдгээр рекуррент харьцаагаар

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + y_2 = 2, & y_3 &= y_2 + 2y_1y_1 = 3 \\ x_4 &= x_3 + 3y_1x_2 + y_3 = 8, & y_4 &= y_3 + 3y_1y_2 + 3y_2y_1 = 9 \\ x_5 &= x_4 + 4y_1x_3 + 6y_2x_2 + y_4 = 31, & y_5 &= y_4 + 4y_1y_3 + 5y_2y_2 + 4y_3y_1 = 39 \end{aligned}$$

болох ба эндээс

$$\begin{aligned}x_6 &= x_5 + 5y_1x_4 + 10y_2x_3 + 10y_3x_2 + y_5 = 160 \\y_6 &= y_5 + 5y_1y_4 + 10y_2y_3 + 10y_3y_2 + 5y_4y_1 = 189 \\x_7 &= x_6 + 6y_1x_5 + 15y_2x_4 + 20y_3x_3 + 15y_4x_2 + x_6 = 910 \\y_7 &= y_6 + 6y_1y_5 + 15y_2y_4 + 20y_3y_3 + 15y_4y_2 + 6y_5y_1 = 1107\end{aligned}$$

гэж олдоно. Иймд $x_7 + y_7 = 2017$.

Бодлого ДБ-БЗ. $3^n + 5^n$ нийлбэр нь $n^2 - 25$ ялгаварт хуваагддаг $n > 5$ байх натурал n тоо олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Тийм n тоо олддог гэж үзье. $n = 2m$ тэгш тоо байх үед

$$3^n + 5^n = (3^m)^2 + (5^m)^2$$

нийлбэр нь хоёр бүтэн квадратын нийлбэр учраас түүнд $p = 4k + 3$ хэлбэрийн анхны тоон хуваагч байхгүй. Гэтэл n тэгш тоо байхад $n^2 - 25 \equiv 3 \pmod{4}$ тул $n^2 - 25$ тоонд $p = 4k + 3$ хэлбэрийн анхны хуваагч заавал бий. Иймд n нь сондгой тоо байна. $n = 2m + 1$ гэж үзээд

$$3^n + 5^n = 3(3^m)^3 + 5(5^m)^2$$

гэж бичье. $3^n + 5^n$ нь p -д хуваагддаг бол $3(3^m)^2 \equiv -5(5^m)^2 \pmod{p}$ гэдгээс

$$(3^{m+1}5^{-m})^2 \equiv -15 \pmod{p}$$

гэж гарна. Квадрат хаслага ашиглан дараахь чанарыг баталъя.

$x^2 \equiv -15 \pmod{p}$ жишлэг шийдтэй байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ байх явдал юм.

Үнэхээр, $\left(\frac{-15}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)$ бөгөөд квадратлаг уялдааны хуулиар $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$ ба $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ юм. Тэгэхлээр $\left(\frac{-15}{p}\right) = 1$ буюу $x^2 \equiv -15 \pmod{p}$ жишлэг шийдтэй байхын тулд $\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = 1$ эсвэл $\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = -1$ байх ёстой. 3 модулиар 1 нь квадрат хаслага, 2 нь квадрат биш хаслага, 5 модулиар 1, 4 нь квадрат хаслага, 2, 3 нь квадрат биш хаслага гэдгээс

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) &= 1 \text{ байхын тулд } p \equiv 1, 4 \pmod{15}, \\ \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) &= -1 \text{ байхын тулд } p \equiv 2, 8 \pmod{15}\end{aligned}$$

гэж гарна.

$3^n + 5^n$ -г хуваадаг ямар ч анхны p тоо нь $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ хэлбэртэй байх боллоо. Энд ийм $p \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ хэлбэртэй анхны тоонуудын үржвэр мөн $1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ хэлбэртэй тоо байна гэдгийг тэмдэглэе (энэ нь $1, 2, 4, 8$ нь 2-ын зэргүүд гэдгээс хялбархан харагдана). Тэгэхлээр $3^n + 5^n$ тооны хуваагч $n^2 - 25$ тооны $n - 5, n + 5$ үржигдэхүүнүүд нь $1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ хэлбэртэй тоонууд байх ёстой. Гэтэл

$$\begin{cases} n - 5 \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15} \\ n + 5 \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{15} \end{cases}$$

систем шийдгүй. Учир нь $1, 2, 4, 8 \pmod{15}$ хаслагуудаас ялгавар нь 10 гарах хоёр хаслага олдохгүй байна.

Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын IV Даваа

Монголын Математикийн 53-р Олимпиадын IV даваа

Ерөнхий боловсролын сургуулийн математикт авьяастай багш сурагчдыг нээх, урам хайрлах, тэдний сэтгэлгээний цар болон сэтгэхүйн чадварыг сорих талбар болсон улсын математикийн олимпиад 2017 оны 5 дугаар сарын 03-аас 07-ны хооронд Булган аймгийн төв Булган хотод амжилттай явагдсан. Тус аймгийн удирдлага, гэр бүл, шавь нарынх нь санаачлагаар 53 дахь удаагийн улсын олимпиад Монгол Улсын гавьяат багш, доктор, профессор Д. Шагдарын нэрэмжит болон түүний төрсөн нутагт зохион байгуулагдлаа. Олон улсын математикийн олимпиадад оролцох сурагчдыг шалгаруулах томоохон сорил болдог улсын олимпиад орон нутагт болсноороо нөхөрсөг харьцаа, баяр хөөр, харамсал, догдлол хосолсон уур амьсгал дор эх орныхоо нэгээхэн хэсэгтэй танилцах бололцоог олгодгоороо онцлогтой байдаг. Олимпиадыг ивээн тэтгэж нутагтаа зохион байгуулсан Булган аймгийн засаг даргын тамгын газар, боловсрол соёл урлагийн газар мөн хөрөнгө санхүүгийн болон бусад төрлийн туслалцаа үзүүлсэн Цонхлон сан, Маргад дээд сургууль, аймгийн нийт сургууль, цэцэрлэг, албан байгууллагын хамт олонд математикийг талархан дэмжигчдийнхээ нэрийн өмнөөс болон хувиасаа чин сэтгэлийн талархал дэвшүүлж сайн сайхан бүхнийг хүсье.

УМО-53-д аймаг, хотын даваанаас эрх авсан багш сурагчид, бүсийн олимпиадаас эрх авсан сурагчид, УМО-52-ын эхний байрт орсон багуудын нэмэлт эрхээр орж буй сурагчид нийтдээ 228 оролцогч оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдсан. Үүнд IX ангийн 40, X ангийн 41, XI ангийн 45, XII ангийн 36 нийт 162 сурагч, дунд ангийн 37, бага ангийн 29 нийт 66 багш оролцов.

2017 оны 5 дугаар сарын 04, 05-ны өдрүүдэд багш, сурагчид уламжлалын дагуу өдөр бүр 3 бодлогыг 4 цаг 30 минутын хугацаанд бодож өрсөлдсөн. Багийн дүнгээр УБ хот 18 оноогоор 1-р байр, Хөвсгөл 12.8 оноогоор 2-р байр, Архангай 9.7 оноогоор 3-р байр, Баянхонгор 7.3 оноогоор 4-р байр, Архангай 7.2 оноогоор 5-р байр, Өвөрхангай 7 оноогоор 6-р байр тус тус эзэллээ. Шалгарсан багууд ирэх жилийн улсын математикийн олимпиадад анги хамаарахгүй 1-3 сурагч нэмж оролцуулах эрхтэй юм. Нийт 31 багш, сурагч медаль хүртсэнээс УБ хотын 11-р сургууль 7, Олонлог сургууль 7, Эмпати сургууль 5, 1-р сургууль 4, Сант 3, Орчлон 2, Шинэ Монгол 1, Оюунлаг сургууль 1, Хөвсгөл аймаг 1 медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан бахдам сайхан амжилт гаргалаа.

ММОХ дарга Др. Г. Баярмагнай
Булган хот 2017.05.07

Дүн

IX анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Отгонбаяр	Мишээл	38	Шинэ Монгол
Мөнгө	Доржмягмар	Чингүүн	37	1-р сургууль
Мөнгө	Шинэбаяр	Билэгжаргал	35	11-р сургууль
Мөнгө	Алтан-Од	Алтансүх	35	11-р сургууль
Хүрэл	Амар	Нямдаваа	31	Сант
Хүрэл	Амарзаяа	Пүрэвзаяа	27	Олонлог

X анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Батсайхан	Батмэнд	34	1-р сургууль
Мөнгө	Цацрал	Ганхөлөг	29	Сант
Мөнгө	Солтанмурат	Арманбек	27	Эмпати
Хүрэл	Найдансүрэн	Бямбасүрэн	23	1-р сургууль
Хүрэл	Гомбоцэрэн	Батбуян	23	Олонлог
Хүрэл	Болдбаатар	Цог	20	Сант

XI анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Хэнзий	Санжаахүү	35	Эмпати
Мөнгө	Мижиддорж	Лханаажав	34	Олонлог
Хүрэл	Бахыт	Нурсауле	28	11-р сургууль
Хүрэл	Рэнчиндорж	Амуударь	28	Олонлог
Хүрэл	Батсайхан	Долгормаа	28	Олонлог
Хүрэл	Алтангэрэл	Билэгжаргал	22	11-р сургууль

XII анги

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Гантөмөр	Өнөржаргал	36	11-р сургууль
Мөнгө	Баатар	Алтангэрэл	35	Эмпати
Мөнгө	Сосорбарам	Цэнд-Аюуш	29	Эмпати
Хүрэл	Ганбаатар	Амарсанаа	23.5	11-р сургууль
Хүрэл	Бямбачулуун	Ганхуяг	22.5	11-р сургууль
Хүрэл	Нямсайхан	Эрхэс	22	Оюунлаг

Бага ангийн багш

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Машбат	Отгонжаргал	32	1-р сургууль
Мөнгө	Пүрэвдорж	Чимэг	27	Олонлог
Хүрэл	Баатарсүрэн	Жаргалсүрэн	20.5	Орчлон
Хүрэл	Мэндбаяр	Чинчимэг	20.5	Олонлог

Дунд ангийн багш

Медал	Овог	Нэр	Оноо	Сургууль
Алт	Мягмар	Батбилэг	25	Орчлон
Мөнгө	Батмөнх	Ганбат	22	Эмпати
Хүрэл	Банзрагч	Зоригтбаатар	16	Хөвсгөл

Баг

Байр	Аймаг, хот	IX	X	XI	XII	ББ	ДБ	Нийт	Тоо	Дундаж
1	Улаанбаатар	321	256	275	273.5	133	126	1384.5	77	18.0
2	Хөвсгөл 1	21	17	21	14	10	32	115	9	12.8
3	Архангай 2	13	10	28	0	7	0	58	6	9.7
4	Баянхонгор	6	13	0	14	7	4	44	6	7.3

5	Архангай 1	18	1	7	8	8	1	43	6	7.2
6	Өвөрхангай	6	15	21	7	5	2	56	8	7.0
7	Орхон	3	16	12	3	10	4	48	7	6.9
8	Хэнтий	4	8	0	9	15	2	38	6	6.3
9	Увс	4	2	7	9	17	3	42	7	6.0
10	Дархан-Уул	3	4	9	7	9	2	34	6	5.7
11	Дундговь	7	9	6	0	7	2	31	6	5.2
12	Булган 1	7	8	0	1	8	5	29	6	4.8
13	Ховд	4	0	0	0	18	2	24	5	4.8
14	Дорнод	1	1	7	0	10	5	24	6	4.0
15	Сэлэнгэ	0	7	0	7	7	2	23	6	3.8
16	Дорноговь	3	4	0	0	13	6	26	7	3.7
17	Төв	3	2	7	2	4	3	21	6	3.5
18	Завхан	7	2	6	0	3	2	20	6	3.3
19	Өмнөговь	2	2	7	0	7	1	19	6	3.2
20	Баян-Өлгий	5	5	0	2	6	3	21	7	3.0
21	Сүхбаатар	2	0	7	0	9	3	21	7	3.0
22	Говьсүмбэр	0	2	0	0	16	2	20	7	2.9
23	Говь-Алтай	6	3	0	0	6	2	17	6	2.8
23	Булган 2	2	11	0	0	1	3	17	6	2.8

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Бодлого	Дэвшүүлсэн	Зассан	Бодлого	Дэвшүүлсэн	Зассан
IX-A1	Ц. Батхүү	Б. Сандагдорж	IX-B1	Б. Батцэнгэл	Ц. Батхүү
IX-A2	Б. Батцэнгэл	Ш. Доржсэмбэ	IX-B2	Б. Бат Од	Б. Бат Од
IX-A3	Б. Батцэнгэл	Т. Хулан	IX-B3	Б. Батцэнгэл	Т. Хулан
X-A1	Б. Батцэнгэл	Л. Оюунцэцэг	X-B1	Б. Батцэнгэл	Д. Даянцолмон
X-A2	Б. Батцэнгэл	Б. Бат Од	X-B2	Б. Батцэнгэл	Л. Оюунцэцэг
X-A3	Г. Баярмагнай	Ү. Отгонбаяр	X-B3	Б. Өлзийнасан	Б. Бат Од
XI-A1	В. Адьяасүрэн	Т. Базар	XI-B1	Б. Хоролдагва	Э. Азжаргал
XI-A2	Г. Батзаяа	Э. Азжаргал	XI-B2	Б. Хоролдагва	Б. Хоролдагва
XI-A3	Г. Батзаяа	Г. Батзаяа	XI-B3	Г. Баярмагнай	Ү. Отгонбаяр
XII-A1	Б. Бат Од	Б. Бат Од	XII-B1	Э. Азжаргал	Б. Батбаясгалан
XII-A2	Г. Батзаяа	Г. Батзаяа	XII-B2	Т. Базар	Т. Базар
XII-A3	Б. Бат-Од	Б. Батбаясгалан	XII-B3	Б. Батцэнгэл	Г. Батзаяа
ББ-A1	Б. Баяржаргал	Б. Баяржаргал	ББ-B1	Б. Баяржаргал	Б. Баяржаргал
ББ-A2	Ц. Батхүү	Ц. Батхүү	ББ-B2	Ш. Доржсэмбэ	Ш. Доржсэмбэ
ББ-A3	Б. Батцэнгэл	Д. Даянцолмон	ББ-B3	В. Адьяасүрэн	Б. Сандагдорж
ДБ-A1	Б. Бат Од	Л. Хадхүү	ДБ-B1	Б. Батцэнгэл	Л. Хадхүү
ДБ-A2	Г. Батзаяа	Б. Хоролдагва	ДБ-B2	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай
ДБ-A3	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай	ДБ-B3	Ү. Отгонбаяр	Ү. Отгонбаяр

Бодлогууд

IX анги

Бодлого IX-A1. $a_1 < a_2 < \dots < a_{53}$ байх натурал тоонуудын аль ч 27 ширхэг тооны нийлбэр нь үлдсэн 26 тооны нийлбэрээс их байдаг бол

а) a_1 хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?

б) a_1 нь хамгийн бага утгаа авч байх үед $a_2, \dots, a_{53}$ тоонуудын авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ц. Батхүү)

Бодлого IX-A2. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $BD = CE$ байхаар сонгон авчээ. BC, DE хэрчмийн дундаж цэгүүд M, N бол MN шулуун $\angle BAC$ өнцгийн биссектрисстэй параллель гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-A3. Натурал a тооны бүх натурал тоон хуваагчдыг өсөх эрэмбээр $a_1 < a_2 < \dots$ гэж, b тооны бүх натурал тоон хуваагчдыг өсөх эрэмбээр $b_1 < b_2 < \dots$ гэж дугааралжээ.

$$\begin{cases} a_{10} + b_{10} = a \\ a_{11} + b_{11} = b \end{cases}$$

байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B1. a, b нь $a + b = 1$ байх тоонууд бол

$$\sqrt{1 + 5a^2} + 5\sqrt{2 + b^2} \geq 9$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B2. AB, CD суурьтай, $AD = BC$ хажуу талтай адил хажуут $ABCD$ трапецийн диагоналиуд O цэгт огтлолцож байв. AD хажуу талын дундаж цэг M бөгөөд BCM гурвалжныг багтаасан тойрог AD шулууныг M цэгээс ялгаатай K цэгт огтолно. OK хэрчим нь $ABCD$ трапецийн суурьтай параллель гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого IX-B3. Цогт хунтайжийн талбай нь 1×1 нүднүүдэд хуваагдсан 10×10 хэлбэртэй байв. Нүднүүдийн орой дээр байрласан “цэгэн” гэрэл уг оройг агуулсан бүх нүдийг гэрэлтүүлнэ (квадратын хүрээн дээр гэрэл байрлуулж болно). Нэг гэрэл шатсан ч үлдсэн гэрлүүд нь талбайг бүрэн гэрэлтүүлж байхын тулд хамгийн цөөндөө хэдэн гэрэл байрлуулах шаардлагатай вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Х анги

Бодлого X-A1. Тус бүр 1, 1 хөзөртэй n хүүхэд нэг тойрог болон зогсож дараах тоглоомыг тоглов. Аль нэг хүүхэд цагийн зүүний дагуу дараа зогссон хүүхэддээ 1 хөзөр өгнө. Авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 2 хөзөр өгнө. Үүнийг авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 1 хөзөр өгнө. Үүнийг авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 2 хөзөр өгнө. Гэх мэтчилэн хүүхэд дараагийн хүүхэддээ 1 ба 2 хөзрийг ээлжлэн өгнө. Хөзөргүй болсон хүүхэд тоглоомоос хасагдана. Нэг хүүхэд бүх хөзөр цуглардаг байх n -ийн боломжит бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-A2. A, B цэгүүдэд огтлолцдог ω_1, ω_2 тойргууд өгөгджээ. B цэгийг дайрсан шулуун ω_1 тойргийг C цэгт, ω_2 тойргийг D цэгт дахин огтолно. AD шулуун ω_1 тойргийг A цэгээс ялгаатай E цэгт, AC шулуун ω_2 тойргийг A цэгээс ялгаатай F цэгт огтолно. AEF гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O бол $OB \perp CD$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого X-A3. p нь $p \geq 5$ байх анхны тоо бол $m + n < p$ бөгөөд $2^m \cdot 3^n - 1$ ялгавар нь p -д хуваагддаг байх натурал m, n тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого X-B1. Бодлого IX-B1.**Бодлого X-B2.** Бодлого IX-B3.

Бодлого X-B3. ω тойрогт багтсан хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүдийг татжээ. DE шулуун ω тойргийг P, Q цэгүүдээр огтлох бөгөөд энэ шулуун дээр цэгүүд P, E, D, Q гэсэн дараалалтай оршино. APQ ба BQP өнцгийн биссектриссүүд нь ω тойргийг харгалзан K, L цэгүүдэд огтолдог бол KL шулуун гурвалжны ACB өнцгийн биссектрисст перпендикуляр гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

XI анги

Бодлого XI-A1. $a + b + c + d = 4$ байх эерэг a, b, c, d тоонуудын хувьд

$$a\sqrt{a+8} + b\sqrt{b+8} + c\sqrt{c+8} + d\sqrt{d+8} \geq 12$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: В. Адьяасүрэн)

Бодлого XI-A2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD, BE өндрүүдийн огтлолцлын цэг H бөгөөд багтаасан тойргийн төв O байв. AH хэрчмийн дундаж цэг M бөгөөд O цэгийг дайрсан гурвалжны BC талтай параллель шулуун AB талыг F цэгт огтолно. $\angle CMF = 90^\circ$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-A3. Натурал n тооны бүх хуваагчийн нийлбэрийг $\sigma(n)$ гэж тэмдэглэе. Жишээ нь $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ юм. $2^{\sigma(n)} - 1$ ялгавар нь n -д хуваагддаг байх төгсгөлгүй олон натурал n тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XI-B1. ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиудын огтлолцолын E цэгийг дайрсан шулуун AB , BC шулуунуудыг харгалзан P , Q цэгүүдэд огтолно. D , E цэгүүдийг дайрсан, PQ шулууныг E цэгт шүргэдэг тойрог ω тойргийг D цэгээс ялгаатай R цэгт огтолно. B , P , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодлого XI-B2. Олимпиадад 300 сурагч оролцсон бөгөөд аль ч хоёр нь бие биеэ таньдаг 3 сурагч олддоггүй байв. Олимпиадад оролцсон сурагч бүрийн танилын тоо n -ээс хэтрэхгүй бөгөөд $1 \leq m \leq n$ байх m бүрийн хувьд яг m танилтай ядаж нэг сурагч олддог байжээ. n -ийн байж болох хамгийн их утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва, Ш. Доржсэмбэ)

Бодлого XI-B3. Зохиомол N тоо өгөгдөв. N -ээс хэтрэхгүй, N -тэй харилцан анхны биш бүх натурал тоог өсөх эрэмбээр $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ гэж жагсааж бичжээ. $a_1, a_2, \dots, a_m$ тоонуудын ямар ч $b_1, \dots, b_m$ сэлгэмлийн хувьд $a_i b_i - a_j b_j$ ялгавар нь N -д хуваагддаг байх ялгаатай i, j дугаарууд олдохыг харуул.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

XII анги

Бодлого XII-A1. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$(a - b)f(a + b) + (b - c)f(b + c) + (c - a)f(c + a) = 0$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого XII-A2. Элдэв талт ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A, C цэгт татсан шүргэгчүүд P цэгт огтлолцдог бөгөөд BB' нь ω тойргийн диаметр байв. BP шулуун нь ω тойргийг B цэгээс ялгаатай D цэгт огтолно. $\angle ABC$ өнцөгийн гадаад биссектрис нь $B'A$, $B'C$ шулуунуудтай харгалзан A', C' цэгт огтлолцдог бол A', B', C', D цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XII-A3. $(a_1^{2017} + a_2)(a_2^{2017} + a_3) \dots (a_{2016}^{2017} + a_{2017})(a_{2017}^{2017} + a_1)$ үржвэр нь ямар нэг анхны тооны

а) $2017 \cdot 2018$ зэрэгт,

б) $2017 \cdot 2023$ зэрэгт байх натурал $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого XII-Б1. Бодлого XI-Б2.

Бодлого XII-Б2. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a^4 + 4b^2 + 7} + \frac{1}{b^4 + 4c^2 + 7} + \frac{1}{c^4 + 4a^2 + 7} \leq \frac{1}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого XII-Б3. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байв. Гурвалжны BC тал дээр D цэгийг, BC талын үргэлжлэл дээр C оройгоос цаана E цэгийг $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ байхаар сонгон авчээ. D цэгээс IE шулуун руу буулгасан перпендикуляр нь DH бол $\angle AHE = \angle IDE$ байхыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл, Г. Батзаяа)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Нэгэн сургуулийн нийт сурагчдын 22.1%-аас их, 22.8%-аас бага хувь нь “Кенгүрү” олимпиадад оролцож, нийт сурагчдын 2.6%-аас их, 2.63%-аас бага хувь нь медаль хүртжээ. Энэ сургуулиас олимпиадад хамгийн цөөндөө хэдэн сурагч оролцсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-А2. Бодлого IX-A1.

Бодлого ББ-А3. Бодлого X-A1.

Бодлого ББ-Б1. Баяраад эсрэг талс дээрх нүднүүдийн нийлбэр нь 7 байдаг гурван ижил шоо байв. Тэрээр шоонуудаа зэрэг орхижээ. Түүнд шооны гурван талс нь харагдаж, үлдсэн гурван талс нь харагдахгүй бөгөөд эсрэг хоёр талсын яг нэг нь харагдана. Баяраад харагдаж байгаа нүднүүдийн нийт тоо хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ББ-Б2. $x^2 + y^2 = 2017(x + y)$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон x, y шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодлого ББ-Б3. 2 мөр n баганатай хүснэгтийн эхний мөрөнд 1, 2, ..., n тоонуудыг бичсэн байв. Хүснэгтийн багана бүрт бичигдсэн хоёр тооны нийлбэр бүтэн квадрат тоо байхаар 2-р мөрөнд 1, 2, ..., n тоонуудыг бичиж болдог байх n -ийн бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: В. Адьяасүрэн)

Дунд ангийн багш**Бодлого ДБ-А1.** Бодлого XII-A1.**Бодлого ДБ-А2.** Бодлого XII-A2.**Бодлого ДБ-А3.** p нь $p \geq 5$ байх анхны тоо бол $m+n \leq (p+1)/2$ бөгөөд $2^m \cdot 3^n - 1$ ялгавар нь p -д хуваагддаг байх натурал m, n тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-Б1. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n-1}$ тоонуудын арифметик дундаж нь A бол

$$2((x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \dots + (x_{2n-1} - A)^2) \geq (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_n)^2 + \dots + (x_{2n-1} - x_n)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-Б2. Бодлого XI-B3.**Бодлого ДБ-Б3.** $\{1, 2, \dots, 2017\}$ олонлогийн 30 элементтэй A дэд олонлог, мөн 31 элементтэй B дэд олонлог өгөгджээ. $a \in A, b \in B$ үед $a + nb$ хэлбэртэй бүх тоонуудыг 2017-д хуваахад дор хаяж 730 ширхэг ялгаатай үлдэгдэл гардаг натурал n тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолтууд**VII анги****VIII анги****IX анги****Бодлого IX-A1.** $a_1 < a_2 < \dots < a_{53}$ байх натурал тоонуудын аль ч 27 ширхэг тооны нийлбэр нь үлдсэн 26 тооны нийлбэрээс их байдаг бола) a_1 хамгийн багадаа хэд байж болох вэ?б) a_1 нь хамгийн бага утгаа авч байх үед $a_2, \dots, a_{53}$ тоонуудын авч болох бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ц. Батхүү)

Бодолт. Бодлогын өгсөн нөхцөл нь дараах нөхцөлтэй ижил чанартай байх нь илэрхий.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{27} > a_{28} + \dots + a_{53}. \quad (*)$$

Мөн $1 \leq i \leq 27$ байх дурын i тооны хувьд $a_{i+26} \geq a_{i+25} + 1 \geq \dots \geq a_i + 26$ байна. Эндээс $a_{i+26} - a_i \geq 26$ болох ба (*) нөхцөлөөс

$$a_1 \geq 1 + \sum_{i=2}^{27} (a_{i+26} - a_i) \geq 1 + 26 \cdot 26 = 677.$$

гэж гарна. Одоо a_1 -ийн хамгийн бага утга нь яг 677 гэж батлахад хангалттай. Хэрэв $a_1 = 677$ бол дээрх тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ хүрэх ёстой. Эндээс $2 \leq i \leq 27$ бүрийн хувьд $a_{i+26} =$

$a_i + 26$ ба $2 \leq j \leq 53$ бүрийн хувьд $a_j = a_{j+1} - 1 = \dots = a_{j+26} - 26$ болно. Үүнээс хэрэв $a_2 = n$ бол $a_3 = n + 1, \dots, a_{53} = n + 51$ ба $n \geq a_1 + 1 = 678$ байна.

Бодлого IX-A2. ABC гурвалжны AB тал дээр D цэгийг, AC тал дээр E цэгийг $BD = CE$ байхаар сонгон авчээ. BC, DE хэрчмийн дундаж цэгүүд M, N бол MN шулуун $\angle BAC$ өнцгийн биссектрисстэй параллель гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

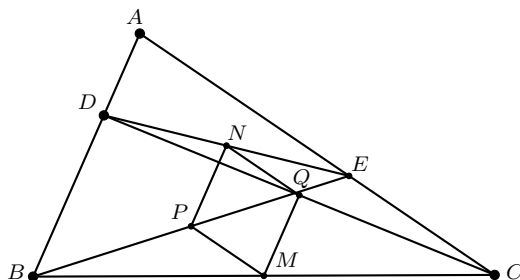
Бодолт. A өнгийн биссектрисс нь AL , P ба Q нь харгалзан BE, CD талуудын дундаж цэгүүд байг. Тэгвэл PN ба MQ нь BDE ба BDC гурвалжны дундаж шугам тул

$$PN = QM = \frac{BD}{2}$$

ба адилаар

$$NQ = PM = \frac{EC}{2}.$$

Бодлогын өгсөн нөхцөлөөр $BD = EC$ тул $PNQM$ нь ромбо болно. Үүнээс MN нь $\angle PNQ$ -ийн биссектрисс болох ба $PN \parallel BA, NQ \parallel AC$ тул $AL \parallel MN$ байна.



Бодлого IX-A3. Натурал a тооны бүх натурал тоон хуваагчдыг өсөх эрэмбээр $a_1 < a_2 < \dots$ гэж, b тооны бүх натурал тоон хуваагчдыг өсөх эрэмбээр $b_1 < b_2 < \dots$ гэж дугааралжээ.

$$\begin{cases} a_{10} + b_{10} = a \\ a_{11} + b_{11} = b \end{cases}$$

байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: $a = 2^{10}$ and $b = 2^{11}$.

Хэрэв $b = b_{11}$ бол $a_{11} = 0$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $b \geq 2b_{11}$ байна.

$a = a_{10} \cdot n$ байг. Тэгвэл $a > a_{10}$ тул $n \geq 2$ ба

$$b_{10} = a - a_{10} = a_{10} \cdot (n - 1) \geq a_{10}.$$

болно.

Үүнээс $2b_{10} \geq b_{10} + a_{10} = a$ болох ба эндээс $2b_{11} > 2b_{10} \geq a \geq a_{11}$ ба $3b_{11} > b_{11} + a_{11} = b$ гэж гарна. Иймд $b = 2b_{11}$ and $a_{11} = b_{11}$ болов.

Иймд $b = 2a_{11} > a > a_{10}$ гэдгээс $a = a_{11}$ ба a нь яг 11 хуваагчтай болох тул ямар нэг p анхны тооны хувьд $a = p^{10}$ болно. Үүнээс $b = 2 \cdot p^{10}$ ба үүнээс $p = 2$ гэдгийг хялбархан харж болно. Иймд $a = 2^{10}$, $b = 2^{11}$ гэсэн шийдтэй.

Бодлого IX-Б1. a, b нь $a + b = 1$ байх тоонууд бол

$$\sqrt{1 + 5a^2} + 5\sqrt{2 + b^2} \geq 9$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Дурын a, b хувьд $5(2a - 1)^2 \geq 0$ ба $2(2b - 1)^2 \geq 0$ гэдгээс

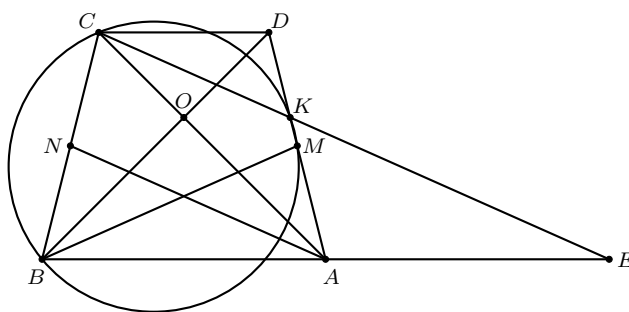
$$\sqrt{1 + 5a^2} \geq \frac{5a + 2}{3} \quad \text{ба} \quad \sqrt{2 + b^2} \geq \frac{b + 4}{3}$$

болно. Иймд $\sqrt{1 + 5a^2} + 5\sqrt{2 + b^2} \geq \frac{5(a + b) + 22}{3} = 9$ байна. Зөвхөн $a = b = \frac{1}{2}$ үед тэнцэтгэл биелнэ.

Бодлого IX-Б2. AB, CD суурьтай, $AD = BC$ хажуу талтай адил хажуут $ABCD$ трапецийн диагоналиуд O цэгт огтлолцож байв. AD хажуу талын дундаж цэг M бөгөөд BCM гурвалжныг багтаасан тойрог AD шулууныг M цэгээс ялгаатай K цэгт огтолно. OK хэрчим нь $ABCD$ трапецийн суурьтай параллель гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт. CB талын дундаж цэг N ба $AB \cap CK = E$ байг. $MBSK$ багтсан дөрвөн өнцөгт гэдгээс $\angle AMB = \angle BCE$ ба $ABCD$ адил хажуут гэдгээс $\angle AMB = \angle ANB$ байна. Үүнээс $AN \parallel EC$ ба Фалесын теоремоор $1 = \frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AE}$ тул $BA = AE$ ба $\frac{DK}{KA} = \frac{CD}{AE} = \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{OB}$ болно. Эндээс $OK \parallel AB$ болж батлагдав.



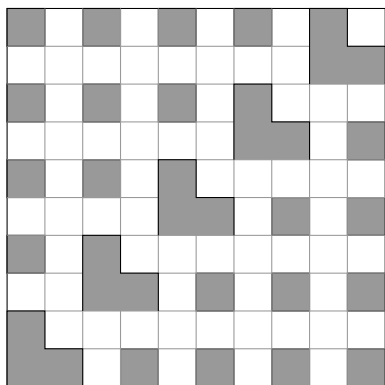
Бодлого IX-Б3. Цогт хунтайжийн талбай нь 1×1 нүднүүдэд хуваагдсан 10×10 хэлбэртэй байв. Нүднүүдийн орой дээр байрласан “цэгэн” гэрэл уг оройг агуулсан бүх нүдийг гэрэлтүүлнэ (квадратын хүрээн дээр гэрэл байрлуулж болно). Нэг гэрэл шатсан ч үлдсэн гэрлүүд нь талбайг бүрэн гэрэлтүүлж байхын тулд хамгийн цөөндөө хэдэн гэрэл байрлуулах шаардлагатай вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

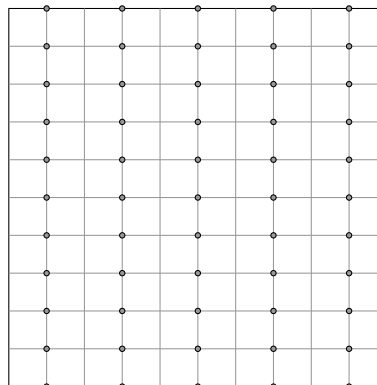
Бодолт. Хамгийн багадаа 55 ширхэг гэрэл байрлуулах шаардлагатай.

Зураг 1-ийн бүх хар нүдэнд ядаж хоёр гэрэл хэрэгтэй ба бүх гурван хар нүднээс тогтох дүрсэнд 3 гэрэл хэрэгтэй. Иймд ядаж $2 \times 20 + 3 \times 5 = 55$ гэрэл хэрэгтэй.

Зураг 2-т шаардлага хангахаар 55 гэрэл байрлуулж болохыг харуулав.



Зураг 1



Зураг 2

Х анги

Бодлого Х-А1. Тус бүр 1, 1 хөзөртэй n хүүхэд нэг тойрог болон зогсож дараах тоглоомыг тоглов. Аль нэг хүүхэд цагийн зүүний дагуу дараа зогссон хүүхэддээ 1 хөзөр өгнө. Авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 2 хөзөр өгнө. Үүнийг авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 1 хөзөр өгнө. Үүнийг авсан хүүхэд нь дараагийн хүүхэддээ 2 хөзөр өгнө. Гэх мэтчилэн хүүхэд дараагийн хүүхэддээ 1 ба 2 хөзөрийг ээлжлэн өгнө. Хөзөргүй болсон хүүхэд тоглоомоос хасагдана. Нэг хүүхэд бүх хөзөр цуглардаг байх n -ийн боломжит бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. Хариу: $n = 2$, $n = 2^k + 1$, $n = 2^k + 2$, $k \geq 1$.

Тоглоомыг эхлэх хүүхдийг a_1 гээд түүнээс цааш цагийн зүүний дагуу a_2 , a_3 , ..., a_n гэж тэмдэглэе.

$n = 2$ үед a_1 нь 1 ширхэг хөзөр a_2 -т өгч, өөрөө хасагдана. Өөрөөр хэлбэл, a_2 ганцаараа үлдэнэ.

$n = 3$ үед a_1 нь 1 ширхэг хөзөр a_2 -т, a_2 нь 2 ширхэг хөзөр a_3 -т өгч 1, 2-р хүүхэд хоёул хасагдаж 3-р хүүхэд л үлдэнэ.

$n \geq 4$ байг. Үйлдэл хийж бүтэн тойроогүй байхад индекс нь 1-ээс ялгаатай сондгой тоо байвал уг хүүхэд ямагт 2 хөзөр авч, 1 хөзөр өгөх тул $1 + 2 - 1 = 2$ хөзөртэй хэвээр үлдэнэ. Харин тэгш индекстэй хүүхдүүд бүгд 1 хөзөр авч, 2 хөзөр өгч тоглоомоос хасагдана.

- $n = 2n_1$ байг. Дээр хэлсэнчлэн a_5 , a_7 , ..., a_{2n_1-1} тус бүр 2 ширхэг хөзөртэй болсон. Харин a_2 , a_4 , ..., a_{2n_1} -үүд бүгд хасагдсан. Гэвч a_{2n_1} хасагдахдаа a_3 -т 2 хөзөр өгсөн тул a_3 нь $2 + 2 = 4$ хөзөртэй үлдэнэ. Цааш үйлдэл a_3 нь 1 хөзөр өгч эхэлнэ. Энд a_3 , a_5 , ..., a_{2n_1-1} гэсэн $n_1 - 1$ ширхэг хүүхэд үлдсэн байна.
- $n = 2n_1 + 1$ байг. Тэгвэл a_3 , a_5 , a_7 , ..., a_{2n_1+1} тус бүр 2 ширхэг хөзөртэй болно. Харин a_{2n_1+1} нь a_3 -д 1 хөзөр өгөөгүй байхад a_{2n_1+1} нь 3 ширхэг хөзөртэй ба бусад нь 2 ширхэг хөзөртэй байна. Цаашид үйлдэл a_{2n_1+1} -ээс 1 хөзөр өгч эхлэнэ.

Тоглолтын явцад n' ширхэг 2-оос цөөнгүй тооны хүүхэд 2-оос цөөнгүй хөзөртэй үлдвэл тэдгээрийг нар зөв үйлдэл хийх хүүхдээс эхлэн $b_1, b_2, \dots, b'_n$ гэж тэмдэглэе. Энэ тохиолдлыг анхны байрлал гее. b_1 нь f ширхэг хөзөртэй, бусад нь g ширхэг хөзөртэй ба $f > g \geq 2$ гее.

- $n' = 2c + 1$ байг. $y, x \in \{1, 2\}$ ба $x \neq y$ гее. b_1 нь x -г өгч эхэлбэл нэг тойроход тэгш индекстэй хүүхэд бүр x -г авч, y -г өгөн, 1-ээс ялгаатай сондгой индекстэй хүүхэд бүр y -г авч, x -г өгнө. b_{2c+1} нь b_1 -д x -г өгнө. Ахиад нэг тойроход тэгш индекстэй хүүхэд бүр y -г авч, x -г өгнө. 1-ээс ялгаатай сондгой индекстэй хүүхэд бүр x -г авч, y -г өгнө. Харин b_{2c+1} нь b_1 -д y -г өгсөн, цааш b_1 нь x -ийг өгч эхлэнэ. Хүн бүр $x + y$ -ийг авч, $x + y$ -ийг өгөх тул хөзрийн тоо нь өөрчлөгдөхгүй. Иймд энэ цикл төгсгөлгүй үргэлжлэх тул n' нь сондгой байж болохгүй.

Иймд $n' = 2c$ гее. b_1 нь 1 хөзөр өгч эхлэнэ. Нэг тойроход сондгой индекстэй хүүхэд бүр 1 хөзөр өгч, 2 хөзөр авах тул тэдгээрийн хөзрийн тоо 1-ээр ихэснэ. Харин тэгш индекстэй хүүхэд бүр 1 хөзөр авч, 2 хөзөр өгөх тул тэдгээрийн хөзрийн тоо 1-ээр багасна. b_{2c} нь b_1 -д 2 хөзөр өгөх тул b_1 нь дахиад 1 хөзөр өгч эхлэнэ. Иймд энэ циклийг g удаа хийхэд тэгш индекстэй хүүхэд бүр хөзөргүй болж хасагдах ба 1-ээс ялгаатай сондгой индекстэй хүүхэд бүр $2g$ хөзөртэй болно. Харин b_1 нь $f + g$ ширхэг хөзөртэй болно. $f + g \geq 2g \geq 2$ тул анхны байрлал руу шилжинэ. Иймд дээрх хийсэн зарчмаа давтсаар ямар нэг $k \geq 0$ бүхэл тооны хувьд $n' = 2^k$ байна гэдгийг хялбархан харуулж болно.

- $n = 2n_1$ бол $n_1 - 1 = n' = 2^k$ болох ба $n = 2n_1 = 2(2^k + 1) = 2^{k+1} + 2$ байна. Энэ тохиолдол үйлдэл хийсээр a_3 үлдэнэ.
- $n = 2n_1 + 1$ бол $n_1 = 2^k$ болох ба $n = 2^{k+1} + 1$ болно. Энэ тохиолдолд үйлдэл хийсээр a_n үлдэнэ.

Бодлого Х-А2. A, B цэгүүдэд огтлолцдог ω_1, ω_2 тойргууд өгөгджээ. B цэгийг дайрсан шулуун ω_1 тойргийг C цэгт, ω_2 тойргийг D цэгт дахин огтолно. AD шулуун ω_1 тойргийг A цэгээс ялгаатай E цэгт, AC шулуун ω_2 тойргийг A цэгээс ялгаатай F цэгт огтолно. AEF гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O бол $OB \perp CD$ гэдгийг батал.

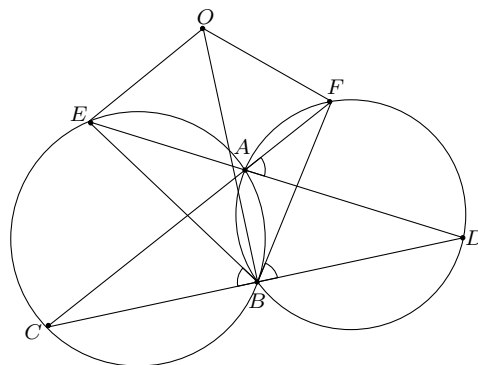
(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт.

$\angle EAC = \alpha$ гее. O нь $\triangle EAF$ -г багтаасан тойргийн төв байг. Тэгвэл $\angle EOF = 2\alpha$ байна. Мөн

$$\begin{aligned}\angle EBC &= \angle EAC = \alpha \\ \angle FBD &= \angle FAD = \alpha\end{aligned}$$

гэдгээс $\angle EBF = 2\alpha$ болно. Эндээс $\angle EOF + \angle EBF = 180^\circ$ гэж гарах тул $EOFB$ нь тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт болох ба $EO = FO$ гэдгээс $\angle EBO = \angle OFB$ болно. Одоо $\angle EBC = \angle FBD$ болохыг санавал $\angle OBD = 90^\circ$ болж батлагдав.



Бодлого Х-А3. p нь $p \geq 5$ байх анхны тоо бол $m + n < p$ бөгөөд $2^m \cdot 3^n - 1$ ялгавар нь p -д хуваагддаг байх натурал m, n тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $2^i 3^j$, $1 \leq i, j \leq p-1$ хэлбэртэй тоонуудыг авч үзье. Нийт $(p-1)^2 \geq p+1$ ширхэг тоо байгаа тул Дирихлейн зарчмаар $2^{i_1} 3^{j_1} \equiv 2^{i_2} 3^{j_2} \pmod{p}$ байх $1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq p-1$ байх ялгаатай (i_1, j_1) , (i_2, j_2) хосууд олдоно. Фермагийн бага теоремоор $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ тул $2^i = 3^j$ байх $1 \leq i, j \leq p-2$ дугаарууд олдоно.

$i \leq j$ бол $m = i$ ба $n = p-1-j$, харин $i > j$ бол $m = p-1-i$, $n = j$ гэж сонгоход бодлогын нөхцлийг биелүүлнэ.

Бодлого Х-Б1. Бодлого IX-Б1.

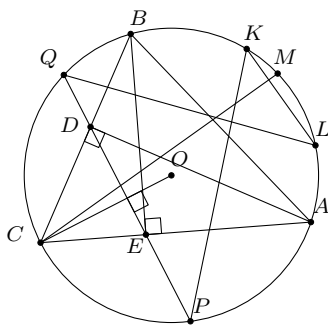
Бодлого Х-Б2. Бодлого IX-Б3.

Бодлого Х-Б3. ω тойрогт багтсан хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , BE өндрүүдийг татжээ. DE шулуун ω тойргийг P , Q цэгүүдээр огтлох бөгөөд энэ шулуун дээр цэгүүд P , E , D , Q гэсэн дараалалтай оршино. APQ ба BQP өнцгийн биссектриссүүд нь ω тойргийг харгалзан K , L цэгүүдэд огтолдог бол KL шулуун гурвалжны ACB өнцгийн биссектрисст перпендикуляр гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Өлзийнасан)

Бодолт. ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн төв O болог. $\angle BCO = 90^\circ - \angle A$ ба $\angle CDE = \angle A$ тул $\angle BCO + \angle CDE = (90^\circ - \angle A) + \angle A = 90^\circ$ болно. Эндээс $PQ \perp CO$ болох тул $\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{CP}$ болж, үүнийг x гэж тэмдэглэе. Хэрэв $\overset{\frown}{QB} = 2y$, $\overset{\frown}{BA} = 2z$, $\overset{\frown}{AP} = 2t$ гэвэл $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} = z$ болно. $\overset{\frown}{QK} = \overset{\frown}{KA}$ учир $\overset{\frown}{QA} = 2(y+z)$ ба $\overset{\frown}{QK} = y+z$ болов. Эндээс $\overset{\frown}{KM} = y$ болно.

$\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{LP}$ учраас $\overset{\frown}{BP} = 2(t+z)$ ба $\overset{\frown}{LP} = t+z$ болно. Иймээс $\overset{\frown}{LC} = z+t+x$ болох ба $\overset{\frown}{KM} + \overset{\frown}{LC} = y+z+t+x = \overset{\frown}{CQ} + \overset{\frown}{QB} + \overset{\frown}{BK} + \overset{\frown}{KM} = 180^\circ$ болно. Эндээс $KL \perp MC$ болж батлагдав.



XI анги

Бодлого XI-A1. $a + b + c + d = 4$ байх эерэг a, b, c, d тоонуудын хувьд

$$a\sqrt{a+8} + b\sqrt{b+8} + c\sqrt{c+8} + d\sqrt{d+8} \geq 12$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: В. Адьяасүрэн)

Бодолт. Эхлээд $a\sqrt{a+8} \geq \frac{19a-1}{6}$ биелэхийг баталъя.

$$a\sqrt{a+8} \geq a\sqrt{9\sqrt[9]{a}} = 3a\sqrt[9]{a} = \frac{1}{6} \left((18\sqrt[9]{a^{19}} + 1) - 1 \right) \geq \frac{1}{6} (19a - 1)$$

болж батлагдав. Яг адилаар

$$b\sqrt{b+8} \geq \frac{19b-1}{6}, \quad c\sqrt{c+8} \geq \frac{19c-1}{6}, \quad d\sqrt{d+8} \geq \frac{19d-1}{6}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелэх тул

$$\begin{aligned} a\sqrt{a+8} + b\sqrt{b+8} + c\sqrt{c+8} + d\sqrt{d+8} &\geq \frac{19a-1}{6} + \frac{19b-1}{6} + \frac{19c-1}{6} + \frac{19d-1}{6} \\ &= \frac{19(a+b+c+d) - 4}{6} = 12 \end{aligned}$$

болж батлагдав. Бодолтын явцаас зөвхөн $a = b = c = d = 1$ үед тэнцэтгэл биелэх нь гарна.

Бодлого XI-A2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны AD , BE өндрүүдийн огтлолцлын цэг H бөгөөд багтаасан тойргийн төв O байв. AH хэрчмийн дундаж цэг M бөгөөд O цэгийг дайрсан гурвалжны BC талтай параллель шулуун AB талыг F цэгт огтолно. $\angle CMF = 90^\circ$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

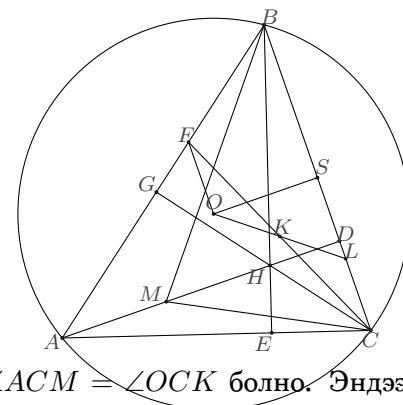
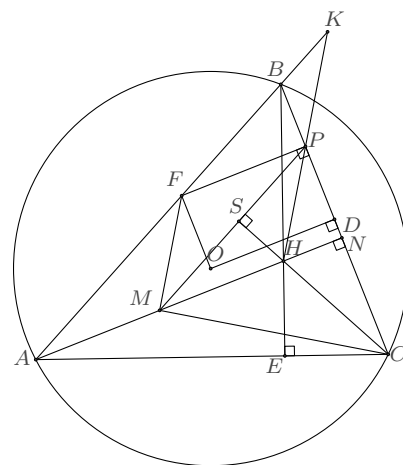
Бодолт 1. (М. Лханаажавын бодолт).

BC тал дээр $KF \perp BC$ байх P цэг авъя. $AB \cap HP = K$ ба N нь BC талын дундаж цэг байг. $ON = \frac{AH}{2}$, $FP = ON$ тул $FP = \frac{AH}{2}$ болно. $FP \parallel AH$ ба $FP = \frac{AH}{2}$ гэдгээс FP нь $\triangle AKH$ гурвалжны дундаж шугам болно. Иймд $AF = FK$ ба $KP = PH$ байна. Эндээс $MP \parallel AK$ ба $MP = \frac{AK}{2}$ болно. $MP \parallel AK$ гэдгээс $CH \perp MP$ болно. $CH \cap MP = L$ гээ. $\triangle CMP$ гурвалжны CL , MD өндрүүд H цэгт огтлолцоно гэдгээс $PH \perp MC$ болно. $PH \perp MC$, $PH \parallel FM$ тул $FM \perp MC$ буюу $\angle CMF = 90^\circ$ болж батлагдав.

Бодолт 2. (Б. Нурсаулегийн бодолт)

K нь FC хэрчмийн дундаж, $OK \cap BC = L$ байг. $FK = KC$, $FO \parallel BC$ гэдгээс $FOCL$ нь параллелограмм болно. Иймд $OC = FL$ болно. Нөгөө талаас $FL = OC = OB$, $FO \parallel BC$ тул $FOLB$ адил хажуут трапец болно. Иймд $\angle FBL = \angle OLB$ байна. O цэгээс BC руу OS перпендикуляр буулгавал $\angle BAD = \angle LOS$ болно. $\angle COS = \angle BAC$ тул $\angle COL = \angle CAH$ болно. $\angle OSC = \angle ASC$ гэдгээс $\triangle AGC = \triangle OSC$ болох ба эндээс $\angle AGS = \angle OSC$ байна. Иймд $\triangle CAH = \triangle COL$ болов.

Мөн CM , CK нь тус тус $\triangle CAH$, $\triangle COL$ -ын медиан тул $\angle ACM = \angle OCK$ болно. Эндээс $\angle ACO = \angle MCK$ байна.



$\triangle OKC \sim \triangle AMC$ тул $\frac{KC}{CM} = \frac{OC}{AC}$ ба $\angle KCM = \angle OCA$ тул $\triangle KCM \sim \triangle OCA$ болж $KC = KM$ гэж гарна. K цэгт төвтэй FC диаметртэй тойрог дээр M орших цэг болж $\angle FMC = 90^\circ$ болж батлагдав.

Бодлого XI-A3. Натурал n тооны бүх хуваагчийн нийлбэрийг $\sigma(n)$ гэж тэмдэглэе. Жишээ нь $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ юм. $2^{\sigma(n)} - 1$ ялгавар нь n -д хуваагддаг байх төгсгөлгүй олон натурал n тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт 1. Дурын $k \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $p_j | 2^{2^j} + 1$, $0 \leq j < k$ байх $2 < p_0, \dots, p_{k-1}$ анхны тоонуудыг сонговол $p_0 \neq p_j$, $(0 \neq j)$ байна. (Учир нь хэрэв $q = p_0 = p_j$, $0 < j < k$ бол $2^{2^0} \equiv -1 \pmod{p_0 = q}$, $-1 \equiv 2^{2^j} = (2^{2^0})^{2^{j-0}} \equiv (-1)^{2^{j-0}} = 1 \pmod{p_j = q}$ гэдгээс $q = 2$ болж зөрчилд хүрнэ.) Одоо $n = p_0 p_1 \dots p_{k-1}$ тооны хувьд $2^{\sigma(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ гэж батална.

$2^k | \sigma(n) = (p_0 + 1) \dots (p_{k-1} + 1)$ тул $2^{2^k} - 1 | 2^{\sigma(n)} - 1$ болох ба дурын $0 \leq j < k$ -ийн хувьд $p_j | 2^{2^j} + 1 | 2^{2^k} - 1$ тул $n | 2^{2^k} - 1 | 2^{\sigma(n)} - 1$ болж батлагдана.

Бодолт 2. Дурын натурал k тооны хувьд $n = 2^{2^k} - 1$ шийд гэдгийг индукцээр хялбар баталж болно.

Бодлого XI-B1. ω тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC , BD диагоналиудын огтлолцолын E цэгийг дайрсан шулуун AB , BC шулуунуудыг харгалзан P , Q цэгүүдэд огтолно. D , E цэгүүдийг дайрсан, PQ шулууныг E цэгт шүргэдэг тойрог ω тойргийг D цэгээс ялгаатай R цэгт огтолно. B , P , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодолт. D , E цэгүүдийг дайрсан PQ шулууныг E цэгт шүргэдэг тойргийг ω_1 гэе. PQ шүргэгч учраас $\angle EDR = \angle QER$ болно. Нөгөө талаас $\angle EDR = \angle BAR$ тул $\angle PAR = \angle PER$ болно. Иймд P , A , E , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\angle RBC = \angle RAE$ тул $\angle RPQ = \angle RBQ$ болж P , B , Q , R цэгүүд нэг тойрог дээр орших нь батлагдав.

Бодолт. p нь N -ийн анхны тоон хуваагч болог. A -аар N -ээс хэтрэхгүй N/p -д хуваагдах тоонуудын олонлогийг тэмдэглэе. Хэрэв $a_i \in A$ ба $b_i \notin A$ байх i дугаар олддог бол $b_j \in A$ ба $a_j \notin A$ байх j дугаар олдоно. Иймд $a_i b_i$ үржвэрүүд дотор N/p -д хуваагдах тоонуудын тоо $p+1$ -ээс багагүй байх тул Дирихлейн зарчмаар өгөгдсөн нөхцлийг биелүүлэх хос дугаар олдоно.

Эсрэг тохиолдолд $a_i \in A \Leftrightarrow b_i \in A$ болно. Мөн $\{a_i p/N \mid a_i \in A\} = \{1, 2, \dots, p\}$ байх нь тодорхой. Иймд $1, \dots, p-1$ тоонуудын сэлгэмэл $b_1, \dots, b_{p-1}$ -ийн хувьд $ib_i \equiv jb_j \pmod{p}$ байх i ба j дугаар олдохыг үзүүлэхэд хангалттай. Олдохгүй гэвэл $\prod jb_j \equiv (p-1)! \pmod{p}$ болох бөгөөд энэ нь Вильсоны теоремд зөрчинө.

XII анги

Бодлого XII-A1. Дурын бодит a, b, c тоонуудын хувьд

$$(a-b)f(a+b) + (b-c)f(b+c) + (c-a)f(c+a) = 0$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт. Хариу: $f(x) = Ax + B$ (A, B бодит).

Дурын A, B бодит тоонуудын хувьд $f(x) = Ax + B$ гэвэл

$$(a-b)f(a+b) + (b-c)f(b+c) + (c-a)f(c+a) = \sum A(a^2 - b^2) + B(x-y) = 0$$

тул f нь шийд болно. Одоо бүх шийд ийм хэлбэртэй болохыг харуулъя.

Өгсөн нөхцөлд $a = \frac{x-1}{2}$, $b = \frac{x+1}{2}$ ба $c = \frac{1-x}{2}$ гэж орлуулбал

$$\begin{cases} a+b=x \\ b+c=1 \\ c+a=0 \end{cases} \quad \text{ба} \quad \begin{cases} a-b=-1 \\ b-c=x \\ c-a=1-x \end{cases}$$

болох тул $-f(x) + xf(1) + (1-x)f(0) = 0$ болно. Энд $A = f(1) - f(0)$ ба $B = f(0)$ гэвэл $f(x) = Ax + B$ болно.

Бодлого XII-A2. Элдэв талт ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийн A, C цэгт татсан шүргэгчүүд P цэгт огтлолцдог бөгөөд BB' нь ω тойргийн диаметр байв. BP шулуун нь ω тойргийг B цэгээс ялгаатай D цэгт огтолно. $\angle ABC$ өнцөгийн гадаад биссектрис нь $B'A$, $B'C$ шулуунуудтай харгалзан A', C' цэгт огтлолцдог бол A', B', C', D цэгүүд нэг тойрог дээр оршихыг батал.

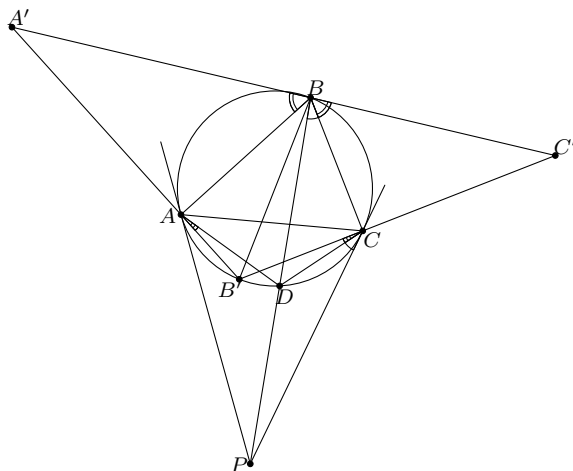
(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодолт. Огтлогч шүргэгчийн чанараар $\angle DCP = \angle PBC$ тул $\theta\theta\theta$ шинжээр $\angle PDC = \angle PCB$ болно. Иймд $\frac{CD}{CB} = \frac{PC}{PB}$ байна. Яг адилаар $\frac{AD}{AB} = \frac{PA}{PB}$ ба $PA = PC$ гэдгээс

$$\frac{CD}{CB} = \frac{AD}{AB} \quad (*)$$

болно. Мөн $\angle ABA' = \angle CBC'$, $\angle A'AB = \angle BCC' = 90^\circ$, (BB' -диаметр) гэдгээс $\triangle AA'B \sim \triangle CC'B$ тул $\frac{AB}{CB} = \frac{AA'}{CC'}$ болно. Иймд $(*)$ -с $\frac{AA'}{CC'} = \frac{AD}{CD}$ байна. Мөн $\angle B'AD = \angle B'CD$ тул

$\angle DAA' = \angle DCC'$ болох ба иймд $\triangle DAA' \sim \triangle DCC'$ болно. Эндээс $\angle AA'D = \angle B'C'D$ тул B', A', C', D нэг тойрог дээр оршино.



Бодлого XII-A3. $(a_1^{2017} + a_2)(a_2^{2017} + a_3) \dots (a_{2016}^{2017} + a_{2017})(a_{2017}^{2017} + a_1)$ үржвэр нь ямар нэг анхны тооны

а) $2017 \cdot 2018$ зэрэгт,

б) $2017 \cdot 2023$ зэрэгт байх натурал $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ тоонууд олдох уу?

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодолт. $a_i^{2017} + a_{i+1} > 1$ тул $a_i^{2017} + a_{i+1} = p^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$ байна.

$$\sum_{i=1}^{2017} p^{k_i} = \sum (a_i^{2017} + a_{i+1}) = \sum (a_i^{2017} + a_i)$$

баруун илэрхийлэл нь тэгш тул p тэгш буюу $p = 2$ гэж гарна.

а) $a^{2017} + 1 = 2^m$ нь цор ганц $a = 1$, $m = 1$ гэсэн шийдтэй болохыг батлая. Эсрэгээс нь $m > 1$ гэе. Тэгвэл $a > 1$ байна. Мөн

$$\begin{cases} a^{2 \cdot 2017} \equiv 1 \pmod{2^m} \\ a^{2^{m-1}} \equiv 1 \pmod{2^m} \end{cases}$$

гэдгээс $a^{(2 \cdot 2017, 2^{m-1})} \equiv 1 \pmod{2^m}$ буюу $a^2 \equiv 1 \pmod{2^m}$ гэж гарна. Эндээс $a^2 - 1 \geq 2^m = a^{2017} + 1$ буюу зөрчил үүснэ.

Иймд $a_{i+1} = 1$ бол $a_i = 1$ болох ба цаашилбал $a_1 = \dots = a_{2017} = 1$ болох тул шийд болж чадахгүй. Эндээс a_i бүр 1-ээс их байх ёстой.

$2^{k_i} = a_i^{2017} + a_{i+1} \geq 2^{2017} + a_{i+1}$ тул $k_i \geq 2018$ болно. $\sum k_i = 2017 \cdot 2018$ болохыг санавал $k_i = 2018$ байх ёстой болно. $a_i = 2$ үед л $k_i = 2018$ байх боломжтой. Гэвч $2^{2017} + 2 \neq 2^{2018}$ тул шийдгүй.

б) $\min(k_i) = k$ гэе. $k > 2017$ болохыг A хэсэгт баталсан. Эндээс $\begin{cases} a_1^{2017} \equiv -a_2 \pmod{2^k} \\ a_2^{2017} \equiv -a_3 \pmod{2^k} \\ \vdots \\ a_{2017}^{2017} \equiv -a_1 \pmod{2^k} \end{cases}$ гэдгээс $a_1^{2017^{2017}} \equiv -a_1 \pmod{2^k} \Rightarrow a_1^{2017^{2017}-1} \equiv -1 \pmod{2^k} \Rightarrow a^3 2 \equiv -1 \pmod{2^k}$ болно.

Бодлого XII-Б1. Бодлого XI-Б2.

Бодлого XII-Б2. a, b, c нь $abc = 1$ байх эерэг тоонууд бол

$$\frac{1}{a^4 + 4b^2 + 7} + \frac{1}{b^4 + 4c^2 + 7} + \frac{1}{c^4 + 4a^2 + 7} \leq \frac{1}{4}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодолт. Дурын $a, b > 0$ хувьд Кошийн тэнцэтгэл бишээс

$$a^4 + 4b^2 + 7 = (a^4 + b^2 + b^2 + 1) + (b^2 + b^2 + 1 + 1) + 4 \geq 4ab + 4b + 4$$

болно. Яг адилаар $b^4 + 4c^2 + 7 \geq 4bc + 4c + 4$ ба $c^4 + 4a^2 + 7 \geq 4ca + 4a + 4$ болно. Иймд

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^4 + 4b^2 + 7} + \frac{1}{b^4 + 4c^2 + 7} + \frac{1}{c^4 + 4a^2 + 7} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{c}{1 + bc + c} + \frac{1}{1 + bc + c} + \frac{bc}{c + 1 + bc} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

болж батлагдана. Бодолтын явцаас зөвхөн $a = b = c = 1$ үед тэнцэлдээ хүрэх нь гарна.

Бодлого XII-Б3. ABC гурвалжинд багтсан тойргийн төв I байв. Гурвалжны BC тал дээр D цэгийг, BC талын үргэлжлэл дээр C оройгоос цаана E цэгийг $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ байхаар сонгон авчээ. D цэгээс IE шулуун руу буулгасан перпендикуляр нь DH бол $\angle AHE = \angle IDE$ байхыг батал.

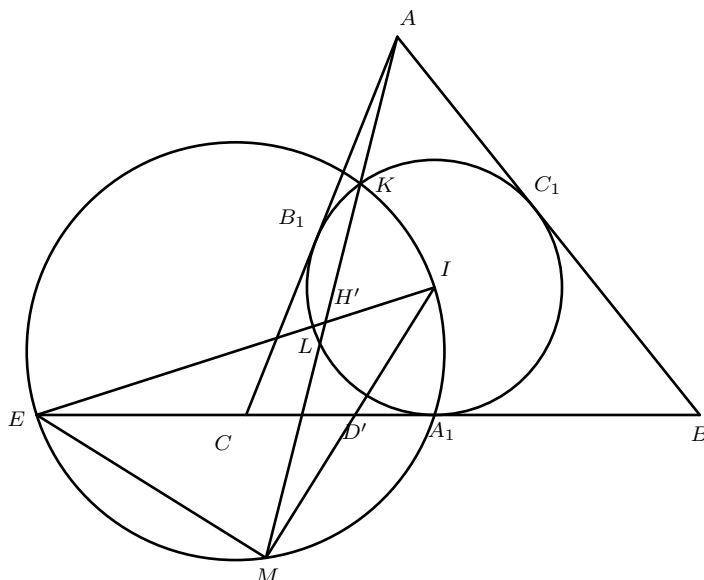
(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл, Г. Батзаяа)

Бодолт. ABC гурвалжинд багтсан тойрог ω ба BC, AC, AB талуудыг харгалзан A_1, B_1, C_1 цэгүүдэд шүргэдэг байг. ω' нь EI диаметртай тойрог ба ω, ω' тойргуудын A_1 цэгээс ялгаатай огтлолцлын цэг нь K байг. AK шулууны ω' тойрогтой огтлолцох цэгийг M гэе. Бид I, M, D цэгүүд коллинеар гэж батлахад хангалттай. D' нь IM болон BC -ийн огтлолцлын цэг ба D цэг өгсөн харьцаагаар ганц утгатай тодорхойлогдох учраас E, C, D', B цэгүүдийг гармоник гэж батлахад хүрнэ. $\angle MLA_1 = \angle KC_1A_1 = \angle KIE = \angle KME$ тул $LA_1 \parallel EM$ ба $LA_1 \perp MI$ болно. Өөрөөр хэлбэл, $D'L$ нь ω тойргийг шүргэнэ. Иймд

$$\sin(\angle D'IB) = \sin(\angle LIC_1/2) \text{ and } \sin(\angle CID') = \sin(\angle B_1IL/2). \quad (*)$$

K, B_1, L, C_1 цэгүүд гармоник ба давхар харьцаа нь синусуудын харьцаагаар тодорхойлогдох нь илэрхий. $\sin(\angle EIB) = \sin(\angle KIC_1/2)$, $\sin(\angle EIC) = \sin(\angle KIB_1/2)$ ба $(*)$ гэдгээс E, C, D' ба B цэгүүд гармоник болох ба иймд $D = D'$ байна.

EI ба AK шулуунуудын огтлолцлын цэг H' байг. $\angle KEI = \angle KMI = \angle IEA_1$ тул H' , E , M , D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймд $H = H'$ ба $\angle AH'E = \angle ID'E$ болов.



Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1. Нэгэн сургуулийн нийт сурагчдын 22.1%-аас их, 22.8%-аас бага хувь нь “Кенгүрү” олимпиадад оролцож, нийт сурагчдын 2.6%-аас их, 2.63%-аас бага хувь нь медаль хүртжээ. Энэ сургуулиас олимпиадад хамгийн цөөндөө хэдэн сурагч оролцсон бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. Сургуулийн нийт сурагчдын тоог x , олимпиадад оролцсон сурагчдын тоог y , медаль авсан сурагчдын тоог z гэвэл өгсөн нөхцөлөөр

$$\frac{22.1x}{100} < y < \frac{22.8x}{100} \quad (*)$$

$$\frac{2.6x}{100} < z < \frac{2.63x}{100} \quad (**)$$

байна. $(**)$ -оос $\frac{100z}{2.63} < x < \frac{100z}{2.6}$ болох ба иймд

1. хэрэв $z = 1$ бол $\frac{100}{2.63} < x < \frac{100}{2.6}$ ба $38.02 < x < 38.46$ болох тул x бүхэл гэдэгт зөрчинө.

2. хэрэв $z = 2$ бол $\frac{200}{2.63} < x < \frac{200}{2.6}$ ба $76.02 < x < 76.92$ болох тул x бүхэл гэдэгт зөрчинө.

Иймд z дор хаяж 3 гэж гарах ба $z = 3$ үед $\frac{300}{2.63} < x < \frac{300}{2.6}$ ба $114.06 < x < 115.3$ болох тул $x = 115$ гэж олдоно. Энэ үед $(*)$ -оос $\frac{22.1 \cdot 115}{100} < y < \frac{22.8 \cdot 115}{100}$ ба $25.415 < y < 26.22$ болж $y = 25$ болов. Хэрэв z ихэсвэл y мөн ихсэх нь илэрхий тул олимпиадад хамгийн багадаа 25 хүүхэд орно.

Бодлого ББ-А2. Бодлого IX-A1.

Бодлого ББ-А3. Бодлого X-A1.

Бодлого ББ-Б1. Баяраад эсрэг талс дээрх нүднүүдийн нийлбэр нь 7 байдаг гурван ижил шоо байв. Тэрээр шоонуудаа зэрэг орхижээ. Түүнд шооны гурван талс нь харагдаж, үлдсэн гурван талс нь харагдахгүй бөгөөд эсрэг хоёр талсын яг нэг нь харагдана. Баяраад харагдаж байгаа нүднүүдийн нийт тоо хэд байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодолт. (1, 6), (2, 5), (3, 4) хосууд үүсгэе. Эхлээд нэг шооны зэрэг харагдаж болох талсуудыг авч үзье. Эдгээр хос бүрээс 1 тоог нь сонгож авахад үүсэх 3 тоотой талс зэрэг харагдах боломжтой. Иймд

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

8 ширхэг боломжтой. Эндээс нэг шооны харагдаж буй 3 талсын нийлбэр нь 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15 байх боломжуудтай. Эндээс 3 шооны харагдах 9 талсын нийлбэрийн боломжит утгыг олох ёстой. Хамгийн багадаа 6, хамгийн ихдээ 15 байгаа тул бид 18-аас 45 хүртэлх тоонуудаас аль, аль тоонуудыг дээрх 8 тооны 3 тооны нийлбэрт бичиж чадах вэ гэсэн бодлого болж байна. Эндээс $18 = 6 + 6 + 6$, $19 = 6 + 6 + 7$, $20 = 7 + 7 + 6$, $21 = 7 + 7 + 7$, $22 = 9 + 7 + 6$, $23 = 9 + 7 + 7$, $24 = 9 + 9 + 6$, $25 = 9 + 9 + 7$, $26 = 10 + 9 + 7$, $27 = 10 + 10 + 7$, $28 = 10 + 9 + 9$, $29 = 10 + 10 + 9$, $30 = 10 + 10 + 10$, $31 = 10 + 10 + 11$, $32 = 10 + 10 + 12$, $33 = 10 + 9 + 14$, $34 = 10 + 9 + 15$, $35 = 10 + 10 + 15$, $36 = 10 + 11 + 15$, $37 = 10 + 12 + 15$, $38 = 11 + 12 + 15$, $39 = 9 + 15 + 15$, $40 = 10 + 15 + 15$, $41 = 11 + 15 + 15$, $42 = 12 + 15 + 15$, $43 = 14 + 14 + 15$, $44 = 14 + 15 + 15$, $45 = 15 + 15 + 15$ гэж бичиж чадах тул Баяраад харагдаж байгаа тоонуудын нийлбэр 18-аас 45 хүртэлх бүх утгыг авч чадна.

Бодлого ББ-Б2. $x^2 + y^2 = 2017(x + y)$ тэгшитгэлийн бүх натурал тоон x, y шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ш. Доржсэмбэ)

Бодолт. Хэрэв $x = y$ бол өгсөн тэгшитгэл $2x^2 = 2017 \cdot 2x$ болно. Эндээс (2017, 2017) шийд олдоно.

Одоо $x > y$ байг. Хялбар хувиргалт хийвэл $(x + y - 2017)^2 + (x - y)^2 = 2017^2$ болно. Эндээс $x + y - 2017 = a$, $x - y = b$ гэж орлуулвал

$$a^2 + b^2 = 2017^2$$

болох ба Пифагорын гурвалын ерөнхий томъёог ашиглавал

$$m^2 - n^2 = a, \quad 2nm = b, \quad m^2 + n^2 = 2017. \quad (*)$$

2017 нь квадратуудын нийлбэрт $2017 = 44^2 + 9^2$ гэж нэг утгатай тавигдах тул $(m, n) = (\pm 44, \pm 9)$ эсвэл $(m, n) = (\pm 9, \pm 44)$ байна. (*) тэгшитгэлээс a ба b -г олж $x + y - 2017 = a$, $x - y = b$ системийг бодож натурал шийдийг ялгаж авбал (2332, 1540), (2332, 477), (477, 2332), (1540, 2332) шийдүүд олдоно. Иймд өгсөн тэгшитгэл

$$(2017, 2017), (2332, 1540), (2332, 477), (477, 2332), (1540, 2332)$$

гэсэн 5-н шийдтэй.

Бодлого ББ-БЗ. 2 мөр n баганатай хүснэгтийн эхний мөрөнд $1, 2, \dots, n$ тоонуудыг бичсэн байв. Хүснэгтийн багана бүрт бичигдсэн хоёр тооны нийлбэр бүтэн квадрат тоо байхаар 2-р мөрөнд $1, 2, \dots, n$ тоонуудыг бичиж болдог байх n -ийн бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: В. Адьяасүрэн)

Бодолт. $n = 1, 2$ үед болохгүй нь тодорхой. $n = 3$ үед

1	2	3
3	2	1

 байгуулалт олдож байна.

Гэвч $n = 4$ үед 4 дээр бид $1, 2, 3$ тоонуудын алийг нь нэмсэн ч бүтэн квадрат болохгүй тул энэ тохиолдолд болохгүй. $n = 5$ үед

1	2	3	4	5
3	2	1	5	4

 байгуулалт хийж болно. $n = 6$ болон $n = 7$ үед $1, 6$ гэсэн 2 тоог зөвхөн 3 дээр нэмэхэд л бүтэн квадрат үүсэх тул энэ тохиолдолд мөн болохгүй.

$n = 8$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1

$n = 9$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

$n = 10$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	2	1	5	4	10	9	8	7	6

$n = 11$ үед 4, 11 дээр зөвхөн 5-ыг нэмж байж бүтэн квадрат үүсэх тул энэ тохиолдолд мөн болохгүй. Одоо $n \geq 12$ байх бүх тохиолдолд болдог гэж харуулъя.

$n = 12$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4

$n = 13$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	2	13	12	11	10	9	1	7	6	5	4	3

$n = 14$ үед 11, 12, 13, 14 гэсэн дөрвөн тооны хувьд $14 + 11 = 12 + 13 = 5^2$ ба $1, 2, \dots, 10$ хүртэлх дээр байрлуулж чадсан тул энэ тохиолдолд болно.

$n = 15$ үед мөн адилаар 10, 11, 12, 13, 14, 15 тоонуудын хувьд $10 + 15 = 11 + 14 = 12 + 13 = 5^2$ ба $1, 2, \dots, 9$ тоонуудыг дээр байрлуулж чадсан тул энэ тохиолдолд мөн адил чадна. $n = 16$ үед яг адил санаагаар байгуулж чадна.

$n = 17$ үед

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
15	14	13	12	11	10	2	17	16	6	5	4	3	2	1	9	8

Цаашлаад $n = 18, 19, \dots, 25$ хүртэл бид дээрх санаануудаар байгуулалт хийж чадна. Одоо $k \geq 5$ дурын k тооны хувьд 12 -оос k^2 хүртэлх бүх n -ийн хувьд байгуулалт хийж чаддаг гэж үзье. Тэгээд $k^2 + 1$ -ээс $(k+1)^2$ хүртэлх бүх n -ийн хувьд байгуулалт хийж чадна гэж баталвал бодлого бодогдоно.

$1 \leq a \leq 2k+1$ байх a бүхэл тоог авъя. $k \geq 5$ тул $k^2 + a \geq k^2 + 1 > 4k + 3 \geq 4k + 4 - a$ байхыг хялбар шалгаж болно. Иймд

$k^2 + a$	$k^2 + a - 1$	$k^2 + a - 2$	...	$4k + 4 - a$
$4k + 4 - a$	$4k + 5 - a$	$4k + 6 - a$	...	$k^2 + a$

ба $4k + 3 - a > 4k + 3 - a - (2k + 1) = 2(k + 1) \geq 12$ тул таамаглал ёсоор $1, 2, \dots, 4k + 3 - a$ тоонуудыг байрлуулж чадах тул бодлого бодогдов.

Дунд ангийн багш**Бодлого ДБ-А1.** Бодлого XII-A1.**Бодлого ДБ-А2.** Бодлого XII-A2.**Бодлого ДБ-А3.** p нь $p \geq 5$ байх анхны тоо бол $m+n \leq (p+1)/2$ бөгөөд $2^m \cdot 3^n - 1$ ялгавар нь p -д хуваагддаг байх натурал m, n тоонууд олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолт. $s := \text{ord}_p(2)$ ба $t := \text{ord}_p(3)$ гэе. Тэгвэл $\max(s, t) = \frac{p-1}{k}$ бүхэл гэж үзэж болох бөгөөд $k = 1, 2, 3$ тохиолдолд бодоход хангалттай. Юуны түрүүнд $s \geq t$ гэж үзье. Хэрэв $k \geq 2$ бол

$$3^j \in \{2^i \mid 1 \leq i \leq (p-1)/k\}$$

байх $1 \leq j \leq k$ тоо олдоно. Одоо $3^j \equiv 2^i \pmod{p}$ байх i тоо сонгон авч $(n, m) = (j, \frac{p-1}{k} - i)$ гэе. $n + m \leq \frac{p-1}{k} + 1$ гэдгийг хялбархан харж болох бөгөөд сүүлийн нийлбэр $(p+1)/2$ хэтрэхгүй. $k = 1$ бол $2^i \equiv 3 \pmod{p}$ байх $1 < i < p$ олдоно. Хэрэв $\frac{p-1}{2} < i$ бол $(n, m) = (1, p-1-i)$ гэж сонгоно. Харин $i \leq \frac{p-1}{2}$ тохиолдолд $(n, m) = ([\frac{p-1}{i}], p-1 - [\frac{p-1}{i}]i)$ гэж сонгож болох нь $(i-2)(i - (p-1)/2) \leq 0$ гэдгээс мөрдөнө. $s \leq t$ тохиолдол мөн адилхан.**Бодлого ДБ-Б1.** $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n-1}$ тоонуудын арифметик дундаж нь A бол

$$2((x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \dots + (x_{2n-1} - A)^2) \geq (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_n)^2 + \dots + (x_{2n-1} - x_n)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолт. $1 \leq k \leq 2n-1$ хувьд x_k тоог $x_k - x_n$ ялгавраар солин $x_n = 0$ гэж үзэж болно. Зүүн гар талын илэрхийллийг $2 \sum x_i^2 - 2(2n-1)A^2$ гэж бичиж болох ба $(2n-1)A = \sum x_i$ тул

$$(2n-1) \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geq 2 \left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i \right)^2 \quad (*)$$

гэж батлахад хангалттай.

 $1 \leq k \leq n-1$ хувьд $y_k = -x_k \geq 0$ ба $z_k = x_{n+k} \geq 0$ гээд $Y = \sum_{k=1}^{n-1} y_k$ ба $Z = \sum_{k=1}^{n-1} z_k$ гэе. Тэгвэл

$$(n-1) \sum_{k=1}^{2n-1} x_k^2 = (n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} z_k \right)^2 = Y^2 + Z^2 \geq (-Y + Z)^2$$

болно. Эндээс $(2n-1) \geq 2(n-1)$ тул $(*)$ батлагдлаа.Тэнцэтгэл зөвхөн $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n-1}$ үед биелнэ.**Бодлого ДБ-Б2.** Бодлого XI-B3.

Бодлого ДБ-БЗ. $\{1, 2, \dots, 2017\}$ олонлогийн 30 элементтэй A дэд олонлог, мөн 31 элементтэй B дэд олонлог өгөгджээ. $a \in A$, $b \in B$ үед $a + nb$ хэлбэртэй бүх тоонуудыг 2017-д хуваахад дор хаяж 730 ширхэг ялгаатай үлдэгдэл гардаг натурал n тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодолт. Эхлээд дурын төгсгөлөг олонлогийн төгсгөлөг $\{X_i\}_{i \in I}$ бүлийн хувьд

$$|\cup_i X_i| \geq \sum_i |X_i| - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |X_i \cap X_j|$$

байхыг харъя. Үнэхээр, хэрэв $x \in \cup_i X_i$ нь яг k ширхэг X_i олонлогт ордог бол эхний нийлбэрт k удаа, дараагийн нийлбэрт $k(k-1)$ удаа тоологдох ба ямар ч $k \geq 1$ хувьд $1 \geq k - \frac{k(k-1)}{2}$ байна.

Одоо $F = \{1, 2, \dots, 2016\}$ гээд $a \in A$ ба $n \in F$ хувьд

$$X_a^n = a + nB = \{a + nb \pmod{2017} \mid b \in B\}$$

гэе. Мэдээж, ямар ч $a \in A$ ба $n \in F$ хувьд $|X_a^n| = |B|$ байна. Цаашилбал, $a \neq a' \in A$ хувьд

$$|X_a^n \cap X_{a'}^n| = \sum_{b, b' \in B} \delta_{a+nb, a'+nb'} = \sum_{\substack{b, b' \in B \\ b \neq b'}} \delta_{a+nb, a'+nb'} = \sum_{\substack{b, b' \in B \\ b \neq b'}} \delta_{n, \frac{a-a'}{b'-b}}$$

байна. Энд δ нь Кронекерийн делта функц $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ ба $\frac{a-a'}{b'-b}$ нь 2017 модулиар бодогдоно. Бүх $n \in F$ хувьд нэмбэл $\sum_{n \in F} \delta_{n, \frac{a-a'}{b'-b}} = 1$ тул

$$\sum_{n \in F} |X_a^n \cap X_{a'}^n| = |B|(|B| - 1)$$

болно. Одоо $X^n = \cup_{a \in A} X_a^n = A + nB$ гэе. Тэгвэл

$$|X^n| \geq \sum_{a \in A} |X_a^n| - \frac{1}{2} \sum_{\substack{a, a' \in A \\ a \neq a'}} |X_a^n \cap X_{a'}^n|$$

ба бүх $n \in F$ хувьд дундаж авбал

$$\begin{aligned} \frac{1}{|F|} \sum_{n \in F} |X^n| &\geq |A||B| - \frac{1}{2} \frac{|A|(|A|-1)|B|(|B|-1)}{|F|} \\ &= 30 \cdot 31 - \frac{30 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 30}{2 \cdot 2016} > 729 \end{aligned}$$

болно. Иймд $|X^n| \geq 730$ байх $n \in F$ олдоно.

Монголын Математикийн Нийгэмлэг

Mathematical Gems

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо, Монголын Математикийн Нийгэмлэг болон МУИС-ийн Математикийн Хүрээлэнгээс хамтран “Mathematical Gems” нэртэй нээлттэй цуврал лекцүүдийг зохион байгууллаа.

Зоосны бодлого (Ү. Отгонбаяр, 2018 оны 2 сарын 4)

Удиртгал

Эхлээд нэгэн хялбар бодлого авч үзье.

Бодлого (Сорил 2017.1.T1). 7, 11 ба 13 гэсэн тоонуудыг нэмэх замаар гаргаж авч болдоггүй хамгийн их натурал тоог ол.

Бодолт. Хариу: 30.

30 гэсэн тоог 7, 11, 13 тоонуудыг нэмэх замаар гаргаж авч чадахгүйг шалгахад төвөггүй тул 30-аас эрс их бүх тоог гаргаж авч болохыг харуулъя. Үүний тулд 31-с 37 хүртэлх тоог гаргаж авахад хангалттай. Тэгвэл 7-г нэмэх замаар бусад тоонуудыг гаргаж авч чадна.

$$31 = 7 + 11 + 13$$

$$32 = 3 \cdot 7 + 11$$

$$33 = 7 + 2 \cdot 13$$

$$34 = 3 \cdot 7 + 13$$

$$35 = 2 \cdot 11 + 13$$

$$36 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 11$$

$$37 = 11 + 2 \cdot 13$$

$$38 = 2 \cdot 7 + 11 + 13$$

$$39 = 4 \cdot 7 + 11$$

$$40 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 13$$

$$41 = 4 \cdot 7 + 13$$

$$42 = 7 + 2 \cdot 11 + 13$$

$$43 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 11$$

$$44 = 7 + 11 + 2 \cdot 13$$

Ерөнхий тохиолдолд дараах бодлого байдаг. Эхлээд нэг тодорхойлолт өгье.

Бүхэл тоон олонлогийг $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ гэж тэмдэглэе.

Тодорхойлолт. Хоосон биш $A \subseteq \mathbb{Z}$ олонлогийн хувьд дараах чанаруудыг хангах цор ганц $d \geq 0$ тоо олдох ба уг тоог $\gcd(A)$ гэж тэмдэглээд A олонлогийн хамгийн их ерөнхий хуваагч гэнэ.

(i) d нь A -ийн бүх гишүүнийг хуваана.

(ii) e нь A -ийн бүх гишүүнийг хуваадаг бол d -г мөн хуваана.

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ үед товчоор $\gcd(\{a_1, \dots, a_n\}) = \gcd(a_1, \dots, a_n)$ гэж тэмдэглэнэ.

Бодлого (Фробениусын зоосны бодлого). $n \geq 1$ гэе. $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг бүхэл тоонууд бөгөөд $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ бол

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0)$$

хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн их эерэг бүхэл тоог ол.

Жишээ. $g(7, 11, 13) = 30$ байна.

Ф. Г. Фробениус нь Германы математикч бөгөөд эллиптик функц, дифференциал тэгшитгэл, тооны онол болон бүлгийн онолд оруулсан хувь нэмрээрээ алдартай. Тэрээр зоосны бодлого шийдтэй болохыг баталжээ.

Теорем (Ф. Г. Фробениус). $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг бүхэл тоонуудын бөгөөд $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ бол

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0)$$

хэлбэртэй бичигддэггүй хамгийн их эерэг бүхэл оршин байна.

Энэ тоог $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ гэж тэмдэглээд $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын Фробениусын тоо гэнэ.

Фробениусын теоремийн суурь нь дараах лемм юм. Баталгааг 111-р хуудаснаас харна уу.

Лемм (Е. Бэзу). $a_1, a_2, \dots, a_n$ эерэг бүхэл тоонууд бөгөөд $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ бол дурын бүхэл тоог

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z})$$

хэлбэртэй бичиж болно.

$n = 2$ тохиолдол

$n = 2$ үед Фробениусын тоог Английн математикч Ж. Ж. Сильвестр олжээ.

Теорем (Ж. Ж. Сильвестр). Харицан анхны a, b тоонууд өгөгдөв. Сөрөг биш бүхэл тоог

$$ax + by \quad (x, y \geq 0)$$

хэлбэртэй бичигддэггүй бол задардаггүй тоо гээ.

(i) Задардаггүй хамгийн том тоо

$$g(a, b) = (a - 1)(b - 1) - 1$$

байна.

(ii) Задардаггүй тоо нийт

$$\frac{g(a, b) + 1}{2} = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}$$

ширхэг байна.

(iii) $0 \leq t \leq g(a, b)$ бол t ба $g(a, b) - t$ тоонуудын яг нэг нь задардаггүй тоо байна.



Ф. Г. Фробениус 1849-1917



Ж. Ж. Сильвестр 1814-1897

Жишээ. $a = 7$, $b = 11$ гэе. $0, 1, 2, \dots$ тоонуудыг 11-т хуваахад гарах үлдэгдэлээр нь нэг багана болгон бичвэл дараах хүснэгт гарах ба энд тодруулсан тоонууд задардаггүй тоонууд байна. Багана бүрт 7-д хуваагдах хамгийн бага тоо хүртэлх тоонууд задардаггүй, тэрнээс цаашаа задардаг байна. Хамгийн том задардаггүй тоо $6 \cdot 10 - 1 = 59$, нийт задардаггүй тоо $60/2 = 30$ ширхэг байна.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76
77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87

Ерөнхий тохиолдолд энэ санаагаар батлагдана.

Сильвестрийн теоремийн баталгаа. $0 \leq x \leq b-1$ сонгож авъя. $ax = by + r$, $0 \leq r \leq b-1$ гэж нэг утгатай бичиж болно. Энэ үед $y \leq \frac{a(b-1)}{b} < a$ тул $0 \leq y \leq a-1$ байна. Одоо b -д хуваахад r үлддэг тоонууд дотроос $ax = by + r$ нь задардаг хамгийн бага тоо гэж харуулъя. $z \geq y$ бол $bz + r = ax + b(z - y)$ задардаг тоо тул $z < y$ үед $bz + r$ задардаггүй гэж харуулах үлдлээ. Эсрэгээс нь $bz + r = at + bs$, $t, s \geq 0$ гэж задардаг гэвэл $a(x - t) = by + r - at = b(s + y - z) > 0$ болж a, b харилцан анхны гэдэгт зөрчинө.

Цаашилбал, a нь b модулиар урвуутай тул $x_1 \neq x_2$ бол $r_1 \neq r_2$ байх нь илт ба эндээс x тоо $\{0, 1, \dots, b-1\}$ олонлогоор гүйхэд r нь $\{0, 1, \dots, b-1\}$ утгуудыг яг нэг удаа авах нь мөрдөнө.

Иймд:

(i) $g = a(b-1) - b = (a-1)(b-1) - 1$ гэвэл g нь задардаггүй хамгийн бага тоо болно. Өөрөөр хэлбэл $g = g(a, b)$ байна.

(ii) $\sum r = \sum x$ тул нийт

$$\begin{aligned}\sum y &= \frac{1}{b} \sum (ax - r) \\ &= \frac{1}{b}(a-1) \frac{b(b-1)}{2} \\ &= \frac{(a-1)(b-1)}{2} \\ &= \frac{g+1}{2}\end{aligned}$$

ширхэг тоо задардаггүй.

(iii) Задардаг тоонуудын нийлбэр задардаг тул

$$(0, g), (1, g-1), \dots, \left(\frac{g-1}{2}, \frac{g+1}{2}\right)$$

хос бүрийн ядаж нэг нь задардаггүй тоо байна. Нийт задардаггүй тооны тоо хосуудын тоотой тэнцүү тул хос бүрийн яг нэг нь задардаггүй тоо байна.

□

Энэ хэсгээ дараах теоремоор өндөрлөө.

Теорем (Т. Поповиск). Харилцан анхны a, b тоонуудын хувьд n тоог $ax + by$ ($x, y \geq 0$) хэлбэртэй бичих боломжийн тоог $p_{a,b}(n)$ гэвэл

$$p_{a,b}(n) = \frac{n}{ab} - \left\{ \frac{b^{-1}n}{a} \right\} - \left\{ \frac{a^{-1}n}{b} \right\} + 1$$

байна. Энд $b^{-1}b \equiv 1 \pmod{a}$ ба $a^{-1}a \equiv 1 \pmod{b}$ ба $\{x\}$ нь x тооны бутархай хэсэг.

□

Бүлэг

$n \geq 3$ тохиолдол $g(a_1, \dots, a_n)$ тоог илэрхийлсэн томъёо одоо болтол олдоогүй байна.

Фробениусын тоо үргэлж оршин байхыг харуулахын тулд эхлээд бага зэрэг бэлтгэл хийе.

Тодорхойлолт. Хоосон биш $G \subseteq \mathbb{Z}$ дэд олонлогийг

$$n, m \in G \text{ бол } (n+m) \in G \quad \text{ба} \quad n \in G \text{ бол } -n \in G$$

байдаг бол бүлэг гэнэ.

Жишээ. Дараах олонлогууд бүлэг болно.

(i) $d \in \mathbb{Z}$ бол $(d) = d\mathbb{Z} = \{dn \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $A \subseteq \mathbb{Z}$ хоосон биш бол $(A) = \{x_1 a_1 + \dots + x_k a_k \mid a_1, \dots, a_k \in A, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}\}$.

Теорем. $G \subseteq \mathbb{Z}$ бүлэг бол $G = (d)$ байх $d \in \mathbb{Z}$ тоо олдоно.

Proof. $G = \{0\}$ бол $d = 0$.

$G \neq \{0\}$ бол $S = \{n \in G \mid n \geq 1\}$ олонлог хоосон биш болохыг шалгах хэцүү биш. Одоо $d = \min S$ гэе. $n \in S$ үед $n = dq + r$, $0 \leq r < d$ гэж бичиж болох ба $r = n - (d + \dots + d) \in S$ тул $r = 0$. Иймд $S \subseteq (d)$ болох ба эндээс $G = (d)$ болно. $\square$

Жишээ. $A \subseteq \mathbb{Z}$ хоосон биш бол $(A) = (\gcd(A))$ байна.

Безугийн леммийн баталгаа. $\gcd(a_1, \dots, a_n) = 1$ тул $(a_1, \dots, a_n) = \mathbb{Z}$ байна. $\square$

Хагас бүлэг

Сөрөг биш бүхэл тоон олонлогийг $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ гэе.

Тодорхойлолт. Хоосон биш $S \subseteq \mathbb{N}$ олонлогийг

$$n, m \in S \text{ бол } (n + m) \in S$$

байдаг бол хагас бүлэг гэнэ.

Жишээ. Дараах олонлогууд хагас бүлэг болно.

- (i) $d \in \mathbb{N}$ бол $\langle d \rangle = d\mathbb{N} = \{dn \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (ii) $A \subseteq \mathbb{N}$ хоосон биш бол $\langle A \rangle = \{x_1 a_1 + \dots + x_k a_k \mid a_1, \dots, a_k \in A, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}\}$.
- (iii) $d \in \mathbb{N}$ бол $\{0, d, d+1, d+2, \dots\} = \langle d, d+1, \dots, 2d-1 \rangle$.

Теорем. $S \subseteq \mathbb{N}$ хагас бүлэг ба $\gcd(S) = 1$ бол d тоо олдоод

$$S \supseteq \{d, d+1, \dots\}$$

байна.

Proof. $G = \{n - m \mid n, m \in S\}$ гэвэл G бүлэг болох ба $\gcd G = \gcd S = 1$ тул $G = \mathbb{Z}$ байна. $n = m + 1$ ба $n, m \in S$ гэе. $l \geq m^2$ хувьд $l = mq + r$, $0 \leq r < m$ гэвэл $q \geq m > r$ ба $l = (q-r)m + r(m+1) = (q-r)m + rn$ тул $l \in S$ байна. Иймд $d = m^2$ шаардлага хангана. $\square$

Ф. Г. Фробениусын теоремын баталгаа. Дээрх теоремоос $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \supseteq \{d, d+1, \dots\}$ байх d олдоно. Энэ нь $g(a_1, \dots, a_n)$ оршин байх бөгөөд d -ээс бага байна гэсэн үг юм. $\square$

Дасгал

Бодлого (Путнам 1971). Нэгэн тоглоомонд, нэг удаадаа a эсвэл b оноо авдаг. Энд a, b нь натурал тоонууд ба $b < a$. Хэрэв авч чадахгүй нийт оноо 35 ширхэг ба мөн 58 оноо авч чадахгүй бол a, b тоонуудыг ол.

Бодлого (ОУМО 1983). a, b, c натурал тоонууд ба $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, a) = 1$ бол

$$g(ab, bc, ca) = 2abc - ab - bc - ca$$

гэж батал.

Бодлого. $0 \in S \subseteq \mathbb{N}$ хагас бүлэг бол $S = \langle A \rangle$ байх төгсгөлөг A олонлог олдохыг харуул.

Бутархайн үе ба Аргиний таамаглал (Г. Баярмагнай, 2018 оны 3 сарын 3)

“... deepest interrelationships
in analysis are of an arithmetical
nature.” — Hermann Minkowski.

Оршил

Бид үлдэгдэлтэй хуваах үйлдлийг давтан гүйцэтгэх замаар энгийн бутархайг аравтын бутархай хэлбэрээр дүрслэх ойлголттой дунд сургуульд танилцдаг. Хэрэв анзаарсан бол зарим энгийн бутархайг хэдхэн удаагийн үйлдлээр аравтын бутархай хэлбэрт шилжүүлж болдог байхад зарим бутархайн хувьд төгсгөлгүй олон үйлдэл хийх хэрэгтэй болдог. Жишээлбэл, $1/2$ бутархай 0.5 гэсэн дүрслэлтэй байхад $\frac{1}{3}$ бутархай $0.33\dots$ буюу таслалаас хойш төгсгөлгүй олон 3 цифрээр бичигддэг. Ямар энгийн бутархайг төгсгөлөг тооны үйлдлээр аравтын бутархай дүрслэл рүү нь шилжүүлж болох вэ гэсэн асуулт зүй ёсоор тавигдана. Энэ асуултын хариултыг Швейцарын математикч Ламберт (Lambert) олж 1754 томъёолсон байна. Харин баталгааг нь сурагчид та бүхэн бие даан гүйцэтгээрэй.

Теорем (Ламберт). *Үл хураагдах бутархайг төгсгөлөг тооны үйлдлээр аравтын бутархай дүрслэлд шилжүүлж болох гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь уг бутархайн хуваарь 2, 5-аас өөр анхны тоонд хуваагдахгүй байх явдал юм.*

Одоо бид үл хураагдах бутархайн хуваарь 2, 5-аас ялгаатай анхны тоонд хуваагддаг бол түүний аравтын бутархай дүрслэлд төгсгөлөггүй олон цифр хэрэгтэй гэсэн дүгнэлтийг хийж чадна. Тухайлбал, $1/7 = 0.1428571428571\dots$. Харин эдгээр төгсгөлөггүй олон цифрүүдийг сайтар ажиглавал тодорхой зүй тогтол, давтамжтай байдгийг төвөггүй анзаарч болно. Цаашид бид энэхүү зүй тогтлын тухай ярих тул бутархайн таслалын урьд байх бүхэл тоог 0 гэж үзэхэд явцуурахгүй.

Тодорхойлолт. Дурын $i > k$ дугаар бүрийн хувьд $a_i = a_{i+d}$ биелэх k ба d бүхэл тоонууд олддог байх $0.a_1a_2a_3\dots$ бутархайг үет бутархай гэнэ. Энэ чанартай хамгийн бага d тоог үеийн урт, d оронтой $a_{k+1}\dots a_{k+d}$ тоог үе гэх бөгөөд уг бутархайг цаашид

$$0.a_1a_2\dots a_k\overline{a_{k+1}\dots a_{k+d}}$$

гэж тэмдэглэнэ.

Үет бутархай бүр нь рационал тоо байдаг. Үнэндээ $A = 0.a_1a_2\dots a_k\overline{a_{k+1}\dots a_{k+d}}$ гэвэл $10^{k+d}A - 10^kA$ ялгавар бүхэл тоо болж A нь $10^k(10^d - 1)$ хуваарьтай рационал тоо гэдэг нь гарна. Энэ өгүүлбэрийн урвуу өгүүлбэр ч мөн хүчинтэй байдаг.

Proposition 1. *Хуваарь нь 2, 5-аас ялгаатай анхны тоонд хуваагдах үл хураагдах бутархайн аравтын бичлэг төгсгөлгүй үргэлжлэх бөгөөд үелнэ.*

Proof. Нэгээс бага энгийн бутархайг үетэй гэж үзүүлэхэд хангалттай. Үл хураагдах $\frac{m}{n}$ бутархайн аравтын дүрслэл $0.a_1a_2a_3\dots$ болог. $m_0 = m$ байх $m_0, m_1, m_2, \dots$ дарааллыг m_{i+1} нь $10m_i$ тоог n -д хуваахад гарах үлдэгдэл байхаар тодорхойлъё. 10-тай харилцан анхны n -ийн хуваагч m -ийг хуваахгүй тул дарааллын гишүүн бүрийг хуваахгүй. Иймд дараалал төгсгөлгүй олон гишүүнтэй бөгөөд $0 < m_i < n$ байна. Иймд Дирихлейн зарчмаар дарааллын эхний n ширхэг гишүүн дотор тэнцүү хоёр гишүүн олдоно. Энэ хоёр гишүүнийг $m_k = m_{k+d}$

гэвэл дарааллын байгуулалтаар $i \geq k$ дугаар бүрийн хувьд $m_i = m_{i+d}$. Өгсөн бутархайн аравтын бичлэг дэх цифрүүд

$$a_i = \frac{10m_{i-1} - m_i}{n}$$

дүрмээр илэрхийлэгдэх учраас $a_i = a_{i+d}$ гэж мөрдөнө. $\square$

Зарим бутархай, жишээлбэл $1/3 = 0.33 \dots$ таслалын дараах орноос эхлэн үелж байхад зарим бутархай (жишээ нь $\frac{1}{6} = 0.166 \dots$) таслалаас хойш тодорхой орноос эхлэн үелдэг. Дээрх өгүүлбэрийн баталгааг анхааралтай ажиглавал энэ асуудлын хариултыг бид төвөггүй олж чадна. Үнэндээ $m_0, m_1, m_2, \dots$ дарааллыг тодорхойлох n тоо 2, 5-ын алинд нь ч хуваагдахгүй тул $i + 1$ -р гишүүн бүр өмнөх i -р гишүүнээ нэг утгатайгаар тодорхойлдог.

Лемм. Үл хураагдах бутархайн аравтын дүрслэл таслалын дараах орноос эхлэн үелэх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь бутархайн хуваарь 10-тай харилцан анхны байх явдал юм.

Жишээ. Энгийн бутархайн хуваарийн анхны тоон задаргаа $2^s 5^t$ ($s, t \in \mathbb{N}$) үржигдэхүүнтэй бол уг бутархайн аравтын бичлэг таслалаас хойш $\max(s, t) + 1$ дэх орноос эхлэн үелнэ

Бутархайн үеийн урт

Бутархайн хуваарийг хуваах 2 ба 5-ын зэрэгтүүд нь бутархайн үеийн урттай ямар ч хамааралгүй болохыг бид мэдэж авлаа. Иймд бутархайн үеийн уртыг ярих үед бутархайн хуваарийг 10-тай харилцан анхны гэж үзэхэд явцуурахгүй. Энэ чанартай бутархайнууд бүгд таслалын дараагийн орноос эхлэн үелдэг гэдгийг бид мэдсэн. Мөн түүгээр ч зогсохгүй хуваарь нь n байх үл хураагдах бутархайнуудын үеийн урт хүртвэрээсээ хамаарахгүй гэдгийг одоо харья.

Proposition 2. Хуваарь нь тогтмол n байх үл хураагдах бутархайнуудын үеийн урт бүгд ижил.

Proof. $s_0 = 1$ ба s_{i+1} нь $10s_i$ тоог n -д хуваахад гарах үлдэгдэл байхаар тодорхойлогдсон $s_0, s_1, s_2, \dots$ дараалал $1/n$ тооны аравтын бутархай дүрслэлийг нэг утгатайгаар тодорхойлдог. m/n бутархайн аравтын дүрслэлийг тодорхойлох дарааллын гишүүдийг m_i гэвэл i дугаар бүрийн хувьд

$$ms_i \equiv m_i \pmod{n}$$

биелнэ. Иймд $1/n$ ба m/n бутархайнуудын үеийн урт ижил болох нь (1) адилтгалаас мөрдөнө. $\square$

Энэ өгүүлбэрээс ямар ч рационал тооны үеийн уртыг олох асуудал хуваарь нь 10-тай харилцан анхны байх $\frac{1}{n}$ бутархайн үеийн уртыг олохтой ижил гэж дүгнэж болно.

Тодорхойлолт. 10-тай харилцан анхны натурал $n \geq 2$ тооны урвуу $\frac{1}{n}$ -ийн үеийн уртыг $\lambda(n)$ гэж тэмдэглэе.

Одоо $\lambda(n)$ тоог тодорхойлоход шаардлагатай ойлголттой танилцъя. Натурал $n \geq 2$ тооны хувьд n -ээс бага бөгөөд түүнтэй харилцан анхны, натурал тоонуудын олонлогийг $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, энэ олонлогийн элементүүдийн тоог $\phi(n)$ гэж тус тус тэмдэглэе. $\phi(n)$ тоо n -ийн ялгаатай анхны тоон хуваагчдаар хялбархан илэрхийлэгддэг.

Жишээ (Эйлериин томьёо). Эерэг бүхэл тоо $n \geq 2$ бүрийн хувьд

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Теорем. $n \geq 2$ нь 10-тай харилцан анхны натурал тоо болог.

1. Бүх цифр нь 9 байх n -д хуваагдах тоо оршин байх бөгөөд хамгийн бага тоо нь $\lambda(n)$ оронтой байна.
2. $\lambda(n)$ нь $\phi(n)$ тоог хуваана.

Proof. 1. $\frac{1}{n} = 0.a_1a_2 \dots$ гэе. $\lambda(n)$ нь энэ бутархайн үеийн урт тул $\frac{10^{\lambda(n)}}{n} - \frac{1}{n}$ ялгавар бүхэл тоо байна. Иймд $\lambda(n)$ оронтой бүх цифр нь 9 байх тоо n -д хуваагдана. Түүнээс бага d оронтой тоо оршин байдаг гэвэл

$$\frac{10^d - 1}{n} = 10^d \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$$

байх ба i дугаар бүрийн хувьд $a_i = a_{i+d}$ гэж мөрдөнө. Үеийн уртын тодорхойлолтоор $\lambda(n) \leq n$ болох тул зөрчил гарна.

2. $10^r - 1$ ялгавар n -д хуваагдах хамгийн бага r тоо $\lambda(n)$ болохыг бид харлаа. Эйлерийн теоремоор $10^{\phi(n)} - 1$ ялгавар n -д хуваагдах тул $\lambda(n)$ нь $\phi(n)$ тоог хуваана. Учир нь

$$\text{ХИЕХ}(10^{\phi(n)} - 1, 10^{\lambda(n)} - 1) = 10^{\text{ХИЕХ}(\phi(n), \lambda(n))} - 1.$$

□

Жишээ. $\frac{1}{n}$ бутархайн үе нь $\frac{10^{\lambda(n)} - 1}{n}$ тоотой тэнцүү байна.

Одоо 7 хуваарьтай энгийн бутархайнуудын үеийг анхааралтай ажиглавал 6 ширхэг цифр циклдэж орсон байна.

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0.\overline{142857}, & \frac{2}{7} &= 0.\overline{285714}, & \frac{3}{7} &= 0.\overline{428571}, \\ \frac{4}{7} &= 0.\overline{571428}, & \frac{5}{7} &= 0.\overline{714285}, & \frac{6}{7} &= 0.\overline{857142}. \end{aligned}$$

Харин 11 хуваарьтай бутархайнуудын үеийг ажиглавал арай өөр дүгнэлтийг хийж болно.

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} &= 0.\overline{09}, & \frac{2}{11} &= 0.\overline{18}, & \frac{3}{11} &= 0.\overline{27}, & \frac{4}{11} &= 0.\overline{36}, & \frac{5}{11} &= 0.\overline{45}, \\ \frac{6}{11} &= 0.\overline{54}, & \frac{7}{11} &= 0.\overline{63}, & \frac{8}{11} &= 0.\overline{72}, & \frac{9}{11} &= 0.\overline{81}, & \frac{10}{11} &= 0.\overline{90}. \end{aligned}$$

Энд байгаа зүй тогтлыг Гаусс анх ажиглаж үр дүнд дараах төгсгөлөг бүлгүүдийн хувьд биелдэг нэгэн теоремыг 1801 онд нээсэн байдаг. Энэ теоремтой танилцахаас өмнө зарим ойлголттой танилцъя.

Тодорхойлолт. 1. d оронтой $\overline{a_2a_3 \dots a_d a_1}$, $\overline{a_3a_4 \dots a_1 a_2}$, $\dots$, $\overline{a_d a_1 a_2 \dots a_{d-1}}$ тоонуудыг өгөгдсөн d оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_d}$ тооны цикл тоонууд гэе.

2. Үл хураагдах $\frac{a}{n}$ ба $\frac{b}{n}$ бутархайн үеүүд нэг нь нөгөөгийнхөө цикл тоо болдог бол эдгээр бутархайг нэг ангийнх гэе.

Тодорхойлолт. $C(n)$ -ээр хуваарь нь n байх үл хураагдах бутархайнуудын ялгаатай ангийн тоог тэмдэглэе.

Тухайлбал, $n = 7$ үед 1-ээс бага 7 хуваарьтай бутархайнууд бүгд нэг ангийнх тул $C(7) = 1$ байна.

$n = 11$ үед $\frac{m}{11}$ ба $\frac{11-m}{11}$ ($m = 1, \dots, 5$) бутархайнууд нэг ангийнх бөгөөд ангиуд хоорондоо ялгаатай. Иймд $C(11) = 5$.

Лемм. Үл хураагдах $\frac{a}{n}$ ба $\frac{b}{n}$ бутархайнууд нэг ангийнх байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a \equiv 10^r b \pmod{n}$ байх $r \in \mathbb{N}$ тоо олдох явдал юм.

Proof. Тодорхойлолтоос $\frac{a}{n}$ ба $\frac{b}{n}$ бутархайнууд нэг ангийнх

$$\Leftrightarrow 10^r \times \frac{b}{n} - \frac{a}{n} \in \mathbb{Z} \text{ байх натурал } r \text{ тоо олдох} \Leftrightarrow a \equiv 10^r b \pmod{n}.$$

□

Теорем (Гаусс). Натурал тоо $n \geq 2$ бүрийн хувьд $\lambda(n) \cdot C(n) = \phi(n)$.

Proof. Үл хураагдах $\frac{a}{n}$ бутархайтай нэг ангид орох n хуваарьтай бутархайнуудын олонлогийг C_a гэж тэмдэглэе. Леммээс ямар нэг 2 анги давхацна эсвэл үл огтлолцоно гэж мөрдөх бөгөөд

$$C_1 = \left\{ \frac{10^1}{n}, \frac{10^2}{n}, \dots, \frac{10^{\lambda(n)}}{n} \right\}$$

байна. Мөн түүнчлэн $|C_1| = |C_a|$. Үнэндээ, хэрэв $10^r \not\equiv a \pmod{n}$ бол

$$C_a = \left\{ \frac{10a}{n}, \frac{10^2 a}{n}, \dots, \frac{10^{\lambda(n)} a}{n} \right\}$$

болно. Иймд бид үл хураагдах n хуваарьтай ялгаатай үетэй бутархайнуудын олонлог $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ олонлогтой ижил тооны элементтэй бөгөөд үл огтлолцох $C(n)$ ширхэг ангиудын нэгдэлд задарна гэж дүгнэж болно. Иймээс $\lambda(n) \cdot C(n) = \phi(n)$ болох нь батлагдана. □

Гаусс бутархайн үеийн урт ямар зүй тогтолтой болохыг тодорхойлохыг маш их оролдож зарим бутархай, тухайлбал

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\dots$$

7-1=6 гэсэн үетэй байхад харин зарим бутархай, тухайлбал

$$\frac{1}{11} = 0,09\,09\dots$$

2 гэсэн үетэй байгаа учрыг олохыг оролдож байжээ. Мөн түүнчлэн $1/99007599$ тоог 2-тын тооллын системд дүрслэхэд түүний үеийн урт нь бараг 50 сая болдог гэдгийг ч тогтоосон. Энэ асуултад хариулах зорилгоор Гаусс анхны язгуурын тухай ойлголтыг математикт оруулж ирсэн байна. Үүнтэй холбогдуулан дараах таамаглалыг дэвшүүлсэн.

Таамаглал 1 (Гаусс). *proof 10* нь модуль p ээр анхны язгуур болох төгсгөлгүй олон p анхны тоо олдоно.

Харин Гаусс ямар давтамжтайгаар 10 нь p модулиарх анхны язгуур болох вэ гэсэн асуултыг тавьж байсан боловч тодорхой таамаглал дэвшүүлэлгүй юм. Энэ талаар Артин Хассетэй ярилцаж байх үедээ энэ асуудлыг маш тодорхой томъёолж дараах таамаглалыг 1927 онд дэвшүүлсэн байна. Энэ асуудлыг одоо Артины таамаглал хэмээн нэрлэдэг.

Таамаглал 2 (Артин). $1/p$ бутархайн үеийн урт $p-1$ байх магадлал нь 37% байна. Илүү тодруулбал, $1/p$ бутархайн үеийн урт $p-1$ байх N -с хэтрэхгүй p анхны тоонуудын тоог N хэтрэхгүй анхны тоонуудын тоотой харьцуулсан харьцаа $N \rightarrow \infty$ үед

$$\prod_{q:} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right) = 0.3739558136\dots$$

Мидигийн теорем

Одоо $1/n$ бутархайн аравтын бичлэгт гарч ирж буй цифрууд санамсаргүй тоонууд мөн эсэхийг болохыг сонирхож үзье. Энэ асуудалд тодорхой хэмжээгээр хариулт өгөх нэгэ үр дүнг 1836 онд математикч Миди (Midy) баталсан байна.

Теорем (Миди). p анхны тоо. $\frac{a}{p}$ бутархайн үеийн урт тэгш тоо болог. Үеийг ижил оронтой тоо үүсгэхээр голоор нь 2 хэсэгт хуваан нэмэхэд дан 9-өөс тогтох тоо гарна.

Тухайлбал, $1/7 = 0.\overline{142857}$ ба $142 + 857 = 999$

Proof. Бутархайн үеийн уртыг $2n$ гээд $a/p = 0.(\overline{a_1 \dots a_{2n}})$ гэж бичье. Үеийн урт тэгш тул $p \neq 2, 5$ байх ба

$$10^{2n} \times \frac{a}{p} - \frac{a}{p} = \overline{a_1 \dots a_{2n}}.$$

Иймд $p \times \overline{a_1 \dots a_{2n}} = (10^{2n} - 1)a$ болох ба адилтгалын баруун тал $10^n - 1$ -д хуваагдана. Бутархайн үеийн урт $2n$ гэдгээс $10^n - 1$ нь p тоотой харилцан анхны юм. Иймээс $\overline{a_1 \dots a_{2n}} \equiv 0 \pmod{10^n - 1}$ буюу

$$\begin{aligned} \overline{a_1 \dots a_n} \times 10^n + \overline{a_{n+1} \dots a_{2n}} &\equiv 0 \pmod{10^n - 1} \\ \Rightarrow \overline{a_1 \dots a_n} + \overline{a_{n+1} \dots a_{2n}} &\equiv 0 \pmod{10^n - 1}. \end{aligned}$$

a_i коэффициентүүд бүгд нэгэн зэрэг 9 биш тул $\overline{a_1 \dots a_n} + \overline{a_{n+1} \dots a_{2n}} < 2(10^n - 1)$. Иймээс

$$\overline{a_1 \dots a_n} + \overline{a_{n+1} \dots a_{2n}} = \overline{9 \dots 9}.$$

□