

Мэндчилгээ

Эрхэм хүндэт уншигч танаа,

Монголын Математикийн Нийгэмлэг болон Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо хамтран энэхүү сэтгүүлийг танд хүргэж байна. Сэтгүүлийг улиралд 1 удаа, жилд 4 удаа гаргахаар төлөвлөж байгаа. Энэ удаа дугаар 1 ба дугаар 2-ыг нэгтгэн хэвлэж байгаа болно. Үүнтэй адилаар зарим дугаарууд хамт хэвлэгдэж магадгүй болохыг болгоон соёрхоно уу?

Сэтгүүлд Монголын Математикийн Олимпиадын хорооноос

1. Монголын Математикийн Олимпиадын III, IV даваа
2. Олон Улсын Математикийн Олимпиад
3. Бүсийн Математикийн Олимпиад

зэрэг олимпиад, уралдаан тэмцээний тухай мэдээ, мэдээлэл мөн бодлого, бодолтууд хэвлэгдэнэ. Мөн Олимпиадын Хорооноос зохион байгуулагддаг сургалтуудын сургалтын материалууд, бусад олимпиадтай холбоотой өгүүллүүд хэвлэгдэнэ.

Монголын Математикийн Нийгэмлэгээс тус нийгэмлэгийн

<https://www.facebook.com/MongolianMathematicalSociety/>

хуудас дээр тогтмол явагдаж буй

1. Оюутан сурагчдад зориулсан долоо хоногийн бодлого
2. Долоо хоногийн бодлого

булангуудын эмхтгэл хэвлэгдэнэ. Мөн математикийн бусад сонирхолтой өгүүллүүд хэвлэгдэх болно.

Та бүхний таалалд нийцнэ гэж итгэж байна. Санал хүсэлт, мөн өөрийн бичсэн өгүүлэл, нүүрэн дээр тавих зураг зэргийг байнга

otogo@num.edu.mn

хаягаар хүлээн авч байна.



Ү. Отгонбаяр
Ерөнхийлөгч
Монголын Математикийн
Нийгэмлэг



Г. Баярмагнай
Дарга
Монголын Математикийн
Олимпиадын Хороо

Агуулга

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо	1
Олон Улсын Математикийн 56-р Олимпиад	1
Бодлогууд	2
ОУМО-д оролцох баг сонгох журам	4
Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын III Даваа	6
Бодлогууд	6
Бодолтууд	12
Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын IV Даваа	35
Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын дүнгийн тухай	35
Бодлогууд	38
Бодолтууд	45
Хичээлүүд	63
Комбинатор тооны онол (Г. Баярмагнай)	63
Диофант тэгшитгэл (Ү. Отгонбаяр)	71
Функционал тэгшитгэл 1 (А. Ганбат)	76
Функционал тэгшитгэл 2 (А. Ганбат)	83
Цэгийн зэрэг (Б. Баяржаргал)	90
Дөрвөн өнцөгтүүд (Д.Пүрэвсүрэн)	98
Монголын Математикийн Нийгэмлэг	111
Бакалаврын элсэлтийн шалгалт	111
Бодлогууд	111
Бодолтууд	115
Магистрын элсэлтийн шалгалт	124
Бодлогууд	124
Бодолтууд	131
Геогейбра ба Монголын Геогейбра Хүрээлэн	144
Геогейбра гэж юу вэ?	144
Монголын Геогейбра Хүрээлэн	146
SIMPA-DAAD “Стохастик Процесс ба Түүний Хэрэглээ” олон улсын сургалт	149

Монголын Математикийн Олимпиадын Хороо

Олон Улсын Математикийн 56-р Олимпиад

Олон Улсын Математикийн 56-р Олимпиад Тайланд улсын Чангмай хотноо 2015 оны 7 сарын 4-16 өдрүүдэд болсон. Монгол улсыг төлөөлж

	Овог	Нэр	Сургууль
MNG1	Олонбаатар	Бодрол	Орчлон
MNG2	Баярмагнай	Эрдэнэбаяр	11
MNG3	Ганболд	Баяржавхлан	Олонлог
MNG4	Батдэлгэр	Пүрэв	Сант
MNG5	Ганбаатар	Амарсанаа	11
MNG6	Шагдар	Золбаяр	Орчлон

нар оролцов. Багийн ахлагчаар Г. Баярмагнай (МУИС), дэд ахлагчаар Ү. Отгонбаяр (МУИС) нар явав.

Бодолт 7 сарын 10, 11 өдрүүдэд явагдаж манай баг нийт 74 оноо авч 45-р байр эзэлсэн. Нийт оролцогчиддоо баяр хүргэе.

Овог	Нэр	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Нийт	Амжилт
Олонбаатар	Бодрол	7	1	0	7	1	0	16	Хүрэл медал
Баярмагнай	Эрдэнэбаяр	4	0	1	7	3	0	15	Хүрэл медал
Шагдар	Золбаяр	4	1	0	7	1	0	13	Тусгай шагнал
Ганболд	Баяржавхлан	7	1	0	0	3	0	11	Тусгай шагнал
Батдэлгэр	Пүрэв	1	0	1	7	1	0	10	Тусгай шагнал
Ганбаатар	Амарсанаа	0	1	0	7	1	0	9	Тусгай шагнал
Монгол	Баг	23	4	2	35	10	0	74	45-р байр



Бодлогууд

Олон Улсын Математикийн 56-р Олимпиадын бодлогуудыг толилуулж байна.

Бодолтыг манай сэтгүүлийн дараагийн дугаараас үзээрэй.

Бодлого 1. Хавтгайн төгсгөлөг тооны цэгүүдээс тогтох $\mathcal{S}$ олонлогийн ялгаатай дурын A ба B цэгүүдийн хувьд $AC = BC$ байх $C \in \mathcal{S}$ цэг олдож байвал $\mathcal{S}$ -ийг *тэнцвэрт* олонлог гэж нэрлэе. $\mathcal{S}$ олонлогийн ялгаатай дурын A , B ба C цэгүүдийн хувьд $PA = PB = PC$ байх $P \in \mathcal{S}$ цэг олдохгүй бол $\mathcal{S}$ -ийг *төвгүй* олонлог гээ.

- (а) Бүхэл тоо $n \geq 3$ бүрийн хувьд n ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт* олонлог олдохыг үзүүл.
- (б) n ширхэг цэгтэй *тэнцвэрт*, *төвгүй* олонлог оршин байх бүх бүхэл $n \geq 3$ -ийг ол.

Бодлого 2. $ab - c$, $bc - a$, ба $ca - b$ тоонууд тус бүрдээ 2-ын зэрэгт байх бүх эерэг бүхэл тоон (a, b, c) гурвалыг ол.

Ямар нэг сөрөг биш n -ийн хувьд 2^n хэлбэрт бичигдэх тоог 2-ын зэрэгт гэнэ.

Бодлого 3. $AB > AC$ байх хурц өнцөгт ABC гурвалжин өгөв. Γ нь түүнийг багтаасан тойрог, H нь ортотөв, F нь A оройгоос татсан өндрийн суурь болог. BC талын дундаж цэгийг M гэе. Q нь Γ дээрх $\angle HQA = 90^\circ$ байх цэг, K нь Γ дээрх $\angle HKQ = 90^\circ$ байх цэг байг. Энд A, B, C, K ба Q цэгүүд давхардахгүй бөгөөд Γ тойрог дээр энэ дарааллын дагуу байрласан гэж үзнэ.

KQH ба FKM гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд шүргэлцэнэ гэж батал.

Бодлого 4. ABC гурвалжин нь O төвтэй Ω тойрогт багтдаг. A цэгт төвтэй Γ тойрог BC хэрчмийг D ба E цэгүүдээр огтолдог бөгөөд B, D, E ба C цэгүүд BC шулуун дээр энэ дарааллын дагуу бүгд ялгаатай байрладаг. Γ ба Ω тойргууд F ба G цэгүүдээр огтлолцдог бөгөөд Ω тойрог дээр A, F, B, C ба G гэсэн дарааллын дагуу байрладаг. BDF гурвалжныг багтаасан тойрог AB хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг K гэе. CGE гурвалжныг багтаасан тойрог CA хэрчимтэй огтлолцох 2 дахь цэгийг L гэе.

FK ба GL шулуунууд ялгаатай X цэгт огтлолцдог байг. AO шулуун X цэгийг дайрна гэж батал.

Бодлого 5. Дурын бодит x, y тоонуудын хувьд

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол. Энд $\mathbb{R}$ -ээр бодит тоон олонлогийг тэмдэглэв.

Бодлого 6. Бүхэл тоон $a_1, a_2, \dots$ дараалал дараах нөхцлүүдийг биелүүлдэг. Үүнд:

- (i) Бүхэл тоо $j \geq 1$ бүрийн хувьд $1 \leq a_j \leq 2015$;
- (ii) Бүхэл тоонууд $1 \leq k \leq l$ бүрийн хувьд $k + a_k \neq l + a_l$.

$n > m \geq N$ байх дурын бүхэл m, n тоонуудын хувьд

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

биелэх эерэг бүхэл b ба N тоонууд олдохыг батал.

ОУМО-д Монгол Улсыг төлөөлж оролцох багийн гишүүдийг сонгох журам

1 Ерөнхий зүйл

- 1.1. Олон Улсын Математикийн Олимпиадад Монгол Улсыг төлөөлж, ОУМО-ийн дүрмийн дагуу, зургаан (6) гишүүнтэй баг оролцоно. Энэ багийг *албан ёсны баг* гэнэ.
- 1.2. Албан ёсны багийг *удирдагч, дэд удирдагч* нар ахлан авч явах бөгөөд удирдагч, дэд удирдагчийг ММОХ сонгоно.
- 1.3. Албан ёсны багт зөвхөн, ОУМО-ийн дүрмийн дагуу, ОУМО-д Монгол Улсыг төлөөлөн оролцох эрх бүхий сурагч багтаж болно. Үүнд ОУМО эхлэх өдөр 20 нас хүрээгүй, их дээд болон түүнтэй дүйцэхүйц сургуульд суралцдаггүй байх хэрэгтэй.
- 1.4. Албан ёсны багийн гишүүдийг *бэлтгэл баг*-ийн гишүүдээс сонгон шалгаруулж авна.

2 Бэлтгэл багийн гишүүдийг сонгох

- 2.1. Бэлтгэл багт дараах амжилтыг үзүүлсэн сурагч орох эрхтэй. Үүнд, тухайн жилийн Монголын Математикийн Олимпиадын 3-ын давааны (УМО)
 - (1) 12-р ангид (алт, мөнгө, хүрэл) медаль авсан эсвэл
 - (2) 11-р ангид алтан медаль авсан.
- 2.2. Бусад сурагчид бэлтгэл багт хамрагдах хүсэлтээ ММОХ-д гаргах бөгөөд бэлтгэл багт оруулах эсэхийг ММОХ шийднэ.

3 Албан ёсны багийн гишүүдийг сонгох

- 3.1. Албан ёсны багийн гишүүдийг бэлтгэл багийн гишүүдээс тэдний тухайн жилийн УМО болон сургалтын үеэр зохион байгуулагдах сорилуудын амжилтаар шалгаруулан сонгоно. Үүнд:
 - (1) Бэлтгэл багийн гишүүн X бүрт
 - i. Олимпиадын нормалчилсан оноо $O(X)$
 - ii. Сорилын оноо $S(X)$

өгөх бөгөөд гишүүдийг нийт оноо

$$N(X) := O(X) + S(X)$$

өндөрөөс намруу жагсаана.

- (2) Нийт оноо давхацсан бол сорилын оноо, $S(X)$, өндөртэй нь урд жагсана.
- (3) Нийт оноо болон сорилын оноо давхацсан бол жагсах эрэмбийг ММОХ шийднэ.
- (4) Хамгийн урд жагссан зургаан гишүүн албан ёсны багт орно.

3.2. Олимпиадын нормалчилсан оноо $O(X)$ -ийг дараах байдлаар тогтооно.

- (1) УМО-д оролцоогүй бол $O(X) = 0$.
- (2) УМО-ын k -р ангид оролцож $U(X)$ оноо авсан бол

$$O(X) := U(X) \frac{U_{12}}{U_k},$$

энд $9 \leq k \leq 12$ бөгөөд U_k нь k -р ангид хамгийн өндөр оноо авсан сурагчийн оноо.

3.3. Сорилын оноог сорилын оноонуудын нийлбэрээр тогтооно: нийт n сорил авсан бөгөөд сорилууд дээр $S_1(X), \dots, S_n(X)$ оноонууд тус тус авсан бол

$$S(X) := S_1(X) + \dots + S_n(X).$$

Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын III Даваа

Бодлогууд

VII анги

Бодлого VII-1. 123456 тооны цифрүүдийг сэлгэж 37-д хуваагддаг хэдэн ялгаатай зургаан оронтой тоо гаргаж болох вэ?

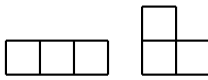
(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VII-2. 220 чулуутай овооноос Бат, Цэцэг 2 дараах байдлаар чулуу авч тоглоно. Эхлээд Бат овооноос 1 юм уу 2 чулуу авна. Дараа нь Цэцэг 2 юм уу 3 чулуу авна, дараа нь Бат 3 юм уу 4 чулуу авна, дараа нь Цэцэг 4 юм уу 5 чулуу авна гэх мэт авна. Үйлдэл хийх боломжгүй болсон тэр тоглогч хожигддог бол зөв тоглолтод аль тоглогч хожих вэ?

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого VII-3. 4×4 хэмжээтэй хүснэгтийн нүднүүдэд натурал тоонууд бичжээ (ижил тоонууд бичиж болно). 3×3 хэмжээтэй 4 квадратад бичигдсэн тоонуудын үржвэр нь дэс дараалсан натурал тоонууд байсан бол энэ хүснэгтэд хамгийн цөөндөө хэдэн 1 бичигдсэн бэ?

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого VII-4. 6×6 хэмжээтэй квадрат дотор  хэлбэртэй 2 төрлийн дүрсийг байрлуулах болжээ (дүрсүүдийг яаж ч эргүүлж болох бөгөөд шугамын дагуу давхардуулахгүй байрлуулна). Квадратын үлдсэн хэсэгт дахиж энэ 2 төрлийн дүрсийг байрлуулж болдоггүй байхаар хамгийн цөөндөө хэдэн дүрс байрлуулж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

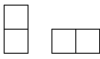
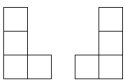
VIII анги

Бодлого VIII-1. a, b, c нь сөрөг биш тоонууд бол

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого VIII-2. 4×4 хэмжээтэй хүснэгтийг  дүрсүүдэд хуваах боломжийн тоог A гэж тэмдэглэе. 8×8 хэмжээтэй хүснэгтийг  дүрсүүдэд хуваах боломжийн тоог B гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $256A < B$ тэнцэтгэл биш биелэхийг батал. (Дүрсийг яаж ч эргүүлж болно.)

(Дэвшүүлсэн: Б. Бат-Од)

Бодлого VIII-3. Бодлого VII-3.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого VIII-4. Хос хосоороо харилцан анхны натурал x, y, z тоонуудын хувьд

$$A = \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x}$$

нийлбэр бүхэл тоо гарчээ. A -ийн боломжит бүх утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

IX анги

Бодлого IX-A1. Натурал a, b тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг (a, b) -ээр, хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг $[a, b]$ -ээр тэмдэглэе.

$$20 \cdot (a + b) + 16 \cdot (a, b) = [a, b]$$

байх бүх натурал a, b тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого IX-A2. Тус бүр $1, 2, \dots, 99, 100$ бөмбөгтэй 100 хайрцаг байжээ. Бат эхэлж, Цэцэг удаалан тэр хоёр ээлжлэн дараах үйлдлийг хийж тоглов. Хоорондоо ялгаатай тооны бөмбөгтэй хоёр хайрцгийг сонгон авч бөмбөгний тоо ижил болтол нэгээс нь нөгөө рүү бөмбөг авч хийж болно. Үйлдэл хийж чадахгүй болсон тоглогч хожигдох бол зөв тоглолтод аль тоглогч хожих вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-A3. $\angle ABC$ өнцөг нь мохоо байх $ABCD$ параллелограмм өгөгджээ. AD, CD талуудын үргэлжлэлүүд ABC гурвалжныг багтаасан ω тойргийг харгалзан E, F цэгүүдэд огтолно. DEF гурвалжныг багтаасан тойргийн төв нь ω тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-Б1. Эерэг a, b, c тоонуудын хувьд $a^3 = b^3 + c^3 - abc$ байв. a тоо нь b, c тоонуудын нэгээс нь хэтрэхгүй, нөгөөгөөс нь багагүй гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого IX-Б2. Хурц өнцөгт ABC гурвалжны BC тал дээр D цэгийг сонгон авчээ. AB шулууны хувьд D цэгтэй тэгш хэмтэй цэгийг E , AC шулууны хувьд E цэгтэй тэгш хэмтэй цэгийг F гэж тэмдэглэе. AC, DF хэрчмүүд K цэгт огтлолцдог бол $\angle DKC = \angle AED$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-Б3. Самбарт нийлбэр нь 2-той тэнцүү 3 ширхэг эерэг энгийн бутархай тоонууд бичигдсэн байв. Нэг удаагийн үйлдлээр аль нэг бутархайн хүртвэрээс 1-ийг хасаж болно. Тэгэхэд хэрэв тэр бутархайн хүртвэр 0 болчихвол энэ бутархайг самбараас арчина. Үйлдлийг олон удаа хийж, самбарт нийлбэр нь 1-тэй тэнцүү бутархай тоонуудыг гарган авч чадахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Х анги

Бодлого X-A1. a, b, c, d бүхэл тоонуудын хувьд $ab + cd, ac - bd$ нь 43-д хуваагддаг бол $ac + bd$ нь мөн 43-д хуваагдахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого X-A2. Бодлого IX-A3.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-A3. a, b, c нь $ab + bc + ca = 3$ байх эерэг тоонууд бол

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9(a + b + c) \geq 6 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар/Б. Эрдэнэбаяр)

Бодлого X-Б1. $x^2 + 3xy + y^3 = 0$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого X-Б2. Нэгэн улсын зарим хотуудын хоорондох агаарын 2016 ширхэг нислэгийг агаарын тээврийн 3 компани үйлддэг байжээ (A хотоос B хот руу, B хотоос A хот руу нисэх нислэгийг ижил гэж үзэх ба үүнийг нэг л компани үйлдэнэ). Нэг компани бүх нислэгээ зогсооход улсын аль ч хотоос аль ч хот руу үлдсэн 2 компанийн нислэгээр дамжин очиж болдог байжээ. Энэ улс хамгийн олондоо хэдэн хоттой байж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого X-Б3. ABC гурвалжны AD биссектрисийг татаад AC тал дээр E цэгийг $CD = CE$ байхаар сонгож авчээ. Гурвалжны B өнцгийн биссектрис нь DE хэрчмийг K цэгт огтолдог бол $AK = KD$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

XI анги

Бодлого XI-A1. $x, y, z > 0$ ба $xy + yz + zx = 2xyz$ бол $x^2 + y^2 + z^2 < x^2y^2z^2$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Эрдэнэбаяр)

Бодлого XI-A2. ABC гурвалжны AD биссектрисийг татжээ. Гурвалжны A оройг дайрсан BC талыг D цэгт шүргэдэг ω тойрог AC талыг E цэгт огтолно. BE шулуун ω тойргийг E цэгээс ялгаатай K цэгт дахин огтолно. AK шулуун BD хэрчмийн дундаж цэгийг дайрахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-A3. a нь 10-тай харилцан анхны натурал тоо. Тэгвэл n^n тоо нь a тоогоор төгссөн байх n натурал тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-B1. Ямар ч 2-ын натурал зэрэгтийн дүр нь 2-ын натурал зэрэгт байдаг бүх бүхэл коэффициенттэй олон гишүүнтийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-B2. $ABCD$ гэсэн $AB = BC = CD$ байх дөрвөн өнцөгтийн B, C өнцгийн биссектрисүүд Q цэгт огтлолцдог байг. B цэгийг дайрсан AQ шулуунд перпендикуляр шулуун нь C цэгийг дайрсан DQ шулуунтай перпендикуляр шулуунтай S цэгт огтлолцоно. Тэгвэл SQ ба AD шулуунууд хоорондоо перпендикуляр гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого XI-B3. , хэлбэрийн дүрсүүдийг ашиглан $4 \times n$ хүснэгтийг давхардуулалгүй хучиж болдог бол n -ийн авч болох бүх утгыг ол. (Дүрс бүр дор хаяж нэг удаа ашиглагдах ёстой ба дүрсийг зөвхөн эргүүлж ашиглахыг зөвшөөрнө.)

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал/Т. Базар)

ХII анги

Бодлого ХII-A1. ABC гурвалжны A оройгоос AD биссектрис татаж, DB цацраг дээр $BD = BK$ байх K цэг авав. D цэгийг дайрсан AK шулуунтай параллель шулуун нь C цэгийг дайрсан AD шулуунтай параллель шулуунтай S цэгт огтлолцдог бол $\angle SAC = \angle KAB$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ХII-A2. a, b, c, d эерэг бодит тоонуудын хувьд $abcd = 1$ бол

$$(a+b+c)^3 + (b+c+d)^3 + (c+d+a)^3 + (d+a+b)^3 \geq 27\sqrt{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ХII-A3. Бодлого ХI-A3.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ХII-B1. Тойрог дээр эерэг, сөрөг тоонууд бичжээ. Тойрог дээр бичигдсэн ямар ч сөрөг тоог цагийн зүүний дагуу дараагийн хэдэн тоотой нь хамт нэмэхэд нийлбэр нь сөрөг биш гардаг байв (дараагийн хэдэн ч тоо байж болох бөгөөд ядаж нэг тоог нэмнэ). Бичигдсэн бүх тооны нийлбэр сөрөг биш гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ХII-B2. p нь анхны тоо бол $0 \leq a, b, c, d < p^3$ бөгөөд $ab - cd - 1$ нь p^3 -д хуваагдаг байх (a, b, c, d) бүхэл тоон дөрвөлийн тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого ХII-B3. AB, CD суурьтай $ABCD$ трапец өгөгджээ. ABD гурвалжинд багтсан тойрог AB, BD талуудыг K, L цэгүүдэд шүргэнэ. ACD гурвалжинд багтсан тойрог AC, CD талуудыг M, N цэгүүдэд шүргэнэ. KL, MN шулуунуудын огтлолцлын цэг нь трапедын дундаж шугам дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-A1. 3×3 хүснэгтийн нүд бүрд 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 тооны яг нэг нь байрлана. Ингэхдээ дурын зэрэгцээ орших хоёр нүдэнд байх тооны нийлбэр нь анхны тоо байхаар байрлуулж болох уу? (Ерөнхий талтай нүднүүдийг зэрэгцээ гэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-А2. Нэг тойрог дээр байрласан 11 ширхэг чийдэнгийн зарим нь асаалттай, үлдсэн нь унтраалттай байв. Асаалттай чийдэн бүрийн 2 хөрш чийдэн хоёул унтраалттай бөгөөд унтраалттай чийдэн бүрийн ядаж 1 хөрш чийдэн нь асаалттай байдаг бол асаалттай чийдэнгийн тоо хэд байх боломжтой вэ?

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-А3. Бодлого VIII-4.

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-Б1. a, b, c цифрүүд нь гурвалжны талууд болж чадах хэдэн ялгаатай $\overline{abc}$ гэсэн гурван оронтой тоо олдох вэ?

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-Б2. $x^{2016} - y^{2016} = 2^{2017}$ тэгшитгэлийн бүх бүхэл шийдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-Б3. $\angle B = 2 \cdot \angle A$ байх ABC гурвалжны багтсан тойргийн төв I бөгөөд $AI = BC$ бол уг гурвалжны өнцгүүдийг ол.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. a, b, c нь эерэг тоонууд бол

$$(1 + a + b)^3 + (1 + b + c)^3 + (1 + c + a)^3 \geq 9(a + b + c)^2$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ДБ-А2. Бодлого XI-A3.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-А3. Өгөгдсөн натурал n тооны хувьд $2n$ оройтой бүтэн графыг яаж ч будсан нэг өнгийн цикл заавал олддог байхаар хамгийн ихдээ хэдэн өнгөөр будаж болох вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого ДБ-Б1. $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ олонлогийн 50 элементтэй дурын дэд олонлог нь арифметик прогресс үүсгэх 3 тоо агуулахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого ДБ-Б2. $b_0, b_1, \dots, b_n$ бодит тоонуудын хувьд $g(x)$ функцийг

$$g(x) = b_n \cos(nx) + b_{n-1} \cos((n-1)x) + \dots + b_1 \cos(x) + b_0$$

гэж тодорхойлъя. Тэгвэл $|b_n| \leq |g(x_0)|$ биелэх бодит x_0 тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ц. Дашдорж)

Бодлого ДБ-Б3. A, B фокустой γ эллипс дээр C цэгийг сонгон авчээ (γ нь $AX + BX = \text{const}$ байх хавтгайн X цэгүүдийн геометр байр юм). AC, BC шулуунууд γ эллипсийг C цэгээс ялгаатай D, E цэгүүдэд дахин огтлоно. Эллипсийн D, E цэгүүдэд татсан шүргэгчүүд K цэгт огтлолцдог бол CK хэрчмийн дундаж цэг нь ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршихыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодолтууд

VII анги

Бодолт VII-1. Хариу: 48 ширхэг. Уг тооны цифрүүдийг сэлгэж 37-д хуваагддаг $\overline{abcdef}$ тоог гаргасан гэж үзье. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ тул 3-д хуваагдах тооны шинжээр энэ тоо 3-д хуваагдана. Тэгэхлээр $3 \cdot 37 = 111$ -д хуваагдах ёстой.

$$\overline{abcdef} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{def} = 999 \cdot \overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$$

бөгөөд 999 нь 111-д хуваагдах тул $\overline{abc} + \overline{def}$ нийлбэр нь 111-д хуваагдана. Эхлээд энэ нийлбэр нь 4 оронтой байж болохгүй гэдгийг харуулъя. Нийлбэр 4 оронтой гарахын тулд a, d цифрүүд нь 4, 6 гэсэн цифрүүд эсвэл 5, 6 гэсэн цифрүүд байх ёстой. a, d цифрүүд нь 4, 6 цифрүүд байвал нийлбэр нь хамгийн багадаа $413 + 625 = 1038$, хамгийн ихдээ $451 + 632 = 1038$ гарна. Харин a, d цифрүүд нь 5, 6 цифрүүд байвал нийлбэр нь хамгийн багадаа $513 + 624 = 1137$, хамгийн ихдээ $531 + 642 = 1173$ гарна. 1038, 1083 тоонуудын хооронд, мөн 1137, 1173 тоонуудын хооронд 111-д хуваагддаг тоо байхгүй. Иймд нийлбэр 111-д хуваагддаг 3 оронтой тоо буюу 3 ижил цифрээр бичигдсэн 3 оронтой тоо байна.

Энэ нийлбэр нь хамгийн багадаа $\overline{abc} + \overline{def} \geq 135 + 246 = 381$ байж болох тул тэр 3 ижил цифр нь 3-аас их цифрүүд юм. Тэгэхлээр энэ нийлбэрт аравт, нэгжийн орон дээр орон шилжихгүй. Эндээс, уг нийлбэрийн цифрүүд нь $\frac{1+2+3+4+5+6}{3} = 7$ гэж олдоно.

$\overline{abc} + \overline{def} = 777$ байхын тулд нэг орон дээрх $(a, d); (b, e); (c, f)$ гэсэн хос цифрүүд нь $(1, 6); (2, 5); (3, 4)$ гэсэн хосууд байх ёстой. Эдгээр хосууд нь оронгийн байраа $3! = 6$ янзаар, харин хос дотроо $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ янзаар байраа сэлгэх боломжтой тул нийт $6 \cdot 8 = 48$ ширхэг тоо байна.

Бодолт VII-2. $220 = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40$ юм.

Бат хэрэв $2k$ буюу тэгш тооны чулуу авбал Цэцэг мөн адил тооны чулуу авах ба хэрэв Бат $2k - 1$ буюу сондгой тооны чулуу авбал Цэцэг $2k + 1$ тооны чулуу авна. Өөрөөр хэлбэл 4-д хуваагддаг болгож гүйцээгээд байх юм.

Бат хэрэв үйлдэл хийж чадах бол Цэцэг мөн заавал үйлдэл хийж чадах тул Цэцэг хожих юм.

Бодолт VII-3. Дэс дараалсан тоонуудыг $n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$ гэе. 4×4 хүснэгтийн (Хүснэгт 1) төвийн 2×2 -д байрлах тоо бүр энэ дараалсан 4 тоог хуваах тул бүгд 1 байна. Харин хүснэгтийн *-той нүдэнд бичигдэх тоо өгөгдсөн 4 тооны аль нэг хоёрыг хуваана.

$\text{ХИЕХ}(n + i, n + j) = \text{ХИЕХ}(n + i, i - j)$ тул *-той нүдэнд бичигдэх тоо 1, 2 эсвэл 3 байх боломжтой. Зөвхөн $\text{ХИЕХ}(n + 1, n + 3)$ ба $\text{ХИЕХ}(n + 2, n + 4)$ -ийн аль нэг нь 2, $\text{ХИЕХ}(n + 1, n + 4)$ нь 3 байх боломжтой тул дор хаяад зургаан *-той нүдэнд 1 бичигдэнэ. Иймд хамгийн цөөндөө 10 ширхэг 1 бичигдэх боломжтой ба жишээг Хүснэгт 2-т үзүүлэв.

Хүснэгт 1

	*	*	
*	1	1	*
*	1	1	*
	*	*	

Хүснэгт 2

11	1	1	5
1	1	1	1
1	1	1	2
3	1	3	2

Бодолт VII-4. Хамгийн багадаа 7 дүрс байрлуулна (зураг үз).

Одоо 7-с цөөн дүрс байрлуулж болохгүйг харуулъя. Бодлогод өгөгдсөн дүрсүүдийг харгалзан 1×3 дүрс, булан дүрс гэж нэрлэе.

Байрлуулсан дүрснүүдийн нүднүүдийг будсан хэмээн сэтгээд 6×6 хэмжээтэй квадрат-аа 9 ширхэг 2×2 хэмжээтэй квадратуудад хуваая (зураг үз). Тэгвэл аль ч 2×2 квадратад дахин булан дүрс байрлуулж болохгүй байхын тулд дор хаяж 2 ширхэг нүд нь будагдсан байх ёстой. Иймд дор хаяж нийт $9 \times 2 = 18$ ширхэг нүд будагдсан байна. Эндээс дор хаяж $18 : 3 = 6$ дүрс байрлуулах ёстой гэж гарна.

Одоо яг 6 дүрс байрлуулж болдог гэж үзье. Тэгвэл A, B, C, D, E, F квадрат бүрд яг 2 ширхэг нүд будагдсан байна. 2×2 хэмжээтэй X квадратын хувьд нүднүүдийг нь

харгалзан

X1	X2
X3	X4

 гэж тэмдэглэе.

- Хэрэв $A1$ нүд будагдсан бол өгөгдсөн 3 нүдтэй дүрсүүдээр хучихын тулд $A2, A3$ нүднүүдийн аль нэг нь заавал будагдсан байна. Тэгш эрхтэй учир $A2$ нүд будагдсан гэж үзье. Тэгвэл $A3, A4$ нүд будагдаагүй болох ба $A1, A2$ нүднүүдийг 1×3 дүрсээр хучих учир $B1$ нүд мөн будагдсан байна. $A3, A4$ нүд будагдаагүй учир $B3, C1, C2$ нүднүүд будагдсан болно. Иймд $B2, B4$ нүд будагдаагүй тул $D2$ будагдсан болно. $C1, C2$ будагдсан тул $C3, C4$ будагдаагүй байна. Эндээс

$D3$ будагдсан болно. Эндээс $C1, C2$ нүднүүдийн хөршүүд нь огт будагдаагүй болох ба ийм байхаар уг 2 нүдийг өгөгдсөн дүрсүүдээр хучих боломжгүй юм.

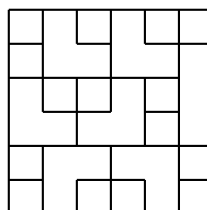
2. $A1$ нүд будагдаагүй байг. Тэгвэл 2 тохиолдолд сална. Эхлээд $A2, A3$ нүднүүд будагдсан байх тохиолдлыг авч үзье. $A2$ нүдийг булан эсвэл 1×3 дүрсээр хучиж болно. Хэрэв 1×3 дүрсээр хучсан бол $B1, B2$ будагдсан болох ба $A4, B3, B4$ будагдаагүй болж 1×3 дүрс байрлах боломжтой болно. Иймд $A2$ нүдийг булан дүрсээр хучсан гээ. Тэгвэл $B1, B3$ будагдсан болох ба $B2, B4$ будагдаагүй болно. Эндээс $D2$ будагдсан байх болно. Яг адилаар $C3, C4$ будагдаагүй ба $D3$ будагдсан байна. Эндээс $E1, E2$ будагдсан, $E3, E4$ будагдаагүй, $F3$ мөн будагдаагүй гэж гарна. $F1$ будагдсан бол $F2, F4$ будагдаагүй болох ба $D4$ мөн будагдаагүй тул 1×3 дүрс байрлах боломжтой болно. $F1$ будагдаагүй бол $D3$ нүдний бүх хөршүүд будагдаагүй болох ба ийм байх боломжгүй юм.

Одоо $A2, A4$ нүд будагдсан байх тохиолдлыг авч үзье ($A3, A4$ нүд будагдсан байх тохиолдол нь ижил). Энэ үед $A1, A3$ нүд будагдаагүй болох ба $C1$ нүд будагдсан болно. C квадрат яг 2 будагдсан нүд агуулах учир $C1$ нүдийг агуулсан дүрс заавал 1×3 дүрс байна. Хэрэв уг 1×3 дүрс $C1, C3, E1$ хучдаг бол $C2, C4$ будагдаагүй болох ба $E2$ будагдсан болно. $E3, E4$ будагдаагүй бол $F3$ будагдсан болно. $E2$ нүдний хувьд дүрсээр хучигдахын тулд $F1$ будагдсан байх ёстой болно. $C2, C4$ будагдаагүй тул $D1, D3$ будагдсан болох ба $D2, D4$ будагдаагүй болно. F квадратын хувьд $F2$ будагдаагүй болох тул $D2, D4, F2$ дээр 1×3 дүрс байрлах боломжтой болж зөрчил үүснэ.

Хэрэв $C1$ -г хучсан 1×3 дүрс нь $C2, D1$ -г хучдаг байг. Эндээс $C3, C4$ будагдаагүй ба $D3$ будагдсан болно. Иймд $D2, D4$ будагдаагүй болно. $C3, C4$ будагдаагүй учраас $E1, E2$ будагдах ба $E3, E4$ будагдаагүй болно. Иймд $F3$ будагдсан байна. $D2$ нүдний хувьд дүрсээр хучигдсан байхын тулд $F1$ заавал будагдсан байна. Эндээс $F2$ будагдаагүй болох ба $D2, D4, F2$ дээр 1×3 дүрс байрлах боломжтой болж зөрчил үүснэ.

Иймд 6 дүрс байрлуулж болохгүй юм.

A	B	
C	D	
E	F	



VIII анги

Бодолт VIII-1. a^2 ба $a^2 + c^2$ тоонуудын хувьд Кошийн тэнцэтгэл биш бичвэл

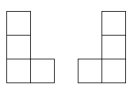
$$\sqrt{a^2(a^2 + c^2)} = a\sqrt{a^2 + c^2} \leq \frac{a^2 + a^2 + c^2}{2} = a^2 + \frac{c^2}{2}$$

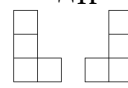
гэж гарна. Үүнтэй нэгэн адилаар

$$\sqrt{b^2(b^2 + c^2)} = b\sqrt{b^2 + c^2} \leq \frac{b^2 + b^2 + c^2}{2} = b^2 + \frac{c^2}{2}$$

болох ба энэ хоёр тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмэхэд батлах ёстой тэнцэтгэл биш гарна. Тэнцэтгэл биш тэнцэлдээ $a^2 = a^2 + c^2$, $b^2 = b^2 + c^2$ буюу $c = 0$ үед хүрнэ. Мөн тэнцэтгэл бишийн хоёр талыг квадрат зэрэгт дэвшүүлэх аргаар бас баталж болно.

Бодолт VIII-2. A нь 8×8 хэмжээтэй хүснэгтийг 2×4 дүрсээр хучих боломжийн тоотой тэнцүү болох нь илэрхий. Тэдгээр хучилтуудыг $P_1, P_2, \dots, P_A$ гэж тэмдэглэе. Эдгээрээс дурын P гэсэн хучилтыг авч үзье. Уг хучилтад 8 ширхэг 2×4 дүрс байх

ба тэр бүрийг  дүрсээр 2 янзаар хучиж болно. Өөрөөр хэлбэл бид P хучилт

бүрээс 8×8 дүрсийг  дүрсээр хучих 2^8 ширхэг хучилт үүсгэж байна.

Одоо $P = P_i$ хучилтаас үүсэх шинэ хучилт X бүр нь $Q = P_j$ ($i \neq j$) хучилтаас үүсэх шинэ хучилт Y бүрээс ялгаатай гэж батлахад хангалттай. Эсрэгээс нь X ба Y нь ижилхэн гэж үзье. P ба Q нь ялгаатай гэдгээс дараах өгүүлбэрийг хангах 8×8 хүснэгтийн нүд олдоно:

P хучлагын уг нүдийг агуулсан 2×4 тэгш өнцөгт нь
 Q хучлагын уг нүдийг агуулсан 2×4 тэгш өнцөгтөөс ялгаатай. (1)

Гэтэл уг нүдийг агуулах  дүрсийг агуулсан 2×4 хэмжээтэй тэгш өнцөгт нь цор ганц байх тул (1)-д зөрчил үүснэ.

Иймд $A \cdot 2^8 \leq B$ болно.

Бодолт VIII-3. Бодолт VII-3.

Бодолт VIII-4. Хариу: 6, 7, 8.

Юуны өмнө үл хураагдах $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ бутархайнуудын хувьд b нь анхны p тоонд хуваагддаг, харин d нь p -д хуваагдахгүй бол $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ нийлбэр бүхэл биш гэдгийг тэмдэглэе. Үнэхээр энэ үед $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ бутархайн хуваарь p -д хуваагдах ба a , d нь p -д хуваагдахгүй тул хүртвэр $ad+bc$ нь p -д хуваагдахгүй. Одоо энэ дүгнэлтийг ашиглан A нийлбэр бүхэл бол түүний нэмэгдэхүүн тус бүр, жишээлбэл $\frac{x+y}{z}$ бүхэл гэдгийг харуулъя. $z = 1$ үед бүхэл байх нь ойлгомжтой. $z > 1$ үед $\frac{x+y}{z}$ нь бүхэл биш бол ижил үржигдэхүүнүүдийг

хураасны дараа $\frac{x+y}{z} = \frac{a}{b}$ бутархайн хуваарьт z -г хуваадаг ядаж нэг p анхны тоо үлдэнэ. z нь x , y -тэй харилцан анхны тул $\frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} = \frac{c}{d}$ бутархайн хуваарьт p тоо байхгүй. Тэгэхлээр өмнө тэмдэглэсэн дүгнэлтээр $A = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ нийлбэр бүхэл биш.

x , y , z тоонуудын аль нэг 2 нь хоорондоо тэнцүү, тухайлбал $x = y$ бол заавал $x = y = 1$ байх ёстой бөгөөд энэ үед $\frac{x+y}{z} = \frac{2}{z}$ бүхэл гэдгээс $z = 1$ эсвэл $z = 2$ гэж олдоно. Эхний тохиолдолд $A = 6$, дараагийн тохиолдолд $A = 7$ байна. x , y , z тоонууд хоорондоо ялгаатай бол бид $x < y < z$ гэж үзэж болох бөгөөд $\frac{x+y}{z} < 2$ нь бүхэл гэдгээс заавал $x + y = z$ гарна. Цаашилбал $\frac{x+z}{y} = 1 + \frac{2x}{y}$ нь бүхэл гэдгээс $2x = y$ гэж олдоно. x , y тоонууд харилцан анхны тул $x = 1$, $y = 2$ байж болно. Иймд $z = 3$ бөгөөд энэ тохиолдолд $A = 8$ юм.

IX анги

Бодолт IX-A1. a, b натурал тоонуудын хувьд $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$ байдаг билээ.

$(a, b) = d$, $a = d \cdot x$, $b = d \cdot y$ гэе. Тэгвэл $(x, y) = 1$ болно. Өгөгдсөн тэгшитгэлийн хоёр талыг d -ээр үржүүлбэл

$$20 \cdot (dx + dy) \cdot d + 16 \cdot d^2 = [a, b] \cdot d = a \cdot b = d^2 \cdot xy$$

болно.

Эндээс $20(x + y) + 16 = xy$ болох буюу $(x - 20) \cdot (y - 20) = 416$ байна.

x, y нь $(x, y) = 1$ байх натурал тоонууд тул хоёул тэгш байж чадахгүй.

Иймд

$$\begin{cases} x - 20 = 1 \\ y - 20 = 416 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 20 = 416 \\ y - 20 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 20 = 13 \\ y - 20 = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 20 = 32 \\ y - 20 = 13 \end{cases}$$

байх боломжтой болно.

Эндээс x, y -г олох ба $(x, y) = 1$ байх эсэхийг шалгана. Эцсийн хариу:

$$(a, b) = \{(21d, 436d), (436d, 21d), (33d, 52d), (52d, 33d) \mid d \in \mathbb{N}\}$$

байна.

Бодолт IX-A2. Хариу: Цэцэг хожно.

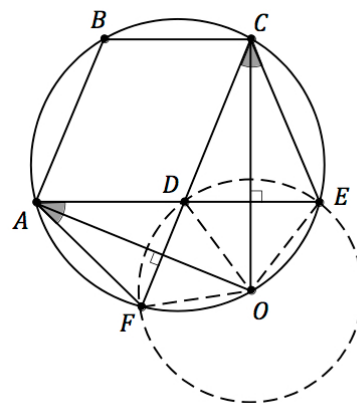
$a > b$ үед $a^2 + b^2 > 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ байх учраас тоглогчид үйлдэл хийх тусам хайрцгуудын бөмбөгний тооны квадратуудын нийлбэр багасна. Энэ нийлбэр төгсгөлгүй багасаж чадахгүй тул тоглоом хэзээ нэг цагт дуусах ёстой.

Одоо Цэцэг хэрхэн хожихыг харуулъя. $x + y = 101$ байх x , y бөмбөгтэй 2 хайрцгийг “хос” хайрцгууд гэж нэрлэе. Анх 50 хос хайрцаг бий. Бат a, b бөмбөгтэй 2 хайрцагт

үйлдэл хийвэл $a+b$ нийлбэр заавал тэгш байх ёстой, Тэгэхлээр түүний үйлдэл хийсэн 2 хайрцаг нь заавал 2 өөр хосод байна. Энэ үед Цэцэг Батын сонгосон 2 хайрцгийн хосын нөгөө өрөөсөн хайрцгууд болох $101-a$, $101-b$ бөмбөгтэй хайрцгуудад үйлдэл хийж тоглож. Тэгэхэд Цэцэгийн үйлдлийн дараа хайрцгууд дахин 50 хос хайрцаг болж хуваагдана. Энэ аргаар Цэцэг ямарт үйлдэл хийж чадах бөгөөд тоглоом хэзээ нэг цагт дуусах ёстой тул үйлдэл хийж чадахгүй болох тоглогч нь Бат юм.

Бодолт IX-A3.

Тойрогт багтсан трапец адил хажуут трапец байдаг. Тэгэхлээр $ABCE$, $ABCF$ трапецууд ажил хажуут буюу $AB = CE$ ба $AF = BC$ байна. Эндээс $CD = CE$, $AD = AF$ буюу DCE , DAF гурвалжнууд адил хажуут гурвалжнууд гэж гарна. ω тойргийн EF нумын дундаж цэгийг O гэж тэмдэглэе (зураг). $\angle DCO = \angle FCO = \angle ECO$ тул CO шулуун нь адил хажуут DCE гурвалжны өндөр-медиан-биссектрис шулуун мөн. Өөрөөр хэлбэл, CO шулуун нь DE хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулуун юм. Тэгэхлээр $DO = EO$ байна. Үүнтэй нэгэн адилаар AO шулуун нь DF хэрчмийн дундаж перпендикуляр шулуун болох ба $DO = FO$ байна. Иймд $DO = EO = FO$ буюу O нь DEF гурвалжныг багтаасан тойргийн төв мөн.



Мөн өөрөөр, DEF гурвалжны багтаасан тойргийн төвийг O гэж тэмдэглээд, төв өнцөг багтсан өнцгөөс 2 дахин их гэдгийг ашиглахад $\angle DOE = 2\angle DFE = 2\angle CFE = 2\angle DEF = 2\angle AEF$ болно. Өөрөөр хэлбэл, $\angle DOE$, $\angle DOF$ өнцгүүд нь ω тойргийн CE , AF нумуудад тулсан өнцгүүдээс 2 дахин их гэж гарна. AB , CE нумууд хоорондоо ижил, AF , BC нумууд хоорондоо ижил тул $\angle EOF = \angle DOE + \angle DOF$ өнцөг нь AF , AB , BC , CE нумуудын нийлбэр буюу A , B , C цэгүүдийг агуулсан FE нумд тулсан өнцөгтэй тэнцүү байна. Тэгэхлээр O цэг ω тойрог дээр оршино.

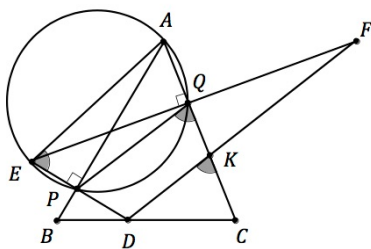
Бодолт IX-B1. Эсрэгээс нь үзвэл a нь b , c -ээс хоёулангаас нь их эсвэл хоёулангаас нь бага байж болно. Эхлээд $a > b, c$ гэж үзье. Тэгвэл $b^3 + c^3 - abc = a^3 > b^3$ болох ба эндээс $c^3 > abc$ гэж гарна.

$c > 0$ тул $c^2 > ab$ болно. Үүнтэй адилаар $b^2 > ac$ болно.

Эдгээрийн их талыг хооронд нь үржүүлбэл $b^2 \cdot c^2 > ac \cdot ab$ буюу эндээс $bc > a^2$ болж зөрчил үүснэ.

$a < b, c$ үед өмнөхтэй яг адилаар бодогдох ба бүх тэмдэг эсрэгээрээ солигдоно. Иймд a тоо нь b, c тоонуудын нэгээс нь хэтрэхгүй, нөгөөгөөс нь багагүй байна.

Бодолт IX-Б2.



D цэгээс AB шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг P гэж, E цэгээс AC шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг Q гэж тэмдэглэе. Тэгвэл PQ хэрчим нь DEF гурвалжны дундаж шугам мөн. $\angle APE = \angle AQE = 90^\circ$ тул A, Q, P, E цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Тэгэхлээр $\angle AED = \angle PQC$ байна. Нөгөө талаас, $PQ \parallel DF$ тул $\angle PQC = \angle DKC$ байна.

Бодолт IX-Б3. Бутархайнуудаа $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{k}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{k} = 2$ болно.

Бид $\frac{a'}{m} + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{k} = 1$ ба $a' \leq a, b' \leq b, c' \leq c$ байх сөрөг биш бүхэл a', b', c' тоонууд олдоно гэж батлахад хангалттай.

Хэрэв аль нэг бутархай 1-ээс багагүй бол уг бутархайгаас 1-ийг хасахад бодлогын нөхцөл биелэх сөрөг биш бүхэл a', b', c' тоонууд олдох нь тодорхой юм. Иймд бүх бутархай 1-ээс бага байг.

Бид $(a, m) = 1$ гэж үзэж болно. Учир нь $(a, m) > 1$ байх тохиолдол нь $(a, m) = 1$ байх тохиолдлоос шууд мөрдөж гарна. Яг адилаар $(b, n) = 1, (c, k) = 1$ гэж үзэж болно.

Одоо 2 тохиолдол авч үзье.

- (i) m, n, k тоонуудын аль нэг хоёр нь харилцан анхны байг. $(m, n) = 1$ гэж үзэхэд явцуурахгүй.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{k} = 2 \iff ank + bmk + ctn = 2mnk$$

болох ба $(a, m) = (b, n) = (c, k) = (m, n) = 1$ нөхцөлүүдээс $k = mn$ гэж гарна.

$\frac{a}{m} + \left(\frac{b}{n} - \frac{x}{n}\right) + \left(\frac{c}{mn} - \frac{y}{n}\right) = 1$ буюу $x + y = n$ ба $x \leq b, y \leq \left[\frac{c}{m}\right]$ байх сөрөг биш бүхэл x, y тоонууд олдохыг харуулъя. (Энд $[a]$ нь a тооны бүхэл хэсгийг тэмдэглэнэ).

Үүний тулд $b + \left[\frac{c}{m}\right] \geq n$ гэж харуулахад хангалттай. $\frac{a}{m} < 1$ тул $\frac{b}{n} + \frac{c}{mn} > 1$ байна. Эндээс $b + \frac{c}{m} > n$ буюу $\frac{c}{m} > n - b$ болно. Иймд $n - b$ тоо нь бүхэл учраас $\left[\frac{c}{m}\right] \geq n - b$ болж батлагдав. Өөрөөр хэлбэл $a' = a, b' = b - x, c' = c - my$ болно.

- (ii) m, n, k тоонууд нь хос хосоороо харилцан анхны биш байг. Өгөгдсөн 3 бутархайн нэг нь $\frac{2}{3}$ -оос багагүй, мөн нэг нь $\frac{1}{2}$ -ээс багагүй байна. Хэрэв аль нэг хоёр бутархай нь $\frac{1}{2}$ -ээс бага бол үлдсэн бутархай нь 1-ээс их болж бодлого шууд бодогдоно. $\frac{a}{m} \geq \frac{2}{3}, \frac{b}{n} \geq \frac{1}{2}$ гэж үзэхэд явцуурахгүй. p нь m, n -ийг хуваадаг 1-ээс их ямар нэг хуваагч байг. $\left(\frac{a}{m} - \frac{x}{p}\right) + \left(\frac{b}{n} - \frac{y}{p}\right) + \frac{c}{k} = 1$ буюу $x + y = p$ ба $x \leq \left[\frac{ap}{m}\right], y \leq \left[\frac{bp}{n}\right]$ байх сөрөг биш бүхэл x, y тоонууд олдохыг харуулъя. Үүний тулд $\left[\frac{ap}{m}\right] + \left[\frac{bp}{n}\right] \geq p$ гэж харуулахад хангалттай.

$$\left[\frac{ap}{m}\right] + \left[\frac{bp}{n}\right] \geq \left[\frac{2}{3}p\right] + \left[\frac{1}{2}p\right] > \left(\frac{2}{3}p - 1\right) + \left(\frac{1}{2}p - 1\right) = \frac{7}{6}p - 2$$

болох ба $p \geq 12$ үед $\frac{7}{6}p - 2 \geq p$ байх нь тодорхой юм. $p = 2, 3, \dots, 11$ үед $\left[\frac{2}{3}p\right] + \left[\frac{1}{2}p\right] \geq p$ гэдгийг төвөггүй шалгаж болно. Эндээс $a' = a - x \cdot \frac{m}{p}, b' = b - y \cdot \frac{n}{p}, c' = c$ гэж авахад бодлого бодогдоно.

Х анги

Бодолт Х-А1. Өгсөн нөхцөлөөс $(ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 = (a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$ тоо нь 43-д хуваагдана. Эндээс $a^2 + d^2$ эсвэл $c^2 + d^2$ нь 43-д хуваагдана.

$a^2 + d^2$ нь 43-д хуваагддаг байг. $(ad, 43) = 1$ гэж үзье. Жишлэг ашиглавал $a^2 \equiv -d^2 \pmod{43}$ болох ба жишлэгийн хоёр талыг 21 зэрэгтэд дэвшүүлбэл $a^{42} \equiv -d^{42} \pmod{43}$ болно.

Гэтэл Фермагийн бага теорем ёсоор $a^{42} \equiv d^{42} \equiv 1 \pmod{43}$ байх тул дээрх жишлэг нь $1 \equiv -1 \pmod{43}$ болж биелэхгүй юм.

Иймд a ба d нь хоёул 43-д хуваагдана. Эндээс $ac + bd$ нь 43-д хуваагдана.

$b^2 + c^2$ нь 43-д хуваагддаг байх үед дээрхтэй яг адилаар b ба c нь хоёул 43-д хуваагдана гэж гарна. Эндээс $ac + bd$ нь 43-д хуваагдана.

Бодолт Х-А2. Бодолт IX-A3.

Бодолт Х-А3. Одоо бид дурын эерэг a, b, c бодит тоонуудын хувьд

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a))$$

гэдгийг мэдэх билээ.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 9(a+b+c) &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab+bc+ca)(a+b+c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3((a+b)(b+c)(c+a) + abc) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) + 3abc \\ &\geq^{(1)} ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= ab(a+b) + 1 + bc(b+c) + 1 + ca(c+a) + 1 + \\ &\quad + 3(a+b)(b+c)(c+a) - 3 \\ &\geq 3ab + 3bc + 3ac - 3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &= 6 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

болж батлагдав.

Бодолт Х-Б1. (x, y) нь дээрх тэгшитгэлийн шийд болог. Тэгвэл

$$y^2(9-4y) = 9y^2 - 4y^3 = 9y^2 + 12xy + 4x^2 = (3y+2x)^2 \quad (*)$$

болно. Иймд $9-4y$ нь бүтэн квадрат болно.

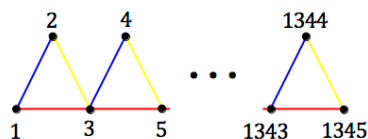
$9-4y$ нь сондгой учир $9-4y = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ гэж бичиж болно. Тэгвэл $y = 2 - k - k^2$ болно.

(*)-оос $2x+3y = \pm y(2k+1)$ болно. Эндээс бүх шийдийг бичвэл $(x, y) = ((k-1)(2-k-k^2), 2-k-k^2)$ ба $(x, y) = (-(k+2)(2-k-k^2), 2-k-k^2)$ болно. Эдгээр нь шийд болохыг хялбархан шалгаж болно.

Бодолт Х-Б2. Улс n хоттой бөгөөд компани тус бүр a, b, c нислэг хийдэг гэж үзье. Юуны өмнө n ширхэг хотын аль ч хотоос аль ч хот руу очиж болдог байхын тулд дор хаяж $n-1$ нислэг хэрэгтэй гэдгийг харуулъя. Хэрэв хот бүрээс 2 нислэг гардаг бол хотуудын хооронд дор хаяж $\frac{2n}{2} = n$ нислэг хийгдэнэ. Эсрэг тохиолдолд, зөвхөн ганц нислэг хийгддэг A хот олдоно. Мэдээж тэр нислэг бусад хотуудыг холбоход ямар ч үүрэггүй. A хотыг тэр ганц нислэгтэй нь хамт хасвал, үлдсэн $n-1$ хотын хооронд бусад нислэгүүдээр дамжин очиж болох ёстой. Индукцийн таамаглал ёсоор үлдсэн $n-1$ хотуудыг холбосон дор хаяж $n-2$ нислэг байх бөгөөд хассан 1 нислэгтэй нийлээд $n-1$ нислэг болно. $n=2$ үед илэрхий тул өгүүлбэр батлагдлаа.

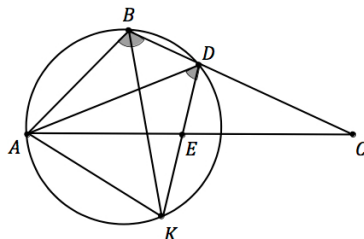
Тэгэхлээр

$$\begin{aligned} a+b &\geq n-1 \\ b+c &\geq n-1 \\ c+a &\geq n-1 \end{aligned}$$



байх бөгөөд эдгээр тэнцэтгэл бишүүдийг хооронд нь нэмээд $a + b + c = 2016$ гэдгийг тооцвол $4032 \geq 3(n - 1)$ буюу $n \leq 1345$ гэсэн үнэлгээ гарна. $n = 1345$ байж болохыг зурагт үзүүлэв (нэг компанийн нислэгүүд ижил өнгөтэй).

Бодолт Х-БЗ.



Гурвалжны өнцгүүдийг α, β, γ гэж тэмдэглэе. ADC гурвалжнаас $\angle ADC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma$ гэж олдоно. Адил хажуут CDE гурвалжнаас $\angle CDE = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ гэж олдоно. Иймд $\angle ADE = \angle ADC - \angle CDE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$ байх бөгөөд $\angle ADK = \angle ABK = \frac{\beta}{2}$ тул, B, D, K цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. $\angle ABK = \angle KBD$ тул $AK = KD$ байна.

XI анги

Бодолт XI-A1. Өгсөн $xy + xz + yz = 2xyz$ нөхцөлөөс $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ гэж гарна.

Нэг талаас

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) > \frac{1}{x^3} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{y^3} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ & = \frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{yz} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{1}{zx} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} \right) \geq \frac{1}{xy} \cdot \frac{2}{xy} + \frac{1}{yz} \cdot \frac{2}{yz} + \frac{1}{zx} \cdot \frac{2}{zx} \\ & = \frac{2}{x^2 y^2} + \frac{2}{y^2 z^2} + \frac{2}{z^2 x^2} \end{aligned}$$

болно.

Нөгөө талаас

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) = \left(\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^4 = 4 \end{aligned}$$

болно.

Дээрх хоёроос

$$2 \geq \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) > \frac{2}{x^2 y^2} + \frac{2}{y^2 z^2} + \frac{2}{z^2 x^2}$$

болох буюу $\frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{y^2 z^2} + \frac{1}{x^2 z^2} < 1$ гэж гарна. Эндээс $x^2 + y^2 + z^2 < x^2 y^2 z^2$ болж батлагдав.

Бодолт XI-A2. ω тойргийн гурвалжны AB талыг огтлох цэгийг F -ээр, AK шулууны BD хэрчмийг огтлох цэгийг M гэж тэмдэглэе (зураг). Тойргийн DE , DF нумууд тэнцүү тул $BC \parallel FE$ байна. Тэгэхлээр $\angle KBM = \angle KEF = \angle KAF = \angle BAM$ байна. Иймд KBM , BAM гурвалжнууд хоорондоо төсөөтэй. Эндээс $\frac{BM}{MK} = \frac{AM}{MB}$ буюу $MB^2 = MK \cdot MA$ гэж гарна. Нөгөө талаас огтлогч ба шүргэгчийн чанар ёсоор $MD^2 = MK \cdot MA$ байна. Иймд $MB = MD$ байна.

Бодолт XI-A3. Бодолтод хялбар батлагдах дараах леммийг ашиглая.

Лемм: $(x, 10) = 1$ бол $x^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ бөгөөд $k \geq 2$ үед $x^{10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$ байна.

Баталгаа: Эйлер-Фермагийн теоремоор $k \geq 1$ үед

$$\begin{aligned} x^{2^k} &\equiv 1 \pmod{2^{k+1}} \\ x^{4 \cdot 5^k} &\equiv 1 \pmod{5^{k+1}} \end{aligned}$$

байна. Энэ 2 жишлэгээс батлах ёстой зүйл шууд гарна.

Бодлогыг a тооны оронгийн тоо k -аар индукцэлж баталъя. $k = 1$ буюу $a = 1, 3, 7, 9$ үед n -ээр харгалзан 1, 7, 3, 9 тоонуудыг авч болно (эсвэл 11, 13, 17, 19 тоонуудыг ч авч болно).

$k = 2$ бөгөөд $a = \overline{bc}$ гэж үзье. Юуны өмнө $1^1, 7^7, 3^3, 9^9$ тоонуудын аравтын цифр тэгш, харин $11^{11}, 13^{13}, 17^{17}, 19^{19}$ тоонуудын аравтын цифр сондгой гэдгийг тэмдэглэе. b цифр нь тэгш байх үед m^m нь c -ээр төгсдөг m тоог 1, 7, 3, 9 тоонуудын аль нэгээр сонгоё. Тэгвэл өмнө тэмдэглэсэн ёсоор ямар нэгэн тэгш d цифрийн хувьд $m^m \equiv \overline{dc} \pmod{100}$ байна. n тоог $n = 20x + m$ хэлбэртэйгээр хайя. Лемм ёсоор $n^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ байх тул

$$n^n \equiv (20x + m)^m \equiv m \cdot 20x \cdot m^{m-1} + m^m \equiv 20x \cdot c + \overline{dc} \pmod{100}$$

байна (биномоор задалж $20x$ -ийн 2-оос багагүй зэргүүд 100-д хуваагдана гэдгийг анхаарна). Тэгэхлээр бид $20x \cdot c + \overline{dc} \equiv \overline{bc} \pmod{100}$ буюу $2x \cdot c + d \equiv b \pmod{10}$ байх x тоо олдохыг харуулах ёстой. Энэ жишлэг нь $x \cdot c \equiv \frac{b-d}{2} \pmod{5}$ гэсэн жишлэгтэй ижил бөгөөд нэгэнт $(c, 5) = 1$ тул энэ жишлэг шийдтэй. b цифр нь сондгой байх үед m^m нь c -ээр төгсдөг m тоог 11, 13, 17, 19 тоонуудын аль нэгээр сонгоход ямар нэгэн сондгой d цифрийн хувьд $m^m \equiv \overline{dc} \pmod{100}$ байна. Өмнөх тохиолдолтой нэгэн адилаар n тоог $n = 20x + m$ хэлбэртэйгээр хайхад дахин $x \cdot c \equiv \frac{b-d}{2} \pmod{5}$ гэсэн

шийдтэй жишлэгт шилжинэ. Өөрөөр хэлбэл, ямар ч $a = \overline{bc}$ тооны хувьд a тоогоор төгсдөг n^n хэлбэртэй тоо олдоно.

Одоо $k \geq 2$ оронтой ямар ч тооны хувьд батлах зүйл үнэн гэж үзээд $k+1$ оронтой a тооны хувьд баталъя. Нэг оронтой b тоо, k оронтой c тооны хувьд $a = 10^k b + c$ бөгөөд c тооны хувьд $m^m \equiv c \pmod{10^k}$ байдаг гэж үзье. Тэгвэл ямар нэгэн d цифрийн хувьд $m^m \equiv 10^k d + c \pmod{10^{k+1}}$ байх ёстой. n тоог $n = 10^k x + m$ хэлбэртэйгээр хайя. Лемм ёсоор $n^{10^k} \equiv 1 \pmod{10^{k+1}}$ байх тул

$$n^n \equiv (10^k x + m)^m \equiv m \cdot 10^k x \cdot m^{m-1} + m^m \equiv 10^k x \cdot c + 10^k d + c \pmod{10^{k+1}}$$

байна. Тэгэхлээр бид $10^k x \cdot c + 10^k d + c \equiv 10^k b + c \pmod{10^{k+1}}$ буюу $x \cdot c + d \equiv b \pmod{10}$ байх x тоо олдохыг харуулах ёстой. $(c, 10) = 1$ тул энэ жишлэг ямар ч b, d цифрийн хувьд шийдтэй.

Бодолт XI-Б1. $P(x)$ нь дээрх чанартай олон гишүүнт болог. Тэгвэл $P \neq 0$ болох нь илт

Иймд $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$, гэж бичиж болно. Энд $a_n \geq 0$ байх нь илт

Одоо $2^N \leq a_n \leq 2^{N+1} - 1$ байдаг натурал N тоог сонгоё.

Мөн дурын $0 \leq k \leq n$ хувьд $|a_k| \leq M$ байх M тоог сонгож авъя. Тэгвэл дурын $x > 2M+1$ хувьд

$$|a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0| \leq M \frac{x^n - 1}{x - 1} < \frac{x^n - 1}{2}$$

байна.

Тэгвэл дурын $2^K > M+1$ байх K -ийн хувьд

$$P(2^K) \leq a_n 2^{Kn} + \frac{2^{Kn} - 1}{2} \leq (2^{N+1} - 1)2^{Kn} + \frac{2^{Kn} - 1}{2} < 2^{N+Kn+1}$$

байна. Мөн ижлээр

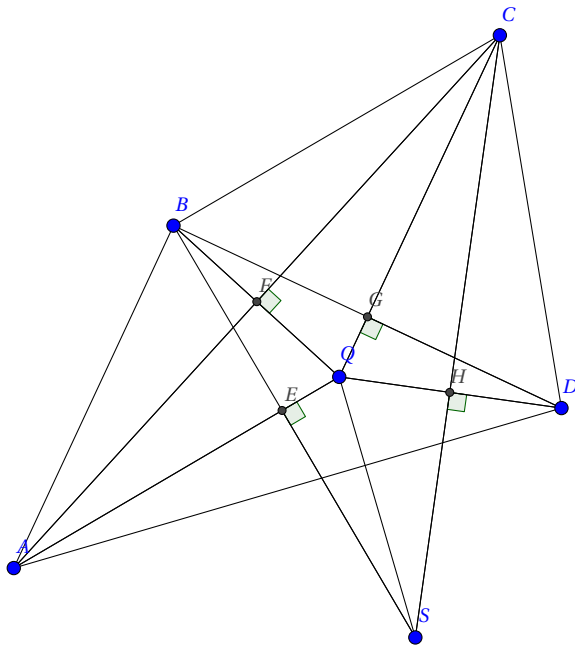
$$P(2^K) \geq a_n 2^{Kn} - \frac{2^{Kn} - 1}{2} \geq 2^N 2^{Kn} - \frac{2^{Kn} - 1}{2} > 2^{N+Kn-1}$$

байна.

Иймд $P(2^K) = 2^N 2^{Kn}$ байна. Эндээс $P(x)$ ба $2^N x^n$ олон гишүүнтүүд хязгааргүй олон цэг дээр давхцах тул тэнцүү болно.

Эцэст нь $2^N x^n$ хэлбэртэй олон гишүүнтүүд бодлогын нөхцөл хангах нь илт.

Бодолт XI-Б2. ($ABCD$ дөрвөн өнцөгт гүдгэр биш үед бодлого үнэн, гэхдээ энэ тохиолдлыг авч үзээгүй гээд оноо хасахгүй!)



$E := AQ \cap BS$, $F := AC \cap BQ$, $G := BD \cap CQ$ ба $H := DQ \cap CS$ гэе.

$AB = BC$ ба BQ нь B өнцгийн биссектрис тул $BQ \perp AC$ байна. Мөн ижлээр $CQ \perp BD$ байна. Иймд $BCGF$ нь нэг тойрог дээр оршино.

Эндээс $QF \cdot QB = QG \cdot QC$ болно.

Мөн $QF = QH$, $QB = QD$, $QG = QE$ ба $QC = QA$ байх нь илт.

Иймд $QH \cdot QD = QE \cdot QA$ болно. Өөрөөр хэлбэл $AEHD$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд $\angle QHE = \angle QAD$ болно.

$EQHS$ дөрвөн өнцөгт нь мөн тойрогт багтах тул $\angle QHE = \angle QSE$ болно.

Эндээс $\angle EAD = \angle ESQ$ болох тул $T := QS \cap AD$ гэвэл $AETS$ дөрвөн өнцөгт нь тойрогт багтана.

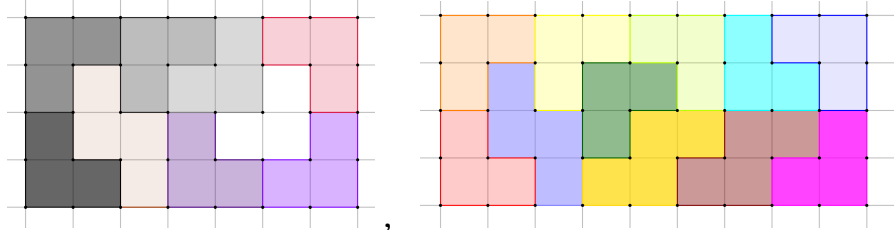
Иймд $\angle ATS = \angle AES = 90^\circ$.

Бодолт XI-БЗ. 4×1 , 4×2 тэгш өнцөгтүүдийг хучиж чадахгүй нь илэрхий. Одоо



өгөгдсөн 2 дүрсийг ашиглаад , 2 тэгш өнцөгтийг эвлүүлж чадна. Эндээс 4×5 -ыг хучиж чадна гэсэн үг юм.

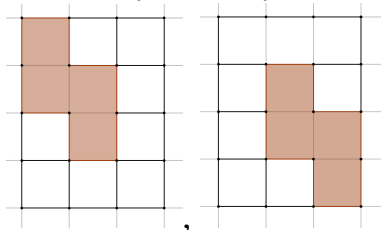
Мөн 4×7 , 4×9 тэгш өнцөгтийг дараах байдлаар хучиж чадна.



Дээр эвлүүлсэн 4×3 , 2×5 -ыг ашиглаад хоёрын нэгдэл болох 4×8 -ыг хучиж чадах юм. Үүгээр бид 4×5 , 4×7 , 4×8 , 4×9 тэгш өнцөгтүүдийг хучиж чадав. Эндээс 4×10 , 4×11 , 4×12 тэгш өнцөгтүүдийг 4×7 , 4×8 , 4×9 тэгш өнцөгтүүд болон 4×3 тэгш өнцөгтөөр хучиж чадна. Цаашлаад энэ зарчмаараа дурын $n \geq 13$ тооны хувьд $4 \times n$ тэгш өнцөгтийг хучиж чадна.

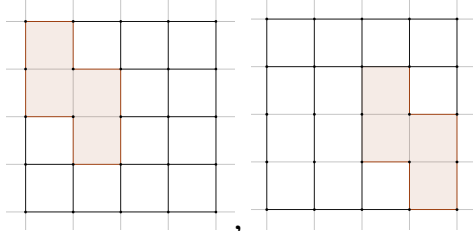
Одоо 4×3 , 4×3 , 4×6 -г хучиж чадахгүй гэж баталъя.

- 4×3 -ыг хучихын тулд бидний 2 дахь дүрс маань



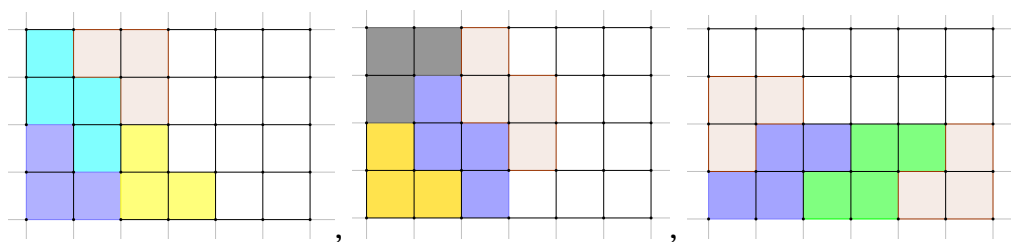
гэсэн 2 тохиолдолд л байрлана. Эндээс хучиж чадахгүй нь харагдана.

- 4×4 -ийг хучихын тулд 2 дахь дүрс маань мөн л дараах 2 л боломжтой.



гэсэн 2 янзаар л байрлах боломжтой. Эндээс хучиж чадахгүй гэдэг нь бас харагдана.

- 4×6 хучиж чадахгүйг баталъя. 2 дахь дүрс маань 3 удаа, эхний дүрс 4 удаа л орох боломжтой. Дараах гурван тохиолдлоос бусад тохиолдлуудад хучиж болохгүйг хялбархан харж болно. 2 дахь дүрс нь

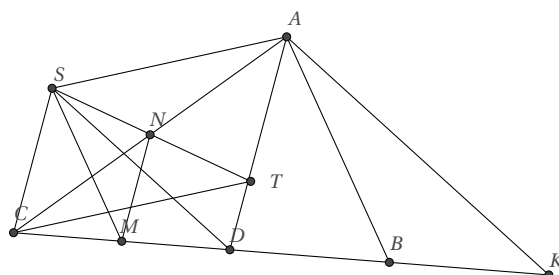


эдгээр байрлалаар байхад эхний дүрс нь энэ зураг дээрх шиг байрлахаас өөр боломжгүй гэдэг нь мөн хялбархан гарах юм.

XII анги

Бодолт XII-A1. CD -ийн дундаж M , AC -ийн дундаж N байг. AD хэрчим дээр $SA \parallel CT$ байхаар T цэг авъя. Тэгвэл $SATC$ параллелограмм болох бөгөөд N нь диагоналиудынх нь огтлолцлын цэг болно.

Байгуулалт ёсоор AKD ба SDC гурвалжнууд төсөөтэй бөгөөд AB ба SM нь харгалзах медианууд нь учир $SM \parallel AB$ буюу $\angle CSM = \angle DAB$ байна. Мөн $\angle DAB = \angle CAD = \angle CNM$ гэдгээс $CSNM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. MN нь дундаж шугам учраас $MN \parallel AD \parallel SC$ гэдгээс $CSNM$ ба $STDC$ нь адил хажуут трапецууд болно. Иймд $\triangle SNM = \triangle CNM$ ба $\triangle STD = \triangle CTD$ гэдгээс $\angle MSD = \angle NCT$ болох бөгөөд $\angle MSD = \angle KAB$, $\angle NCT = \angle SAC$ гэдгээс батлах зүйл гарна.



Бодолт XII-A2.

$$(a + b + c)^3 = \left(a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \right)^3 \geq \frac{27}{4} a(b+c)^2$$

болно. Бусдыг нь яг адилаар багасгавал

$$\begin{aligned} LHS &\geq \frac{27}{4} (a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(d+a)^2 + d(a+b)^2) \\ &\geq \frac{27}{4} \cdot 4 \sqrt{abcd(a+b)^2(b+c)^2(c+d)^2(d+a)^2} \\ &= 27 \sqrt{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \end{aligned}$$

болж батлагдах юм. Тэнцэлдээ хүрэх нөхцөл нь 2 удаа Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэсэн учраас $a = \frac{b+c}{2}$, $b = \frac{c+d}{2}$, $c = \frac{d+a}{2}$, $d = \frac{a+b}{2}$ ба $a(b+c)^2 = b(c+a)^2 = c(d+a)^2 = d(a+b)^2$ гэдгээс $a = b = c = d = 1$ гэж гарна.

Бодолт XII-A3. Бодолт XI-A3.

Бодолт XII-B1. Тойрог дээр бичигдсэн тоонуудын нийлбэр сөрөг бол энэ тоонуудыг

$$\begin{aligned} a_1 &< 0 \\ a_1 + a_2 &< 0 \\ \dots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n &< 0 \end{aligned}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелж байхаар цагийн зүүний дагуу $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж дугаарлаж болно гэдгийг батлахад хангалттай (энэ үед a_1 гэсэн сөрөг тоо нь дараагийн хэдэн ч тоотой хамт нийлбэр нь сөрөг гарна). дээрх дүгнэлтийг n -ээр индукцэлж баталъя. $n = 2$ үед a_1 -ээр ямар ч сөрөг тоог авахад болно.

Одоо тойрог дээр нийлбэр нь сөрөг байх n ширхэг тоо бичигдсэн гэж үзье. Тоонуудаа ямар нэгэн сөрөг тооноос эхлэн цагийн зүүний дагуу $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж дугаарлая. $a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n$ гэсэн тоонуудын нийлбэр сөрөг тул тойрог дээр яг ийм дарааллаар бичигдсэн эдгээр тоонуудыг

$$\begin{aligned} b_1 &< 0 \\ b_1 + b_2 &< 0 \\ \dots \\ b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} &< 0 \end{aligned}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелж байхаар $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ гэж дугаарлаж болох ёстой. Хэрэв $b_1 = a_1 + a_2$ бол $a_1 < 0$ тул $a_1, a_2, \dots, a_n$ дугаарлалт нь олох ёстой дугаарлалт мөн. Хэрэв $k \geq 3$ үед $b_1 = a_k$ байвал $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{k-1}$ гэсэн дугаарлалт нь олох ёстой дугаарлалт мөн. Учир нь, b -үүдийн хангаж байгаа тэнцэтгэл бишүүд дээр нэмэгдэж байгаа ганц $a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + a_1 < 0$ тэнцэтгэл биш нь $a_k + a_{k+1} + \dots + a_n < 0$ ба $a_1 < 0$ гэсэн 2 тэнцэтгэл бишийн нийлбэр юм.

Бодолт XII-Б2. Дээрх нөхцөлийг хангадаг дөрвөлийн олонлогийг S гэе.

Эхлээд p^3 -тай харилцан анхны, p^3 -аас бага натурал тоонуудын тоо нь $\phi(p^3) = p^2(p-1)$ болохыг саная.

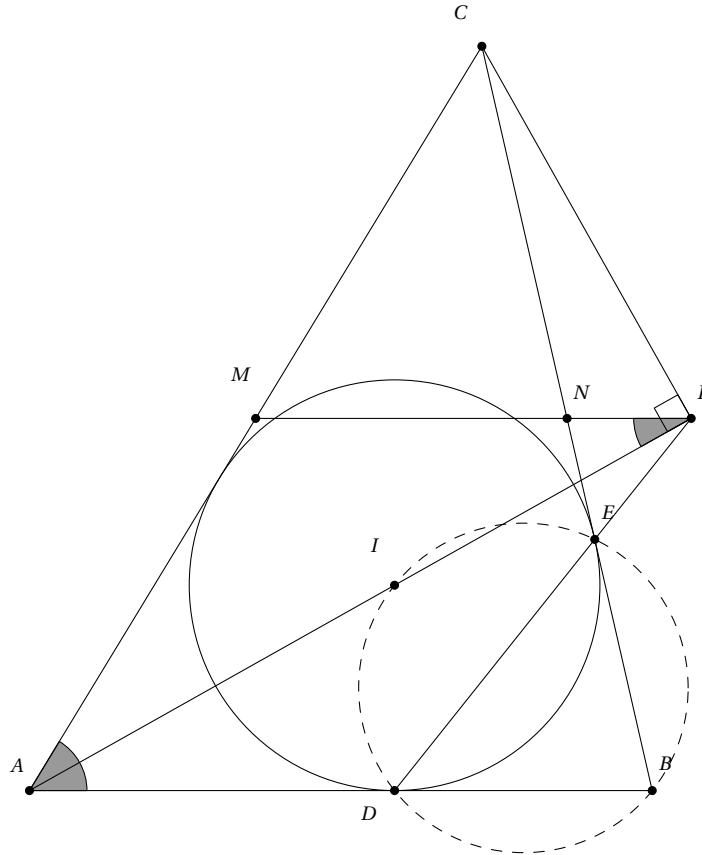
Одоо $A := \{(a, b, c, d) \in S \mid (a, p) = 1\}$ гэе. Тэгвэл c, d -г дураараа сонгоход b нь нэг утгатай тодорхойлогдоно. Иймд $|A| = \phi(p^3) \cdot 1 \cdot p^3 \cdot p^3 = p^8(p-1)$ болно.

Мөн ижлээр $C := \{(a, b, c, d) \in S \mid (c, p) = 1\}$ гэвэл $|C| = p^3 \cdot p^3 \cdot \phi(p^3) \cdot 1 = p^8(p-1)$ болох ба $|A \cap C| = \phi(p^3) \cdot 1 \cdot \phi(p^3) \cdot p^3 = p^7(p-1)^2$ болно.

Эцэст нь $S = A \cup C$ болох нь илт тул $|S| = |A| + |C| - |A \cap C| = 2p^8(p-1) - p^7(p-1)^2 = p^7(p^2-1)$ болно.

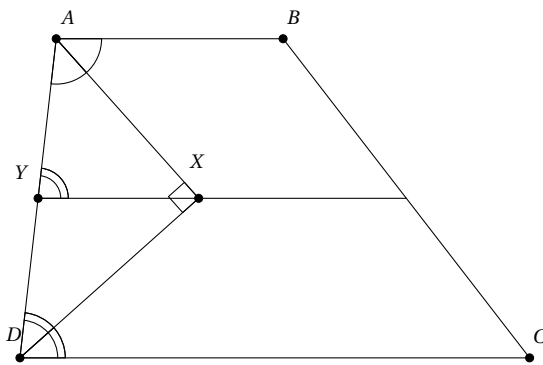
Бодолт XII-Б3. Бодолтод дараах бодлогыг ашиглая (Энэ бодлого нь 1989 оны улсын математикийн олимпиадын 10-р ангийн бодлого юм).

ABC гурвалжинд багтсан I цэгт төвтэй тойрог AB, BC гурвалжны талуудыг D, E цэгт шүргэдэг бол AI, DE шулуунуудын огтлолцлын цэг нь гурвалжны AB талтай параллель дундаж шугам дээр оршино.



Бодлт: Гурвалжны AC, BC талуудын дундаж цэгүүд M, N бөгөөд AI, MN шулуунууд P цэгт огтлолцдог болог. Тэгвэл $AM = MC = MP$ тул APC гурвалжин тэгш өнцөгт гурвалжин юм. Цаашилбал, APC, ADI тэгш өнцөгт гурвалжнууд хоорондоо төсөөтэй тул $\frac{AC}{AP} = \frac{AI}{AD}$ буюу $\frac{AC}{AI} = \frac{AP}{AD}$ байна. Иймд AIC, ADP гурвалжнууд төсөөтэй буюу $\angle ADP = \angle AIC$ байх бөгөөд эндээс $\angle IDP = \angle ADP - 90^\circ = \angle AIC - 90^\circ = \frac{\beta}{2}$ гэж олдоно. Нөгөө талаас, I, D, B, E цэгүүд нэг тойрог дээр орших тул $\angle IDE = \angle IBE = \frac{\beta}{2}$ байна. $\angle IDP = \angle IDE$ тэнцэл нь D, E, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг харуулж байна.

Трапецын A, D өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцлын цэгийг X гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\angle A + \angle D = 180^\circ$ тул AXD гурвалжин тэгш өнцөгт гурвалжин байх бөгөөд уг гурвалжны AD талын дундаж цэгийг Y гэж тэмдэглэвэл, $\angle A Y X = 2 \cdot \angle A D X = \angle A D C$ буюу $Y X \parallel D C$ байна. Өөрөөр хэлбэл, X цэг нь трапецын дундаж шугам дээр оршино. дээрх бодлогоор энэ цэг нь $K L$ шулуун дээр, мөн $M N$ шулуун дээр оршино.



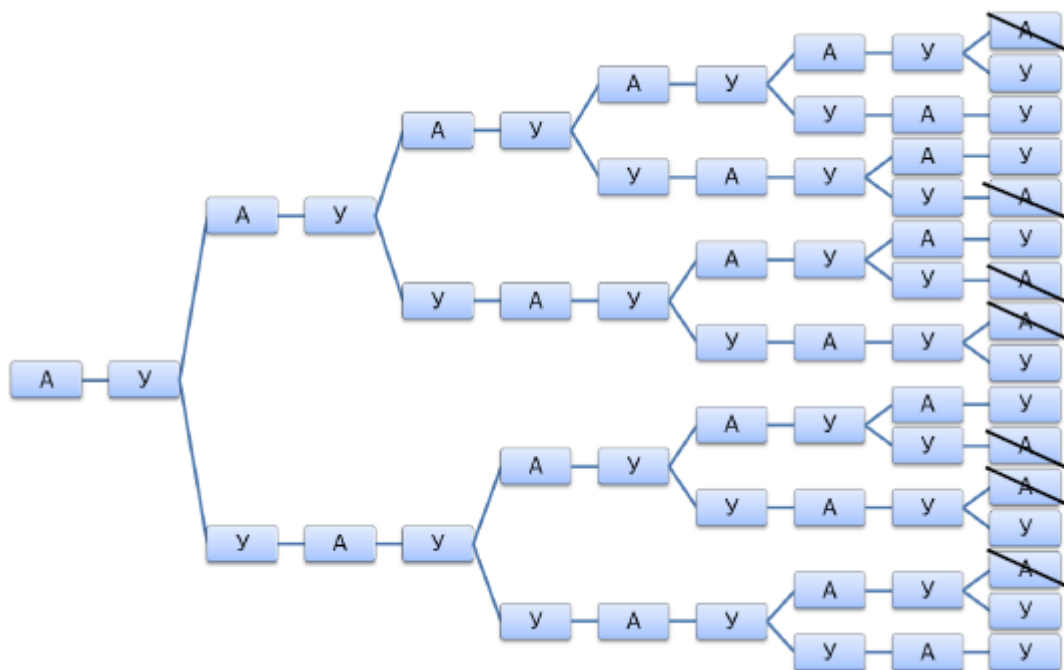
Бага ангийн багш

Бодолт ББ-А1. Болохгүй. Эсрэгээс нь болно гэж үзье. Зэрэгцээ орших хоёр нүдэнд байх тооны нийлбэр анхны тоо нь 3, 5, 7, 11, 13, 17 байна. Үүнээс өөр байж болохгүй. Зэрэгцээ орших хоёр нүдэнд байх тооны нийлбэр нь анхны тоо байхын тулд тэдгээр нь тэгш (Т) ба сондгой (С) тоонууд байна. ТСТ эсвэл СТС байна. Голын нүдэнд байх тоог x гэе.

х тэгш тоо гэвэл зэрэгцээ нүдэнд байх 4 тоо нь сондгой байна. 1-9 хүртэл тоон дотор 5 сондгой тоо байна. Иймд 3×3 хүснэгтийн аль нэг өнцгийн нүдэнд сондгой тоо байрлахад хүрч зэрэгцээ нүднүүдийн СС тоо байх болж зөрчилд орно.

Иймд x сондгой тоо байна. Тэгвэл түүний зэрэгцээ нүдэнд байх 4 тоо нь тэгш байна. Тэдгээрийн нийлбэр $x+2$, $x+4$, $x+6$, $x+8$ нь бүгд анхны тоонууд ба сондгой тоонууд юм. 3 - 17 хооронд дараалсан дөрвөн сондгой анхны тоо байхгүй тул зөрчилд оров. Иймд болохгүй.

Бодолт ББ-А2. Ассан чийдэн- А, унтарсан чийдэн- У гэж тэмдэглэе. Тэгвэл зэрэгцээ чийдэнгүүдийн хувьд АА эсвэл УУУ гэсэн байж болохгүй гэсэн үг юм. Энэ 11 чийдэнгийн ядаж нэг чийдэн нь асаалттай байна. Түүнийг бэхэлж, эхний чийдэн гэж үзээд мод байгуулъя. Хамгийн сүүлчийн чийдэн нь А байж болохгүй гэдгийг анзаарвал:



болох ба нийт 9 боломж байна. Эндээс харвал ассан чийдэнгийн тоо 4 эсвэл 5 байх боломжтой байна.

Бодолт ББ-А3. Бодолт VIII-4.

Бодолт ББ-Б1. a, b, c гурвалжны талууд нь $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ гэсэн нэг оронтой 9 цифрээс утгаа авна. Энэ бодлогыг адил талт, адил хажуут ба адил талт биш, элдэв талт гурвалжны тоог олох гэсэн гурван тохиолдол болгон бодъё.

- (i) Гурвалжин адил тал бол бүх талууд тэнцүү байх гурван оронтой тооны тоог n_1 гэвэл $n_1 = C_9^1 = 9$ байна.
- (ii) Гурвалжин адил хажуут ба адил талт биш байх гурван оронтой тооны тоог n_2 гэе. Гурван оронтой тооны яг 2 нь ялгаатай ба түүнийг a, b гэе. Энэ адил хажуут гурвалжны суурь ба тэнцүү талууд (a, b) хос бүрийн хувьд эрэмбээ солих тул тийм тохиолдол нийт $2C_9^2$ байна. Мөн суурийн их тал гэж үзээд a гэж тэмдэглэвэл $b < a < 2b$ нөхцөлийг хангаж байх ёстой. Тэгвэл энэ нөхцөлийг хангахгүй хосын тоог олъё.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b		1	1	2, 1	2, 1	3, 2, 1	3, 2, 1	4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1

Ийм хосын тоо 20 байх нь ээ. Мөн (a, b) хосоор гурван оронтой тоо зохиох боломжийн тоо C_3^2 байна. (Учир нь эрэмбээ солих тохиолдлыг дээр тооцсон). Иймд $n_2 = C_3^2(2C_9^2 - 20) = 156$ болно.

- (iii) Элдэв талт гурвалжин байх гурван оронтой тооны тоог n_3 гэе. Энэ үед a, b, c бүгд ялгаатай ба $a < b < c$ байх тохиолдлуудыг эхлээд бодъё.

a	1	2	3	4	5	6	7
bc		34, 45, 56, 67, 78, 89	45, 46, 56, 57, 67, 68, 78, 79, 89	56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79, 89	67, 68, 69, 78, 79, 89	78, 79, 89	89

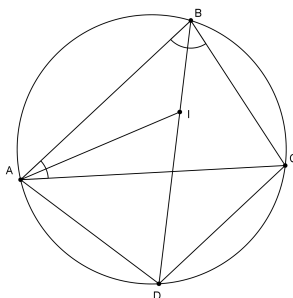
Ийм гурвалын тоо 34 байна. (a, b, c) гурвалаар оронтой тоо зохиох боломжийн тоо $3!$ байна. Иймд $n_3 = 3! \cdot 34 = 204$.

Нийт тоо $n = n_1 + n_2 + n_3 = 369$ байна.

Бодолт ББ-Б2. 2017 нь анхны тоо юм. Мөн x ба y -ийн аль нь ч 2017-д хуваагдахгүй гэдгийг хялбар харж болох тул $(x, 2017) = (y, 2017) = 1$ болно. Эндээс Фермагийн бага теорем ёсоор $\begin{cases} x^{2016} \equiv 1 \pmod{2017} \\ y^{2016} \equiv 1 \pmod{2017} \end{cases}$ болох тул эндээс $x^{2016} - y^{2016} \equiv 0 \pmod{2017}$

болов. Өгсөн тэгшитгэлийн зүүн тал 2017 модулиар 0 болно. Мөн $(2, 2017) = 1$ тул $2^{2017} \equiv 2 \cdot 2^{2016} \equiv 2 \pmod{2017}$ буюу тэгшитгэлийн баруун тал 2017 модулиар 2 болж байна. Иймд шийдгүй.

Бодолт ББ-Б3. BI шулууны ABC гурвалжны багтаасан тойрогтой огтлолцох цэгийг D , $\angle BAI = \angle IAC = \alpha$ гэвэл бодлогын нөхцөлөөс $\angle ABI = \angle CBI = 2\alpha$ гэж тус тус гарна.



Тэгвэл ижил нумд тулсан өнцгүүд тэнцүү гэдгээс $\angle CAD = \angle ACD = \angle BDC = 2\alpha$ болох тул $BC = CD = IA$ ба $DC = DA$ болно. Мөн $\angle DIA$ нь BIA гурвалжны гадаад өнцөг тул $\angle AID = 3\alpha$ болно.

Иймд $DA = DI = DC = IA$ болж DIA нь зөв гурвалжин болно.

Эндээс $\alpha = 20^\circ$ гэж гарах ба $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$ болох юм.

Дунд ангийн багш

Бодолт ДБ-А1.

$$(1+a+b)^3 = \left(1 + \frac{2a+b}{3} + \frac{a+2b}{3}\right)^3 \geq 27 \cdot 1 \cdot \frac{2a+b}{3} \cdot \frac{a+2b}{3} = 3(2a+b)(a+2b)$$

болно. Иймд

$$(2a+b)(a+2b) + (2b+c)(b+2c) + (2c+a)(c+2a) \geq 3(a+b+c)^2$$

гэж батлахад хангалттай. Одоо зүүн гар талаа задлаад Кошийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл

$$\begin{aligned}(2a+b)(a+2b) + (2b+c)(b+2c) + (2c+a)(c+2a) &= 4(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca) \\ &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) \\ &= 3(a+b+c)^2\end{aligned}$$

болж батлагдав. Тэнцэл биелэх нөхцөл нь эхний Кошийн тэнцэх нөхцөлөөс $1 = \frac{2a+b}{3}$, харин сүүлийн бичсэн тэнцэл бишээс $a = b = c$ гэж гарах тул $a = b = c = 1$ үед л тэнцэлдээ хүрнэ.

Бодолт ДБ-А2. Бодолт XI-А3.

Бодолт ДБ-А3. $n = 1$ үед 1 л хэрчим байгаа учир хэзээ ч цикл үүсэхгүй учир 0 өнгө гэж гарна.

$n > 1$ үед $n - 1$ өнгөөр яаж ч будсан цикл олдоно гэж харуулъя. Нийт $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ ирмэг байгаа учир Дирихлейн зарчим ёсоор нэг өнгийн $2n+2$ ирмэг олдоно. Эдгээр ирмэгүүд цикл үүсгэхгүй гэвэл моднуудын нэгдэл байх ёстой бөгөөд мод оройн тооноосоо нэгээр цөөн ирмэгтэй учир $2n$ -ээс бага ирмэгтэй байх ёстой болж зөрчил үүснэ.

Одоо n өнгөөр цикл үүсэхгүй байхаар будъя. Цэгүүдээ зөв $2n$ өнцөгтийн оройнууд гээд 1-ээс $2n$ хүртэл дараалуулан дугаарлая. $1 \leq i \leq n$ байх тоо бүрийн хувьд i ба $i+1$ оройнуудыг мөн $i-1$ ба $i+1$ -р оройнуудыг i өнгөөр холбоод тэдгээртэй параллель бүх диагоналиудыг мөн i өнгөөр нь будъя (энд $2n$ ба 0 оройнуудыг ижил гэж үзнэ). Ингэж будахад өнгө бүр яг $2n-1$ ирмэг будагдах ба давхцал үүсэхгүй гэдгийг шалгахад амархан.

Бодолт ДБ-Б1. S -ээр 50 элементтэй дэд олонлогийг тэмдэглэе. Бүгд тэгш эсвэл бүгд сондгой байх дор хаяад 25 тоо S -д байх бөгөөд тэдгээрийг $a_1, \dots, a_{25}$ гэе. Эдгээрээр тодорхойлогдох $B = \{b_i = a_1 + a_i \mid 2 \leq i \leq 25\}$ ба $C = \{c_i = a_i + a_{25} \mid 2 \leq i \leq 24\}$ олонлогийн элементүүд тэгш тоо бөгөөд $|B \cup C| = 24 + 23 = 47$ байна. $S(2)$ оор S -ийн элементүүдийг 2 дахин ихэсгэсэн тоонуудаас бүрдэх олонлогийг тэмдэглэе. $D = \{d_i = a_i + a_{24} \mid 2 \leq i \leq 23\}$ олонлогийн элементүүд ялгаатай. Хэрэв $|C \cup D| \leq 27$ бол $|C \cap D| \geq 18$. Иймд $c_i < d_i$ тул $c_i = d_k$ ба $c_k = d_j$ байх $i < k < j$ дугаар олдох буюу a_i, a_k, a_j арифметик прогресс үүсгэнэ. Хэрэв $|C \cup D| \geq 28$ бол $|B \cup C \cup D| > 50$ болох буюу $S(2) \cap (B \cup C \cup D) \neq \emptyset$. Эндээс $2b = a + c$ байх 3 тоо олдох нь мөрдөнө.

Санамж : $\{1, \dots, 9\}$ олонлогийн арифметик прогресс үүсгэхгүй 5 элементтэй дэд олонлог бүр 1-ийг агуулна гэдгийг ашиглан энэ бодлогыг бодож болно.

Бодолт ДБ-Б2. Эсрэгээс нь дурын $x \in \mathbb{R}$ хувьд $|b_n| > |g(x)|$ гэе.

$f(x) := g(x) - b_n \cos(nx)$ гэе. Тэгвэл ямар нэг $(n-1)$ зэргийн бодит P олон гишүүнтийн хувьд $f(x) = P(\cos(x))$ гэж бичигдэхийг анхааръя.

$0 \leq k \leq n$ хувьд $\alpha_k = \pi k/n$ гэе. Тэгвэл $\cos(n\alpha_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ болно.

Эхлээд $b_n \geq 0$ гэе. Тэгвэл $b_n > g(\alpha_{2k})$ гэдгээс $f(\alpha_{2k}) < 0$ ба $b_n > -g(\alpha_{2k+1})$ гэдгээс $f(\alpha_{2k+1}) > 0$ болно. f нь тасралтгүй тул $0 \leq k \leq n-1$ хувьд f нь $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ завсар дээр ядаж нэг тэгтэй.

$\cos$ нь $[0, \pi]$ завсар дээр эрс буурах тул P нь n -ээс цөөнгүй язгууртай.

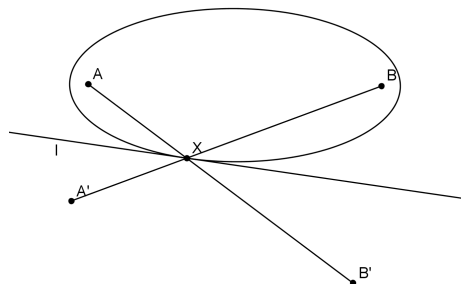
Иймд $P = 0$ буюу $f = 0$. Гэтэл энэ тохиолдолд $|b_n| = |g(0)|$ тул зөрчил гарлаа.

$b_n \leq 0$ тохиолдолд мөн ижил.

Бодолт ДБ-Б3. $СК$ хэрчмийн дундаж цэгийг M гэж тэмдэглэе. Бодолтод эллипсийн шүргэгчийн дараах чанар ашиглагдана.

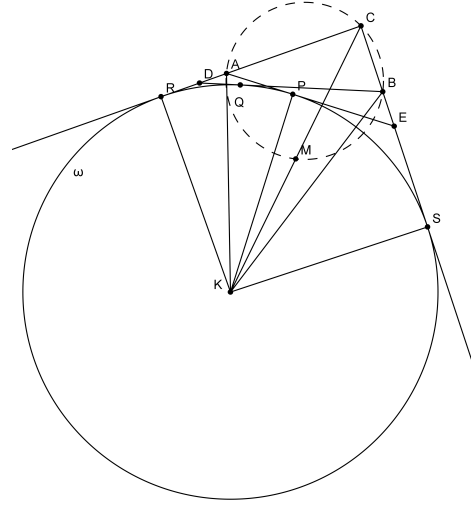
Лемм. A, B фокустой эллипсийн X цэгт татсан шүргэгч нь AXB өнцгийн гадаад биссектрис байна.

Баталгаа. AX цацраг дээр B' цэгийг $XB' = XB$ байхаар, BX цацраг дээр A' цэгийг $XA' = XA$ байхаар тус тус сонгон авъя. AXB өнцгийн гадаад биссектрисийг l гэж тэмдэглэе. Тэгвэл l шулууны хувьд A, A' цэгүүд тэгш хэмтэй, B, B' цэгүүд тэгш хэмтэй. l шулууны дурын $Y \neq X$ цэгийг сонгон авахад гурвалжны тэнцэл биш ёсоор $A'Y + YB > A'B$, $B'Y + YA > B'A$ байна. Энд $A'Y = YA$, $YB = B'Y$ ба $A'B = B'A = AX + XB$ гэдгийг анхааран, энэ хоёр тэнцэтгэл



бишийг хооронд нь нэмээд 2-д хуваавал, $AY + YB > AX + XB$ буюу Y цэг ямагт эллипсийн гадна оршихыг харуулж байна. Иймд l шулуун нь эллипсийн шүргэгч шулуун юм. $\square$

Одоо бодлогоо бодъё. Юуны өмнө $AD + DB = AE + EB$ тул AE, BD хэрчмүүд ба AD, BE цацрагуудыг шүргэсэн ω тойрог олдох ёстой (энэ чанар нь гадаад тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн чанар юм). Лемм ёсоор K цэг нь ADB, AEB гадаад өнцгийн биссектрисүүдийн огтлолцлын цэг тул энэ ω тойргийн төв мөн. Тухайлбал, CK шулуун нь ACB өнцгийн биссектрис дээр орших бөгөөд бид CK шулууны M цэгийг ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршихыг батлахын тулд зөвхөн $AM = BM$ гэдгийг батлахад хангалттай. Медианы уртыг олдог томъёо ёсоор $AM^2 = \frac{1}{4}(2AC^2 + 2AK^2 - CK^2)$ ба $BM^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2BK^2 - CK^2)$ юм. Иймд $AC^2 + AK^2 = BC^2 + BK^2$ буюу $AC^2 - BC^2 = BK^2 - AK^2$ гэдгийг батлахад хангалттай. ω тойрог AE, BD хэрчмүүдийг харгалзан P, Q цэгт шүргэдэг, AD, BE цацрагуудыг R, S цэгт шүргэдэг бөгөөд ω тойргийн радиус r болог. Тэгвэл $BK^2 - AK^2 = (BS^2 + r^2) - (AR^2 + r^2) = BS^2 - AR^2$ юм.



$$AC + CB = AD + DB = AD + DQ + QB = AD + DR + QB = AR + BS$$

$$AC - CB = CR - AR - CB = CS - CB - AR = BS - AR$$

гэдгээс батлах ёстой $AC^2 - BC^2 = BS^2 - AR^2$ тэнцэл гарна.

Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын IV Даваа

Монголын Математикийн 52-р Олимпиадын хаалтан дээр ММОХ-н дарга Г. Баярмагнайн хэлсэн үг

Эрхэм математикч багш сурагчдаа!

Эрдэм оюуныг дээдэлсэн Архангайчуудаа!

ММО-52-р олимпиадын эцсийн даваа 2016 оны 5-р сарын 5-аас 8-ны хооронд Архангай аймгийн Цэцэрлэг хотод амжилттай зохион байгуулагдаж дүнгээ гаргаж байна. Математикийн ухааны доктор В. Адьяасүрэнгийн нэрэмжит УМО-52-р олимпиадад 21 аймаг, УБ хотоос 9-р ангийн 43, 10-р ангийн 43, 11-р ангийн 39, 12-р ангийн 35 нийт 160 сурагч, бага дунд ангийн 67 багш оюун ухаан авьяас чадвараа сорин уралдлаа. Энэ удаагийн олимпиад олон олон онцлог зүйлсээр арвин баялаг байж үнэхээрийн өндөр төвшинд зохион байгуулагдлаа. 1984 онд Архангай аймгийн төвийн 1-р сургуулийн сурагч Р. Батдэлгэр орон нутгаас оролцож УМО-н аварга болж байсан. Үүнээс хойш 32 жилийн дараа Хөвсгөл аймгийн 11 ангийн сурагч Х. Санжаахүү орон нутгаас оролцож 11-р ангийн УМО-н аварга сурагч болон тодорлоо. Нийслэлийн 1-р сургуулийн 7-р ангийн сурагч М. Өнөболд 10-р ангийн ангилалд мөнгөн медаль хүртэж онцгой сайхан амжилт үзүүлээ.

Архангай аймгийн уугуул нийслэлийн 1-р сургуулийн багш З. Бат Эрдэнэ УМО-ын 13 дахь, Орчлон сургуулийн багш Б. Баяраа 10 дахь аварга сурагчаа төрүүлэн бахдам сайхан амжилтын эзэд боллоо. Монголын Математикийн шат шатны олимпиадад шавь нараа амжилттай бэлтгэн оролцож буй математикийн багш нар та бүхэндээ талархаж, та бүгдээрээ бахархаж байгаагаа энэ мөчийг тохиолдуулан илэрхийлж байна.

Багын дүнгээр аймаг хотуудыг байр эзлүүлбэл УБ 15.28 оноогоор 1-р байр, Хөвсгөл 12,56 оноогоор 2-р байр, Архангай II 11 оноогоор 3-р байр, Увс 8.56 оноогоор 4-р байр, Архангай I 8 оноогоор 5-р байр, Орхон 7.75 оноогоор 6-р байр тус тус эзэллээ. Медалийн тоогоор Олонлог сургууль 10, 1-р сургууль 4, Орчлон сургууль 4, 11-р сургууль 4, Хөвсгөл 3, Сант 3, Эмпати 2, Архангай 1, Баянхонгор 1, Оюунлаг 1, нэг медаль авч олимпиадад оролцогчдоо хошуучлан сайхан амжилт гаргалаа. Энэ удаагийн олимпиадыг санаачлан орон нутагтаа зохион байгуулж дэмжлэг үзүүлсэн Архангай аймгийн иргэдийн төлөөлөгчдийн хурлын дарга, Архангай аймгийн засаг дарга Д. Бат Эрдэнэ, зохион байгуулах комиссын дарга Архангай аймгийн тамгын газрын дарга Лхагвасүрэн болон зохион байгуулах ажилд оролцсон нийт Архангайчуудынхаа нэр их зүтгэлийг өндрөөр үнэлж ММОХ-ны өмнөөс талархал илэрхийлж байгааг хүлээн авна уу. Ахмад математикчдын маань хүсэл мөрөөдлийн илэрхийлэл болсон ММО-ын үйл ажиллагаанд шинэ өнгө төрх нэмсэн Б. Адьяасүрэн багшдаа талархал илэрхийлье. Олимпиадыг ивээн тэтгэж

мөнгө санхүү, сэтгэл санаагаар туслалцаа үзүүлсэн бүх байгууллага, хувь хүмүүст Монголын нийт математикчдын өмнөөс чин сэтгэлийн талархал илэрхийлье.

Энэ оны 7-р сарын 9-өөс-16 ны хооронд Хонконг-д зохион байгуулагдах ОУМО-57 Монголын баг өргөн бүрэлдэхүүнтэй оролцоно. Багийн дэд ахлагчаар доктор Б.Баяржаргал, А-ажиглагчаар доктор Ү. Отгонбаяр, Б ажиглагчаар Орчлон сургуулийн багш Б. Баяраа нар оролцоно. Шилдэг сурагчдаас бүрдсэн ОУМО-д оролцох Монголын багийг шалгаруулж идэвх чармайлт гарган сайн бэлтгэж амжилттай оролцуулах үүргийг Монголын нийт Математикчдын нэрийн өмнөөс та бүхэнд даалгаж байна. ОУМО-57-ийн бэлтгэл 5 дугаар сарын 16-нд МУИС дээр эхлэх бөгөөд олимпиадад амжилттай оролцдог бүх сурагчдад нээлттэй байна. ОУМО-д оролцох Монголын багийн гишүүнд багтаж Монгол улсынхаа нэрийг дэлхийн тавцанд дуурсгах хүндтэй бөгөөд хариуцлагатай үйл хэргийн төлөө идэвх чармайлт гарган зүтгэхийг нийт авьяаслаг сурагчид та бүхэнд уриалж байна. Эрдэм оюун дэлгэрч Монголд Математикчдын оюун ухаан улам хөгжин дэвших болтугай.

Анхаарал тавьсан та бүхэнд баярлалаа.

ММОХ дарга Др. Г. Баярмагнай
Цэцэрлэг хот 2016.05.08

Дүн

IX анги

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо	Багш
Алт	Б. Батмэнд	УБ	1	36	Бат-Эрдэнэ
Мөнгө	Э. Эрдэнэбилэг	УБ	11	35	Батсайхан
Мөнгө	А. Пүрэвзаяа	УБ	Олонлог	32	Түвшинжаргал
Хүрэл	С. Арманбек	УБ	Олонлог	30	Еркехулан
Хүрэл	Ц. Ганхөлөг	УБ	Сант	28	Батхишиг
Хүрэл	Б. Цог	УБ	Сант	27	Батхишиг

X анги

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо	Багш
Алт	Х. Санжаахүү	Хөвсгөл	Дэлгэрмөрөн	37	Сүхбат
Мөнгө	М. Өнөболд	УБ	1	33	Баянбат
Мөнгө	Н. Түвшинбилэг	УБ	11	27	Ёндонсамбуу
Хүрэл	Б. Долгормаа	УБ	Олонлог	26	Түвшинжаргал
Хүрэл	М. Лханаажав	УБ	Олонлог	25	Уранчимэг
Хүрэл	Б. Төрбат	УБ	Орчлон	20	Болд
Хүрэл	Р. Амуударь	УБ	Олонлог	20	Уранчимэг

XI анги

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо	Багш
Алт	Б. Төрхүү	УБ	1	35	Батзаяа
Мөнгө	Г. Амарсанаа	УБ	11	25.5	Мөнх-Эрдэнэ
Мөнгө	Г. Оргил	УБ	11	24	Мөнх-Эрдэнэ
Мөнгө	Б. Хас-Очир	УБ	Олонлог	21	Ганбилэг
Хүрэл	Н. Эрхэс	УБ	Оюунлаг	18	Сумъяа
Хүрэл	Ч. Чинзориг	Хөвсгөл	Дэлгэрмөрөн	17.5	Доржзовд
Хүрэл	Д. Самбуу	Архангай	Лаборатори 1	17	Эрдэнэцэцэг
Хүрэл	М. Буянбилэг	Баянхонгор	Номгон	17	Цагаан

XII анги

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо	Багш
Алт	О. Бодрол	УБ	Орчлон	35	Баяраа
Мөнгө	Г. Баяржавхлан	УБ	Олонлог	29	Ганбилэг
Мөнгө	Б. Пүрэв	УБ	Сант	25	Сарангэрэл
Хүрэл	З. Батзориг	УБ	Орчлон	20	Баяраа
Хүрэл	Б. Алтангэрэл	УБ	Эмпати	16	Ганбат
Хүрэл	Ц. Амаржаргал	УБ	Олонлог	16	Уранчимэг

Бага ангийн багш

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо
Алт	П. Чимэг	УБ	Олонлог	27
Мөнгө	М. Отгонжаргал	УБ	1	25.5
Хүрэл	Б. Намжилмаа	УБ	Олонлог	25

Дунд ангийн багш

Медал	Овог нэр	Аймаг	Сургууль	Оноо
Алт	М. Гантогтох	УБ	Орчлон	19
Мөнгө	Б. Ганбат	УБ	Эмпати	15
Хүрэл	Р. Доржзовд	Хөвсгөл	Дэлгэрмөрөн	12

Бодлого дэвшүүлэлт ба засалт

Анги	Бодлого	Дэвшүүлсэн	Зассан	Даамал
IX	A1	Б. Батцэнгэл	Б. Сумъяа	Б. Сумъяа
	A2	М. Батбилэг	М. Батбилэг	
	A3	Б. Баяржаргал	Б. Баяржаргал	
	B1	Ү. Отгонбаяр	Т. Базар	
	B2	Б. Батцэнгэл	Ү. Отгонбаяр	

	БЗ	Б. Батцэнгэл	Б. Бат-Од	
	A1	Т. Базар	А. Ганбат	
	A2	М. Батбилэг	Д. Даянцолмон	
X	A3	Т. Баасанжав	Т. Баасанжав	A. Ганбат
	Б1	М. Батбилэг	М. Батбилэг	
	Б2	А. Ганбат	А. Ганбат	
	Б3	Н. Аргилсан	Н. Аргилсан	
	A1	Г. Баярмагнай	Н. Аргилсан	
	A2	Д. Пүрэвсүрэн	Б. Бат-Од	
XI	A3	Б. Хоролдагва	Б. Баясгалан	Б. Баяржаргал
	Б1	Б. Батцэнгэл	Т. Баасанжав	
	Б2	Б. Баяржаргал	Б. Баяржаргал	
	Б3	Б. Санчир	Б. Санчир	
	A1	Г. Баярмагнай	Ү. Отгонбаяр	
	A2	Б. Хоролдагва	Б. Хоролдагва	
XII	A3	Г. Батзаяа	Т. Базар	Ү. Отгонбаяр
	Б1	Б. Санчир	Б. Санчир	
	Б2	Б. Батцэнгэл	Г. Баярмагнай	
	Б3	Б. Сумъяа	Б. Сумъяа	
	A1	А. Ганбат	М. Итгэл	
	A2	Б. Батцэнгэл	Б. Сандагдорж	
ББ	A3	М. Батбилэг	М. Батбилэг	Б. Сандагдорж
	Б1	М. Итгэл	М. Итгэл	
	Б2	Б. Баясгалан	Б. Баясгалан	
	Б3	Б. Батцэнгэл	Б. Сандагдорж	
	A1	Т. Базар	Т. Базар	
	A2	Д. Пүрэвсүрэн	Б. Бат-Од	
ДБ	A3	Б. Батцэнгэл	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай
	Б1	Б. Батцэнгэл	Д. Баянцолмон	
	Б2	Б. Хоролдагва	Б. Хоролдагва	
	Б3	Г. Баярмагнай	Г. Баярмагнай	

Бодлогууд

IX анги

Бодлого IX-A1. n натурал тоо бол $2^n + 3^n + 5^n$ нь бүтэн квадрат тоо биш гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-A2. 00, 01, 02, 03, ..., 97, 98, 99 дугаартай 100 ширхэг билетээс ямар ч k ширхэг билетийг сонгон авахад, сонгосон билетүүд дотор аравтын орны цифрүүд нь хоорондоо ялгаатай, мөн нэгжийн орны цифрүүд нь хоорондоо ялгаатай байх 4 ширхэг билет заавал олддог байв. k -ийн боломжит хамгийн бага утгыг ол.

(Дэвшүүлсэн: М. Батбилэг)

Бодлого IX-A3. ABC гурвалжны гадна D, E цэгүүдийг, харин дотор нь F цэгийг ADB, BEC, CFA гурвалжнууд нь ABC гурвалжны талууд дээр суурьтай, хоорондоо төсөөтэй адил хажуут гурвалжнууд байхаар сонгон авав. $DBEF$ дөрвөн өнцөгт параллелограмм гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого IX-B1. Эерэг a, b тоонуудын хувьд $a + b = 2$ бол

$$\frac{a}{1+b+b^2} + \frac{b}{1+a+a^2} \geq \frac{2}{3}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Ү. Отгонбаяр)

Бодлого IX-B2. $2 \times n$ хэмжээтэй хүснэгтийн зарим нүдийг будахад, будагдсан аль ч хоёр нүд нь хөрш биш байвал уг будалтыг “зөв будалт” гэж нэрлэе. Тэгш тооны нүдийг будсан зөв будалтын тоо ба сондгой тооны нүдийг будсан зөв будалтын тооны ялгаврыг ол. (Ерөнхий талтай нүднүүдийг хөрш нүднүүд гэж нэрлэнэ)

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого IX-B3. ABC гурвалжны AC тал дээр D цэг, AB тал дээр E цэгийг сонгон авчээ. ABC гурвалжны BP Биссектрис, ADE гурвалжны DQ биссектрисүүд хоорондоо перпендикуляр бол $PQ \parallel EC$ гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Х анги

Бодлого X-A1. $a + b + c = 16$ байх a, b, c эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq 5 + \frac{13c}{16}$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого X-A2. ABC гурвалжны BC талын дундаж M цэгийг дайрсан AC талтай параллел шулуун дээр N цэгийг $\angle MAB = \angle NAC$ байхаар авсан бол $\angle ABN = \angle ACB$ болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Батбилэг)

Бодлого X-A3. Тус бүр 1, 2, ..., 99, 100 грамм жинтэй 100 ширхэг туухайг жинлүүрийн 2 таваг дээр жин тэнцүү байхаар хувааж тавив. Үлдсэн туухайнуудын жин тэнцүү байхаар жинлүүрийн таваг тус бүрээс хоёр, хоёр туухайг авч болохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Баасанжав)

Бодлого X-B1. 52 оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_{52}}$ тоог

$$a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_4 \geq \dots \leq a_{50} \geq a_{51} \leq a_{52}$$

нөхцөлийг хангаж байвал “хөрөөний ир” тоо гэж нэрлэе. Зөвхөн 1, 2, 3 цифрээр бичигдэх хэдэн ялгаатай хөрөөний ир тоо байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: М. Батбилэг)

Бодлого X-B2. p нь анхны тоо бол

$$3^m \cdot p^2 + 1 = n^{2017}$$

байх натурал m, n тоонууд олдохгүй гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого X-B3. Тойрогт багтсан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AD ба BC талуудын үргэлжлэл нь M цэгт, AB ба CD талууд нь N цэгт огтлолцоно. C цэгийг дайрсан AB талтай параллель шулуун MN шулуунтай F цэгт огтлолцох бөгөөд FND гурвалжныг багтаасан тойрог CF шулууныг E цэгээр огтолдог бол AE тал нь BC талтай параллель гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Н. Аргилсан)

XI анги

Бодлого XI-A1. p нь сондгой анхны тоо. $n^n + n^n + 1$ тоо нь p -д хуваагддаг байх натурал n тоо олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XI-A2. Элдэв талт ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн A оройг агуулсан BC нумын дундаж цэг F байв. A, F цэгүүдийг дайрсан тойрог $[BA), [CA)$ цацрагуудыг харгалзан M, N цэгүүдэд огтлох бөгөөд MC, NB шулуунууд P цэгт огтлолцоно. S цэг нь $ABSC$ дөрвөн өнцөгт нь параллелограмм байх цэг бол $\angle BSP = \angle CSP$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Д. Пүрэвсүрэн)

Бодлого XI-A3. Тойргоор тоглосон тэмцээнд 52 сурагч оролцжээ. Хэдэн тоглолтын дараа аль ч сурагчийг сонгон авахад түүнтэй тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо ялгаатай байсан бол хамгийн олондоо хэдэн тоглолт явагдсан байсан бэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодлого XI-Б1. $a + b = (a, b)^2$, $b + c = (b, c)^2$, $c + a = (c, a)^2$ байх бүх натурал a , b , c тоонуудыг ол. Энд (a, b) -ээр a , b тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг тэмдэглэв.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XI-Б2. ABC гурвалжин доторх P цэгээс AB , BC талууд руу буулгасан перпендикулярын суурийг харгалзан S , T гье. $\triangle STA$ гурвалжныг багтаасан тойргийн AC -г огтолсон хоёр дахь цэгийг X , $\triangle STC$ гурвалжныг багтаасан тойргийн AC -г огтолсон хоёр дахь цэгийг Y ба (SY) , (TX) шулуунуудын огтлолцлыг R гэвэл $PR \perp AC$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Баяржаргал)

Бодлого XI-Б3. Эерэг a , b , c тоонуудын хувьд $a + b + c = 3$ бол

$$\frac{a+b}{2ab+1} + \frac{b+c}{2bc+1} + \frac{c+a}{2ca+1} \geq 2$$

гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Санчир)

XII анги

Бодлого XII-A1. Натурал k тоо ба $a_1 = 2 + 2016$, $a_2 = 2^2 + 2016$, $a_3 = 2^{2^2} + 2016$, ..., $a_n = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_n + 2016$, ... гэсэн дараалал өгөгдөв. Энэ дараалалд k -д хуваагддаг гишүүн ядаж 2 олддог бол төгсгөлгүй олон олноо гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодлого XII-A2. Бодлого XI-A3.

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодлого XII-A3. ABC гурвалжны BC тал дээр P ба Q цэгүүдийг $\angle BAP = \angle ACB$ ба $\angle CAQ = \angle ABC$ байхаар сонгон авчээ. AP шулуун дээр N цэгийг $AP = PN$ байхаар, AQ шулуун дээр M цэгийг $AQ = QM$ байхаар авав. BN ба CM шулуунууд L цэгт огтлолцдог бөгөөд BC талын дундаж цэг нь K бол $\angle BAK = \angle CAL$ гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Г. Батзаяа)

Бодлого XII-Б1. Бодлого XI-Б3.

(Дэвшүүлсэн: Б. Санчир)

Бодлого XII-Б2. p, q, r нь ялгаатай сондгой анхны тоонууд болог. Натурал n тооны хувьд n, pqr тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $f(n)$, өөрөөр хэлбэл $f(n) = (n, pqr)$ гэж тэмдэглэе. $1 \leq a, b, c \leq pqr$ бөгөөд

$$f(a), f(b), f(c), f(a+b), f(b+c), f(c+a), f(a+b+c)$$

утгууд нь бүгд ялгаатай байдаг (a, b, c) гурвалын тоог ол.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого XII-Б3. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн дотор M цэгийг $\angle BMC = \angle AMD$ байхаар авав. AB, CD талууд дээр гадаад байдлаар ABE, CDF гурвалжнуудыг

$$\angle BAE = \angle DAM, \angle ABE = \angle CBM, \angle CDF = \angle ADM, \angle DCF = \angle BCM$$

байхаар авав. Тэгвэл M, E, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Сумъяа)

Бага ангийн багш

Бодлого ББ-А1.

$$\begin{cases} 2a^2 = b^5 + c^5 \\ 2b^2 = c^5 + a^5 \\ 2c^2 = a^5 + b^5 \end{cases}$$

систем тэгшитгэлийг хангах бүх бодит a, b, c тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: А. Ганбат)

Бодлого ББ-А2. 8^n тооны араас 8^{n+1} тоог залгаж бичихэд гарах тоо нь 2016-д хуваагддаг байх натурал n тоо төгсгөлгүй олон гэдгийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ББ-А3. Бодлого IX-A2.

(Дэвшүүлсэн: М. Батбилэг)

Бодлого ББ-Б1.

- а) $xy + 1$, $yz + 1$, $zx + 1$ тоонууд нь бүтэн квадрат тоонууд байх сондгой натурал x , y , z тоонууд олдохгүй гэдгийг батал.
- б) $xy + 1$, $yz + 1$, $zx + 1$ тоонууд нь бүтэн квадрат тоонууд байх тэгш натурал x , y , z тоонууд төгсгөлгүй олон олдоно гэж батал.

(Дэвшүүлсэн: М. Итгэл)

Бодлого ББ-Б2. Гүдгэр n -өнцөгтийн талууд ба диагоналиудыг $n - 1$ өнгөөр буджээ. Хэрэв оройгоос гарсан талууд ба диагоналиуд нь бүгд өөр өнгөтэй байвал уг оройг “сайн” орой гэж нэрлэе. Сайн орой хамгийн олондоо хэдэн ширхэг байх вэ?

(Дэвшүүлсэн: Б. Баясгалан)

Бодлого ББ-Б3. Гурван овоонд нийт $2N$ ширхэг чулуу байв. Нэг удаагийн үйлдлээр тэгш тооны чулуутай овоог сонгон авч, уг овоонд байгаа чулууны хагасыг өөр овоонд шилжүүлж болно. Энэ үйлдлийн тусламжтайгаар аль нэг овоог N чулуутай болгож чадахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Дунд ангийн багш

Бодлого ДБ-А1. $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ байх эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$ab + bc + ca + 3\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}} \leq 6$$

тэнцэтгэл биш биелэхийг батал.

(Дэвшүүлсэн: Т. Базар)

Бодлого ДБ-А2. Бодлого **XI-A2.**

(Дэвшүүлсэн: Д. Пүрэвсүрэн)

Бодлого ДБ-А3. $|A|$ -аар A олонлогийн элементийн тоог, $\Sigma(B)$ -ээр B олонлогийн элементүүдийн нийлбэрийг тэмдэглэе. p анхны тоо ба $|A| > p$ байх натурал тоон A олонлог өгөгджээ.

$\Sigma(B)$ нийлбэр нь p -д хуваагддаг, $|B|$ нь тэгш байх $B \subseteq A$ дэд олонлогийн тоог $N_{\text{тэгш}}$ гэж тэмдэглэе.

$\Sigma(B)$ нийлбэр нь p -д хуваагддаг, $|B|$ нь сондгой байх $B \subseteq A$ дэд олонлогийн тоог $N_{\text{сондгой}}$ гэж тэмдэглэе.

Жишээлбэл $p = 3$ ба $A = \{1, 2, 4, 7\}$ үед $\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}$ ба $\{1, 4, 7\}$ дэд олонлогуудын нийлбэр 3-д хуваагдах тул $N_{\text{тэгш}} = 4, N_{\text{сондгой}} = 1$ байна.

$N_{\text{тэгш}} - N_{\text{сондгой}}$ ялгавар p -д хуваагдахыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-Б1. a_0, b_0 нь натурал тоонууд бөгөөд $n \geq 0$ үед

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor \\ b_{n+1} &= b_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor\end{aligned}$$

гэсэн рекуррент харьцаагаар тодорхойлогдсон дарааллууд өгөгдөв. $a_n = b_n$ байх n дугаар олдохыг батал.

(Дэвшүүлсэн: Б. Батцэнгэл)

Бодлого ДБ-Б2. Графын v оройтой холбоотой бүх оройн зэргүүдийн нийлбэрийг $n(v)$ гэж тэмдэглэе. 3 ба 4 урттай цикл агуулаагүй, нэгээс олон оройтой ямар ч графад $n(u) = n(v)$ байх ялгаатай u, v оройнууд олдохыг батал. (Графын нэг оройтой ирмэгээр холбоотой оройнуудын тоог уг оройн зэрэг гэж нэрлэнэ. $v_1, \dots, v_n$ нь графын ялгаатай оройнууд бол

$$v_1 - v_2 - v_3 - \dots - v_n - v_1$$

гэсэн ирмэгүүдийн дарааллыг n урттай цикл гэж нэрлэнэ.)

(Дэвшүүлсэн: Б. Хоролдагва)

Бодлого ДБ-Б3. Бүгдийнх нь нийлбэр тэг бөгөөд бусад аль ч хоосон биш хэдийн нийлбэр нь тэгээс ялгаатай байдаг $2n + 1$ ширхэг бүхэл тоо өгөгджээ. Өгөгдсөн тоонууд абсолют хэмжигдэхүүнээрээ бүгд $(n + 1)$ -ээс хэтрэхгүй тоонууд бол эдгээр тоонуудыг ол.

(Дэвшүүлсэн: Г. Баярмагнай)

Бодолтууд

IX анги

Бодолт IX-A1. $2^n + 3^n + 5^n$ тоог 4-т хуваахад гарах үлдэгдлийг авч үзье. $n \geq 2$ үед

$$2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 + (-1)^n + 1^n \pmod{4}.$$

Тооны квадратыг 4-т хуваахад 0, 1 үлдэгдэл өгөх учир $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ хэлбэртэй байна. Одоо

$$\begin{aligned} 2^{2k+1} + 3^{2k+1} + 5^{2k+1} &= 2^{2k+1} + (3+5)(3^{2k} - 3^{2k-1} \cdot 5 + \dots + 5^{2k}) \\ &= 8 \cdot (2^{2k-2} + 3^{2k} - 3^{2k-1} \cdot 5 + \dots + 5^{2k}) \end{aligned}$$

болохыг анзааръя.

Энд хаалтад 1 тэгш, $2k+1$ сондгой тоо байгаа тул нийлбэр сондгой тоо болно. Иймд $2^{2k+1} + 3^{2k+1} + 5^{2k+1}$ тоог хуваах 2-ын зэрэг нь 3 болно.

Хэрэв бүтэн квадрат байсан бол түүнийг хуваах 2-ын хамгийн их зэрэг нь тэгш байх ёстой. $n = 1$ үед $2 + 3 + 5 = 12$ тул $2^n + 3^n + 5^n$ тоо бүтэн квадрат болохгүй.

Бодолт IX-A2.

Дараах 10×10 хүснэгтийг авч үзье.

00, 01, 02, ..., 28, 29 дугаартай 30 билетүүдээс бодлогын нөхцөл хангах 4 билет сонгож чадахгүй. Учир нь эдгээр тоонуудын аравтын цифр 0, 1, 2 гэсэн 3 янз юм. Одоо ямар ч 31 билетээс бодлогын нөхцөл хангах 4 билет сонгож чадахыг харуулъя.

09	19		89	99
08	18		88	98
01	11		81	91
00	10		80	90

00, 01, 02, ..., 98, 99 тоонуудыг хүснэгтэд зурагт харуулсан шиг бичье. Хүснэгтийг диагоналийн дагуу 10 өнгөөр будъя. Одоо ямар ч 31 билет авсан Дирхилейн зарчмаар ижил өнгөөр будагдсан 4 билет олдоно. Уг 4 билет бодлогын нөхцөл хангах нь илэрхий.

Бодолт IX-A3. $\triangle AFC \sim \triangle ADB$ гэдгээс $\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AD}$, мөн $\angle CAB = \angle FAD$ болно. Эндээс тал өнцөг талын шинжүүрээр $\triangle ABC \sim \triangle ADF$ болно. Яг ижил аргаар $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ гэж гарна. Иймд $\triangle FEC \sim \triangle ADF$ болох ба $AF = FC$ гэдгээс $\triangle FEC = \triangle ADF$ болно. Иймд $DF = EC = BE$ мөн $FE = AD = DB$ болно. Иймд $BDFE$ параллелограмм болно.

Бодолт IX-Б1. Эхлээд дурын эерэг a, b, x, y тоонуудын хувьд

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right)(ax + by) \geq (a + b)^2 \quad (*)$$

болохыг харуулъя. Үнэхээр, хаалт задлан хялбарчилбал

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

гэж батлахтай ижил ба энэ нь Кошийн тэнцэтгэл бишээс мөрдөнө. (*)-д $x = 1 + a + a^2$, $y = 1 + b + b^2$ гэж авбал

$$\frac{a}{1 + b + b^2} + \frac{b}{1 + a + a^2} \geq \frac{(a + b)^2}{a + ab + ab^2 + b + ab + ab^2} = \frac{4}{2 + 4ab}$$

болно. Кошийн тэнцэтгэл бишээс $4ab \leq (a + b)^2 = 4$ тул бодлого бодогдов.

Бодолт IX-Б2. Тэгш тооны нүдийг будсан зөв будалтын тоог T_n , сондгой тооны нүдийг будсан зөв будалтын тоог C_n гэвэл бидний олох тоо нь $Y_n := T_n - C_n$ болно. $T_1 = 1, C_1 = 2, T_2 = 3, C_2 = 4, T_3 = 9, C_3 = 8$ болохыг хялбархан шалгаж болно.

Одоо $n \geq 3$ үед T_n -ийг сонирхье. Сүүлээсээ 2 дахь баганыг нь авч үзвэл эсвэл огт будагдаагүй, яг нэг нүд нь будагдсан байна. Хэрэв будагдаагүй бол бид $2 \times (n - 2)$ хүснэгтийн сондгой зөв будалтыг яг 2 янзаар $2 \times n$ тэгш зөв будалт болгож өргөтгөж чадна. Хэрэв яг нэг нүд нь будагдсан бол дурын $2 \times (n - 1)$ хүснэгтийн зөв будалтыг тэгш $2 \times n$ зөв будалт болгож болно. Эдгээр үйлдлүүд нь 1 : 1 харгалзаа болно.

Эндээс

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + C_{n-1} + C_{n-2} \\ C_n &= C_{n-1} + T_{n-1} + T_{n-2} \end{aligned}$$

болно. Иймд

$$Y_n = -Y_{n-2}$$

болно. $Y_1 = -1, Y_2 = -1, Y_3 = 1$ гэдгээс индукцээр

$$Y_n = \begin{cases} -1 & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ 1 & n \equiv 0, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

болно.

Бодолт IX-Б3. D цэг нь $[CP]$ хэрчим дээр оршдог гэж үзье (D цэг нь $[AP]$ хэрчим дээр орших үед төстэй аргаар бодогдоно). Энэ үед $\angle B > \angle A$ байна.

BP ба DQ хэрчмүүдийн огтлолцлын цэгийг O гэе. $BM \parallel DE$ байх M цэгийг $[AC]$ цацраг дээр авъя. $\angle ABP = \angle CBP = \frac{\beta}{2}, \angle ADQ = \angle EDQ = \frac{\delta}{2}$ гэж тэмдэглэе. Өгсөн

нөхцөлөөс $BP \perp DQ$ тул өнцөг хөөвөл $\angle BQO = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\angle DEQ = 180^\circ - \angle EDQ - \angle EQD = 180^\circ - \frac{\delta}{2} - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$ гэж олдоно.

$BM \parallel DE$ учир $\angle ABM = \angle AED = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$ байна. $\angle CBM = \angle ABM - \angle ABC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} - \beta = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$. Нөгөө талаас, $\angle BAC = 180^\circ - \angle ADQ - \angle DQA = 180^\circ - \angle ADQ - (180^\circ - \angle BQD) = \angle BQD - \angle ADQ = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}$ болно.

$\angle CBM = \angle BAM$ ба $\angle M$ ерөнхий тул BMC ба AMB гурвалжнууд төсөөтэй байна. Төсөөгийн харьцаа бичвэл $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MB}$ болно.

$BM \parallel DE$ тул AMB ба ADE гурвалжнууд төсөөтэй байх ба $\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DE}$ болно. Иймд $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ биелнэ.

Биссектрисийн чанар ёсоор $\frac{AD}{DE} = \frac{AQ}{QE}$ ба $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC}$ болох тул $\frac{AQ}{QE} = \frac{AP}{PC}$ биелнэ. Иймд Фалесийн теорем ёсоор $PQ \parallel EC$ болно.

Нийслэлийн 1-р дунд сургуулийн сурагч Б. Батмэндийн бодолтын хувилбар.

Х анги

Бодолт Х-А1.

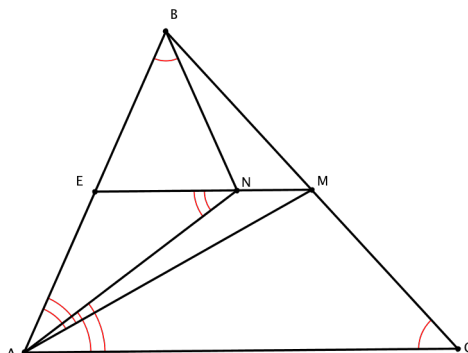
$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \quad \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+9c}{16}, \quad \frac{ca}{c+a} \leq \frac{9c+a}{16}$$

тэнцэтгэл бишүүд биелэхийг хялбархан шалгаж болох юм. Харгалзуулаад нэмбэл

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{4} + \frac{b+9c}{16} + \frac{9c+a}{16} = 5 + \frac{13c}{16}$$

болж батлагдана.

Бодолт Х-А2. AB талын дундаж цэгийг E гэе. EM хэрчим дундаж шугам болох ба N цэг AB хэрчмийн гадна ч, дотор ч байх боломжтой. N цэг AB хэрчим дээр байх үед бодолт хийе.



Параллель шулуунуудыг огтлоход үүсэх солбисон өнцгүүд тэнцүү тул

$$\angle ENA = \angle NAC = \angle EAM.$$

болно. $\triangle AEN$ ба $\triangle MEA$ гурвалжинд $\angle AEM$ ерөнхий учир $\triangle AEN \sim \triangle MEA$ байна. Төсөөгийн харьцаа бичвэл

$$\frac{AE}{ME} = \frac{EN}{EA} = \frac{NA}{AM} \quad (0.1)$$

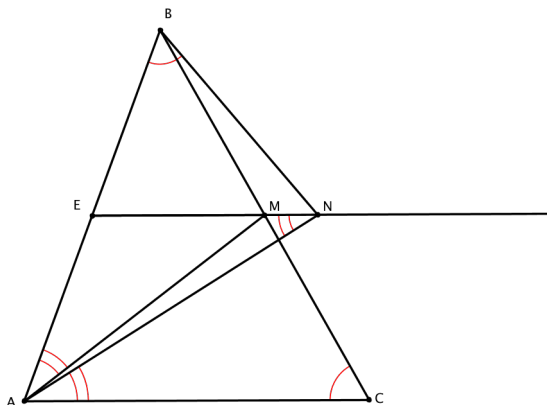
болно. $AE = EB$ болохыг тооцвол

$$\frac{BE}{ME} = \frac{AE}{ME} = \frac{EN}{EA} = \frac{EN}{EB} \quad (0.2)$$

байна. (0.2) ба $\angle BEN = \angle MBE$ тооцвол $\triangle BEN \sim \triangle MEB$ болно.

Эндээс $\angle EBN = \angle BME = \angle BCA$ болж батлагдав.

N цэг AB хэрчмийн гадна байхад бодолт бодолт адилхан байна.



Бодолт Х-А3. $1, 2, \dots, 100$ тоог энэ дарааллаар эгнүүлж бичье. Мөн дурын тоог түүнтэй тэнцүү тооны грамм бүхий туухай 1-р тавган дээр байдаг бол улаанаар, 2-р тавган дээр байдаг бол цэнхэр өнгөөр будъя. Тэгвэл $1, 2, \dots, 100$ тоонууд сөөлжилдсэн улаан цэнхэр бүлгүүдэд хуваагдана. Улаанаар эхэлдэг гэж үзье.

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1, \dots, m}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{m+1, \dots}_{\text{улаан}} \quad \dots$$

Хэрэв эхний цэнхэр бүлэг 2-оос доошгүй элементтэй дараагийн улаан бүлэг хоосон биш байвал нийлбэр нь тэнцүү байдаг улаан (k, m) , цэнхэр $(k+1, m-1)$ хосууд олдоно. Иймд

(i) 2 дахь улаан бүлэг хоосон

(ii) 2 дахь улаан бүлэг хоосон биш, эхний цэнхэр бүлэг 1 элементтэй

гэсэн хоёр тохиолдлыг сонирхъя.

- (i) 2 дахь улаан бүлэг хоосон бол эгнээ

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1, \dots, 100}_{\text{цэнхэр}}$$

хэлбэртэй бичигдэнэ. Бодлогын нөхцөлөөр

$$1 + 2 + \dots + k = (k+1) + (k+2) + \dots + 100$$

буюу $k(k+1) = 50 \cdot 101$ болно. Гэвч уг нөхцөлийг хангах $k \in \mathbb{N}$ олдохгүй тул боломжгүй юм.

- (ii) 2 дахь улаан бүлэг хоосон биш, эхний цэнхэр бүлэг 1 элементтэй үед эгнээ

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{k+2, \dots}_{\text{улаан}} \quad \dots$$

хэлбэртэй бичигдэнэ.

[a] Хэрэв 2 дахь улаан бүлэг 2-оос багагүй элементтэй бол түүний дараагаар цэнхэр бүлэг байдаг (m -ээр эхэлдэг) бол нийлбэр нь тэнцүү байдаг цэнхэр $(k+1, m)$, улаан $(k+2, m-1)$ хосууд олдоно. Иймд цэнхэр бүлэг байдаггүй буюу эгнээ

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{k+2, \dots, 100}_{\text{улаан}}$$

болох ба

$$1 + 2 + \dots + k + (k+2) + \dots + 100 = k+1$$

тул боломжгүй юм.

- [б] 2 дахь улаан бүлэг 1 элементтэй үед эгнээ

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{k+2}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+3, \dots}_{\text{цэнхэр}} \quad \dots$$

хэлбэртэй байна. 2 дахь цэнхэр бүлгийн араас улаан бүлэг байдаг бол (s -ээр эхэлдэг) нийлбэр нь тэнцүү байх улаан (k, s) , цэнхэр $(k+1, s-1)$ хосууд олдоно.

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{k+2}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+3, \dots}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{s, \dots}_{\text{улаан}} \quad \dots$$

Тэгэхээр эгнээ

$$\underbrace{1, 2, \dots, k}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+1}_{\text{цэнхэр}} \quad \underbrace{k+2}_{\text{улаан}} \quad \underbrace{k+3, \dots, 100}_{\text{цэнхэр}}$$

хэлбэртэй бичигдэнэ. Бодлогын нөхцөлөөр

$$1 + 2 + \dots + k + (k+2) = (k+1) + (k+3) + (k+4) + \dots + 100$$

ба $2 \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2} + k+2 \right) = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101$ болно. Эндээс $k^2 + 3k - 5046 = 0$ болох ба $k \in \mathbb{N}$ гэдэгт зөрчинө. Иймд ямагт нийлбэр нь тэнцүү байх хосуудыг таваг тус бүрээс сонгож болно.

Бодолт Х-Б1.

1-ээр эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоог x_n -ээр,

2-оор эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоог y_n -ээр,

3-аар эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоог z_n -ээр

тус тус тэмдэглэе. Нийт хөрөөний ир тооны тоог $S_n = x_n + y_n + z_n$ гэе.

n оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ тооны хувьд

$$a_1 \geq a_2 \leq a_3 \geq \dots$$

нөхцөлийг хангаж байвал “эсрэг хөрөөний ир” тоо гэж нэрлэе. Тэгвэл n оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ хөрөөний ир тоог n оронтой $\overline{(4-a_1)(4-a_2)\dots(4-a_n)}$ эсрэг хөрөөний ир тоотой харгалзуулбал энэ харгалзаа нь харилцан нэг утгатай байх тул

- 1-ээр эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоо нь 3-аар эхэлсэн n оронтой эсрэг хөрөөний ир тооны нийт тоотой тэнцүү,
- 2-оор эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоо нь 2-оор эхэлсэн n оронтой эсрэг хөрөөний ир тооны нийт тоотой тэнцүү,
- 3-аар эхэлсэн n оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоо нь 1-ээр эхэлсэн n оронтой эсрэг хөрөөний ир тооны нийт тоотой тэнцүү

байна. Эндээс

- n оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ хөрөөний ир тоо нь 1-ээр эхэлсэн үед $n-1$ оронтой $\overline{a_2 a_3 \dots a_n}$ эсрэг хөрөөний ир тоо нь 1, 2, 3-аар эхэлж болох тул $x_n = x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} = S_{n-1}$ байна.
- n оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ хөрөөний ир тоо нь 2-оор эхэлсэн үед $n-1$ оронтой $\overline{a_2 a_3 \dots a_n}$ эсрэг хөрөөний ир тоо нь 2, 3-аар эхэлж болох тул $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ байна.
- n оронтой $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ хөрөөний ир тоо нь 3-аар эхэлсэн үед $n-1$ оронтой $\overline{a_2 a_3 \dots a_n}$ эсрэг хөрөөний ир тоо нь зөвхөн 3-аар эхэлж болох тул $z_n = x_{n-1} = S_{n-2}$ байна.

Иймд

$$\begin{aligned} S_n &= x_n + y_n + z_n = S_{n-1} + (x_{n-1} + y_{n-1}) + S_{n-2} = S_{n-1} + (S_{n-1} - z_{n-1}) + S_{n-2} \\ &= 2S_{n-1} + S_{n-2} - S_{n-3} \end{aligned}$$

гэж гарна. $S_1 = 3$, $S_2 = 6$, $S_3 = 14$ гэдгийг хялбархан тооцоолж болох ба эндээс $S_0 = 1$ гэж үзэж болно. Дээрх рекуррент томъёонд харгалзах характеристик тэгшитгэлийг бичвэл

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

болно. Уг тэгшитгэлийн шийдүүд нь $\epsilon_1 = \left(2 \cos \frac{\pi}{7}\right)^{-1}$, $\epsilon_2 = \left(2 \cos \frac{3\pi}{7}\right)^{-1}$, $\epsilon_3 = \left(2 \cos \frac{5\pi}{7}\right)^{-1}$ гэдгийг тригонометрийн адилтгал ашиглан шалгаж болно (үүнийг өөрсдөө шалгана уу). Эндээс Дээрх рекуррентийн ерөнхий гишүүний томьёо нь

$$S_n = A \cdot \epsilon_1^n + B \cdot \epsilon_2^n + C \cdot \epsilon_3^n \quad (A, B, C \text{ бодит тоонууд})$$

хэлбэртэй байна.

$$\begin{cases} S_0 = A + B + C = 1 \\ S_1 = A \cdot \epsilon_1 + B \cdot \epsilon_2 + C \cdot \epsilon_3 = 3 \\ S_2 = A \cdot \epsilon_1^2 + B \cdot \epsilon_2^2 + C \cdot \epsilon_3^2 = 6 \end{cases}$$

гэдгээс A, B, C -г олж болно. Иймд 52 оронтой хөрөөний ир тооны нийт тоо $S_{52} = A \cdot \epsilon_1^{52} + B \cdot \epsilon_2^{52} + C \cdot \epsilon_3^{52}$ гэж олдоно.

Бодолт Х-Б2. $p \geq 3$ сондгой анхны тоо бол n нь тэгш болно. Иймд n^{2017} тоо нь 8-д хуваагдана. 3-ын зэрэгтийг 8-д хуваахад 1 эсвэл 3 үлдэнэ. Дурын сондгой тоог 8-д хуваахад 1 үлдэгдэл өгөх тул $3^m p^2 + 1$ тоо 8-д хуваагдахгүй. Иймд шийдгүй.

$p = 2$ гэе. Тэгвэл $n^{2017} - 1 = (n - 1)(n^{2016} + n^{2015} + \dots + 1) = 4 \cdot 3^m$ болно. 2017 нь анхны тоо гэдгийг ажиглавал $(n - 1, n^{2016} + n^{2015} + \dots + 1) = 1$ эсвэл 2017 байна. Гэвч 2017 нь $4 \cdot 3^m$ тоог хуваахгүй тул $(n - 1, n^{2016} + n^{2015} + \dots + 1) = 1$ байна. n сондгой тоо байх ёстой тул $n - 1 = 4$ эсвэл $n - 1 = 4 \cdot 3^m$ болно.

(i) $n - 1 = 4 \cdot 3^m$ бол $n^{2016} + n^{2015} + \dots + 1 = 1$ болох ба энэ нь боломжгүй юм.

(ii) $n - 1 = 4$ бол $5^{2016} + 5^{2015} + \dots + 1 = 3^m$ болно. Гэвч $5^{2016} + 5^{2015} + \dots + 1$ тоо нь 3-д 1 үлдэгдэл өгөх тул мөн боломжгүй юм.

Иймд өгсөн тэгшитгэл нь шийдгүй байна.

Бодолт Х-Б3.

(1) $\angle DCM = \angle BAM$ гэдгээс $\frac{AB}{CD} = \frac{BM}{DM}$ биелнэ.

(2) Синусийн теоремоос

$$\frac{CN}{BN} = \frac{\sin \angle CBN}{\sin \angle BCN} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin (\pi - \angle BCN)} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle MCD} = \frac{CM}{DM}$$

болох ба эндээс $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$ болно. Өөрөөр хэлбэл $CN = BN \cdot \frac{CM}{DM}$ биелнэ.

(3) $CF \parallel BN$ бол $\frac{CF}{BN} = \frac{CM}{DM}$ болох буюу $CF = BN \cdot \frac{CM}{DM}$ биелнэ.

(2) ба (3)-г харьцуулбал $\frac{CN}{CF} = \frac{BM}{DM}$ болох ба (1)-ээс $\frac{AB}{CD} = \frac{BM}{DM}$ тул $\frac{CN}{CF} = \frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DC}$ биелнэ. Нөгөө талаас $DENF$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт тул $\frac{CN}{CF} = \frac{CE}{CD}$ харьцаа биелнэ. Иймд сүүлийн хоёр харьцаанаас $\frac{AB}{DC} = \frac{CE}{CD}$ болох буюу $AB = CE$ болно. Эндээс $ABCE$ нь параллелограмм болох буюу $AE \parallel BC$ болж батлагдав.

XI анги

Бодолт XI-A1. Үлдэгдлийн тухай хятадын теоремоор

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{p-1} \\ n \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p} \end{cases}$$

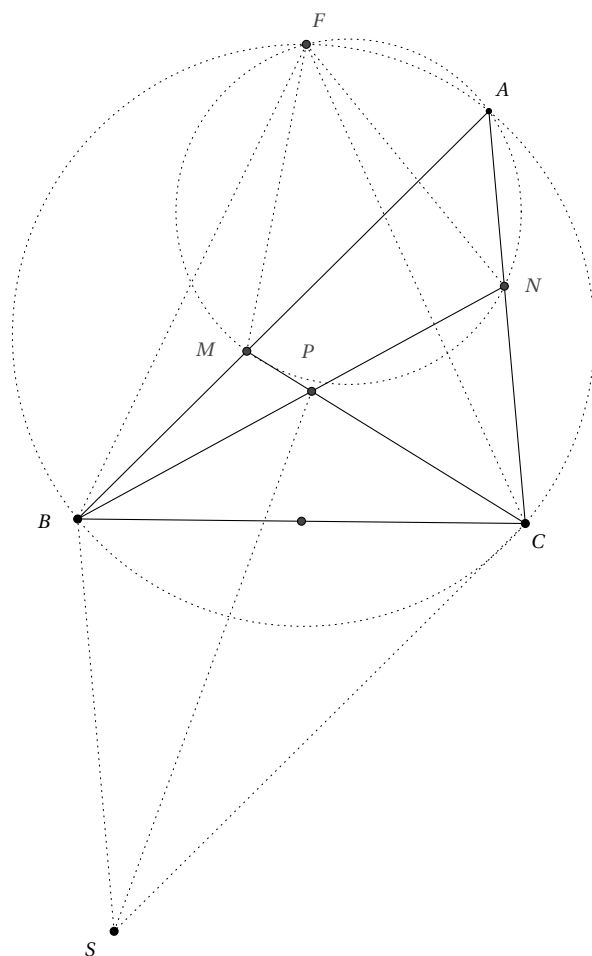
систем шийдтэй байна. Уг системийг хангах n нь бодлогын нөхцөлийг хангана. Учир нь $n^n \equiv n \equiv 1 \pmod{p-1}$ тул $n^{n^n} \equiv n \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ ба $n^n \equiv n \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ болно. Иймд

$$n^{n^n} + n^n + 1 \equiv \frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{2} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

байна.

Жич: $n = p - 2$ үед мөн бодлогын нөхцөлийг хангана.

Бодолт XI-A2.



Тойргийн A цэгийг агуулсан нумын дундаж цэгийг F гээ. $CF = FB$ байна. $AFNM$ ба $AFBC$ нь багтсан дөрвөн өнцөгт гэдгээс $\angle FBM = \angle FCN$, $\angle FMA = \angle FNA$ болно. Иймд $\triangle BFM \cong \triangle CNF$ буюу эндээс $BM = NC$ байна.

$X = CM \cap SB$ гээ. $MB \parallel CS$ тул $\frac{CS}{SX} = \frac{MB}{BX}$ байна. Мөн $MB = NC$ гэдгээс $\frac{CS}{SX} = \frac{NC}{BX}$ болно. Эцэст нь $NC \parallel BX$ тул $\frac{NC}{BX} = \frac{CP}{PX}$ байна.

Иймд $\frac{CS}{SX} = \frac{CP}{PX}$ ба биссектрисийн теорем ёсоор SP нь $\angle CSX$ -ийн биссектрис болов.

Бодолт XI-A3. Тухайн үед хамгийн олон тоглолт хийсэн сурагчийг x , түүний тоглолтын тоог k гэж тэмдэглэе. Тэгвэл x сурагчтай тоглосон, тоглолтын тоо нь яг k байх y сурагч олдох бөгөөд бодлогын нөхцөлөөс x ба y -н хоёулангтай нь тоглосон сурагч олдохгүй. Иймд нийт сурагчдын тоо $2k$ -оос багагүй болох тул $k \leq 26$ байна. Мэдээж x сурагчтай тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо нь $1, 2, \dots, k$, мөн y сурагчтай тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо нь $1, 2, \dots, k$ байна. Иймээс тэмцээнд оролцсон сурагчдын оноог үл буурах эрэмбээр нь бичвэл

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_2}, \dots, \underbrace{k, k, \dots, k}_{n_k}$$

болох ба энд

$$n_i \geq 2 \quad (1 \leq i \leq k), \quad k \leq 26, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = 52 \quad (*)$$

байна. Тэгвэл энэ явц дахь нийт тоглолтын тоо нь

$$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + k \cdot n_k$$

нийлбэрийн хагастай тэнцүү бөгөөд $(*)$ нөхцөлөөс дээрх нийлбэр нь хамгийн их утгаа $n_i = 2 \quad (1 \leq i \leq k)$ ба $k = 26$ үед авдаг болохыг хялбархан харж болно. Иймд нийт тоглолтын тоо нь хамгийн ихдээ 351 гэж гарна. Одоо бодлогын нөхцөлийг хангах 351 тоглолт болсон графыг байгуулъя. Үүний тулд сурагчдаа $x_1, x_2, \dots, x_{26}$ ба $y_1, y_2, \dots, y_{26}$ хоёр хэсэгт хуваая. Хэсэг тус бүрийн сурагчид хоорондоо тоглоогүй ба x_i, y_j сурагчид зөвхөн $i + j > 26$ байхад тоглосон бол сурагч бүрийн тоглосон сурагчдын тоглолтын тоо нь ялгаатай бөгөөд нийт тоглолтын тоо нь 351 болж бодлого бодогдов.

Бодолт XI-B1. Хариу: $a = b = c = 2$ байна. $(a, b) = z$, $(b, c) = x$, $(c, a) = y$ ба $(a, b, c) = d$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $(x, y) = (y, z) = (z, x) = d$ байна. Өгсөн $a + b = z^2$, $b + c = x^2$, $c + a = y^2$ нөхцөлөөс

$$2a = y^2 + z^2 - x^2, \quad 2b = z^2 + x^2 - y^2, \quad 2c = x^2 + y^2 - z^2$$

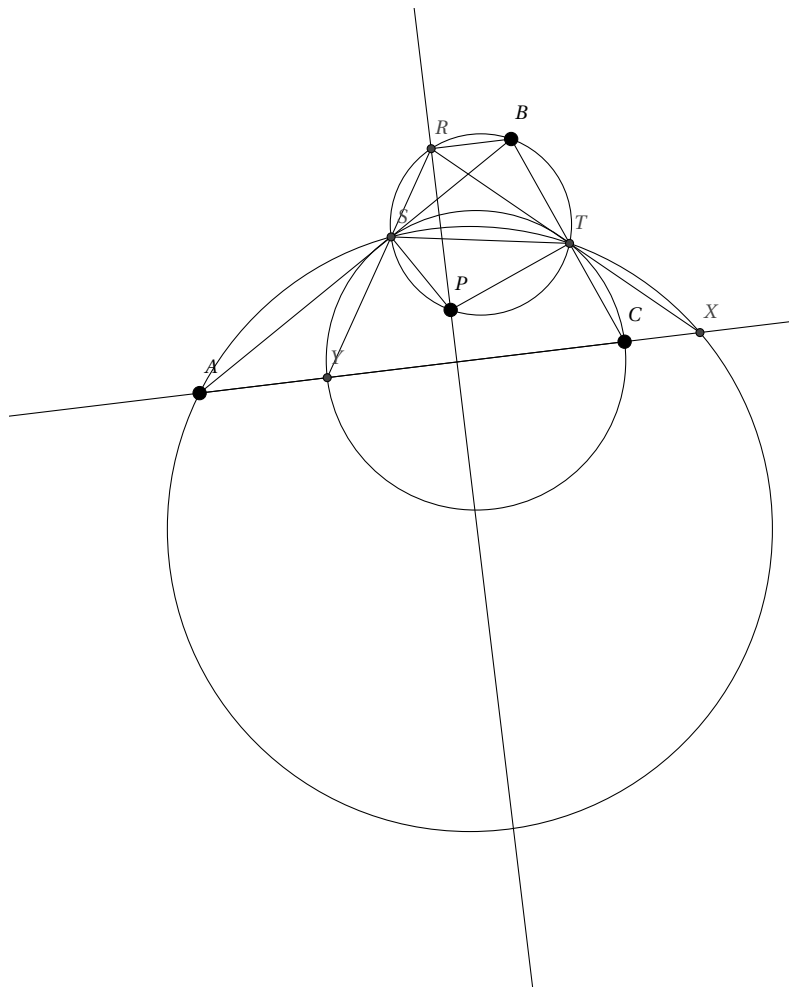
гэж гарах бөгөөд эдгээр тэнцлийн баруун гар талд байгаа илэрхийллүүд бүгд d^2 -д хуваагдана. Нэгэнт $2a, 2b, 2c$ тоонууд d^2 -д хуваагдах тул тэдгээрийн хамгийн их ерөнхий хуваагч болох $2d$ тоо d^2 -д хуваагдана. Иймд $d = 1$ эсвэл $d = 2$ байна.

Цаашилбал, a нь y ба z -д хуваагдах тул тэдгээрийн хамгийн бага ерөнхий хуваагдагч болох $[y, z] = \frac{yz}{(y, z)} = \frac{yz}{d}$ тоонд хуваагдана. Үүнтэй нэгэн адилаар b нь $[z, x] = \frac{zx}{d}$ -д, c нь $[x, y] = \frac{xy}{d}$ -д тус тус хуваагдана. Тэгэхлээр $a \geq \frac{yz}{d}$, $b \geq \frac{zx}{d}$, $c \geq \frac{xy}{d}$ байна. Эдгээр тэнцэтгэл бишийг өгсөн нөхцөлд орлуулбал,

$$z^2 \geq \frac{yz}{d} + \frac{zx}{d}, \quad x^2 \geq \frac{zx}{d} + \frac{xy}{d}, \quad y^2 \geq \frac{xy}{d} + \frac{yz}{d}$$

буюу $dz \geq x + y$, $dx \geq y + z$, $dy \geq z + x$ болно. Эдгээр тэнцэтгэл бишийг хооронд нь нэмбэл, $d \geq 2$ болох бөгөөд $d = 2$ байхын тулд $x = y = z$ байх ёстой гэж гарна. $x = y = z$ бөгөөд $(x, y) = (y, z) = (z, x) = d = 2$ байхын тулд зөвхөн $x = y = z = 2$ байх ёстой. Эндээс өгсөн нөхцөлөөс $a = b = c = 2$ гэж олдоно.

Бодолт XI-Б2. A, S, T, X нэг тойрог дээр оршино гэдгээс $\angle AXT = \angle BST$ мөн C, S, T, Y нэг тойрог дээр оршино гэдгээс $\angle YCT = \angle RST$ болно. Иймд $\angle RTB = \angle CTX = \angle YCT - \angle AXT = \angle RST - \angle BST = \angle RSB$ болж $SRBT$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах болов. $\angle BSP = \angle BTP = 90^\circ$ гэдгээс $SBTP$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах учир $SRBTP$ таван өнцөгт тойрогт багтана. Эндээс $\angle BRT = \angle BST = \angle AXT$ буюу $RB \parallel AC$ болох ба $\angle PRB = \angle PSB = 90^\circ$ учир RP нь AC -тэй перпендикуляр болж батлагдав.



Бодолт XI-Б3. Батлах тэнцэтгэл бишийг

$$\sum \frac{(a+b)(a+b+c)}{2ab+1} \geq 6$$

буюу

$$\sum \frac{(a+b)^2}{2ab+1} + \sum \frac{c(a+b)}{2ab+1} \geq 6$$

гэж бичье. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл

$$\sum \frac{(a+b)^2}{2ab+1} \geq \frac{(\sum (a+b))^2}{\sum (2ab+1)} = \frac{36}{3+2\sum ab}$$

болно. Нөгөө талаас бид $a \geq b \geq c$ гэж үзэж болох ба энэ үед $c(a+b) \leq b(c+a) \leq a(b+c)$ ба $\frac{1}{2ab+1} \leq \frac{1}{2ca+1} \leq \frac{1}{2bc+1}$ болох тул Чебышевийн тэнцэтгэл биш болон Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} \sum \frac{c(a+b)}{2ab+1} &\geq \frac{1}{3}(\sum c(a+b))\left(\sum \frac{1}{2ab+1}\right) \\ &\geq \frac{2}{3}(\sum ab) \frac{9}{\sum (2ab+1)} = \frac{6\sum ab}{3+2\sum ab} \end{aligned}$$

болно. Иймд

$$\frac{36+6\sum ab}{3+2\sum ab} \geq 6$$

гэж баталбал бодлого бодогдоно. Сүүлийн тэнцэтгэл бишийг эквивалентаар хувиргавал

$$ab+bc+ca \leq 3$$

болох ба энэ нь Кошийн тэнцэтгэл биш ашиглаад батлагдана. Тэнцэтгэл биш $a=b=c=1$ үед л тэнцэтгэл болно.

XII анги

Бодолт XII-A1.

Эхлээд $a \mid b \implies (2^a - 1) \mid (2^b - 1)$ болохыг саная.

Дурын бүхэл $p \geq 0$, $q \geq 1$ ба $r \geq 0$ тоонуудын хувьд $(a_{p+q} - a_p) \mid (a_{p+q+r} - a_{p+q})$ болохыг p -ээр индукцлэн үзүүлье.

$p=0$ үед $a_{q-1} \mid (a_{q+r-1} - a_{q-1})$ тул $a_q - a_0 \mid a_{q+r} - a_q$ үнэн болно. $p \geq 0$ үед үнэн гэвэл

$$a_{p+q+1} - a_{p+1} = 2^{a_p}(2^{a_{p+q}-a_p} - 1) \mid 2^{a_{p+q}}(2^{a_{p+q+r}-a_{p+q}} - 1) = a_{p+q+r+1} - a_{p+q+1}$$

тул $p+1$ үед үнэн. Хэрэв $p > q$, $a_p \equiv a_q \pmod{k}$ бол $a_{p+r} \equiv a_p \pmod{k}$ болох нь дээрхээс мөрдөнө.

Бодолт XII-A3.

$\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAK = \theta$ гэе.

$\angle CAQ = \beta$ ба $\angle QCA = \gamma$ тул $\Theta T \Theta$ шинжүүрээр $\triangle ABC \sim \triangle QAC$ (төсөөтэй) болно. Мөн адилаар $\triangle ABC \sim \triangle PBA$ болох тул $\angle AQC = \angle BPA = \alpha$ байна.

AC талын дундаж цэгийг D , AB талын дундаж цэгийг E гэе. Тэгвэл $\triangle ABC \sim \triangle QAC$ төсөөгөөс $\angle AQD = \theta$ болно. Мөн ижлээр $\angle BPE = \theta$ болно.

QD нь AMC гурвалжны дундаж шугам тул $\angle AMC = \angle AQD = \theta$ болно. PE нь ABN гурвалжны дундаж шугам тул $\angle CBN = \theta$ болно. Иймд $BMLQ$ нь тойрогт багтах тул $\angle BLC = 180^\circ - \angle BLM = 180^\circ - \angle BQM = 180^\circ - \alpha$ болно. Эндээс $ABLC$ нь тойрогт багтах тул $\angle CAL = \angle CBL = \theta$ болж бодлого бодогдов.

Улаанбаатар хот, Орчлон сургуулийн сурагч З. Батзоригийн бодолтын хувилбар.

Бодолт XII-B2. Хариу: 96.

Бодолт XII-B3. Бодлогоо бодохоос өмнө дараах нэгэн хялбар чанарыг баталъя.

Чанар: ABC гурвалжны AB, BC, CA талууд дээр ABF, BDC, CEA гурвалжнуудыг $\angle BAF = \angle CAE$, $\angle ABF = \angle CBD$, $\angle BCD = \angle ACE$ байхаар авав. Тэгвэл AD, BE, CF хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцоно.

Чанарыг баталгаа: $(AD) \cap (BC) = X$, $(BE) \cap (CA) = Y$, $(CF) \cap (AB) = Z$ гэе. ABC гурвалжны өнцгүүдийг харгалзан α, β, γ ба $\angle BAF = \angle CAE = x$, $\angle ABF = \angle CBD = y$, $\angle BCD = \angle ACE = z$ байг. Талбайн харьцаан тухай теоремоос

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}} = \frac{AC \cdot AF \cdot \sin(\alpha + x)}{BC \cdot BF \cdot \sin(\beta + y)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin y}{\sin x} \cdot \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin(\beta + y)}.$$

Үүнтэй төстэйгөөр $\frac{BX}{XC}, \frac{CY}{YA}$ харьцаануудыг илэрхийлбэл $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$ болох ба Чевийн урвуу теоремоор AD, BE, CF хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцоно.

Одоо бодлогоо бодъё. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын огтлолцлын цэгийг O гэе. $O \neq M$ байг.

Бодлогын өгөгдсөн нөхцөл дээр дээрх баталсан чанараа AMB гурвалжны хувьд ашиглавал DB, AC, ME хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцох буюу O цэгт огтлолцоно. Мөн дээрх чанарыг DMC гурвалжны хувьд ашиглавал DB, CA, MF хэрчмүүд нэг цэгт огтлолцох буюу O цэгт огтлолцоно. Иймд E, F цэгүүд OM шулуун дээр орших болж батлагдана.

Одоо $O \equiv M$ байг. $(BC) \cap (AD) = S$ гэе. Тэгвэл өгөгдсөн нөхцөлөөс S, F цэгүүд CMD гурвалжны хувьд изогонал хосмог цэгүүд буюу SM шулууныг CMD өнцгийн биссектрисийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргавал FM шулуун гарна. Мөн төстэйгөөр SM шулууныг AMB өнцгийн хувьд тэгш хэмтэй хувиргавал ME шулуун гарна. Иймд E, M, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Одоо бидэнд $M \equiv O$ ба $BC \parallel AD$ үед батлах үлдлээ. $\angle AEM + \angle EBM = 180^\circ$. Эндээс A, E, B, M цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Үүнтэй төстэйгөөр C, F, D, P цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle EMB = \angle BAE = \angle DAC = \angle ACB = \angle FCD = \angle FMD$ болж E, M, F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Бодлого бүрэн бодогдов.

Бага ангийн багш

Бодолт ББ-А1. a, b, c тоонуудын ядаж хоёр нь сөрөг, тухайлбал b, c сөрөг бол $2a^2 = b^5 + c^5$ биелэхгүй болно. Иймд a, b, c тоонуудын хувьд хамгийн ихдээ нэг нь л сөрөг байх боломжтой.

- (i) a, b, c бүгд эерэг байг. a, b, c тэгш эрхтэй учир $a \geq b \geq c$ гэж үзэж болно. Эндээс $2a^2 = b^5 + c^5 \leq 2a^5$ буюу $a \geq 1$ болно. Мөн $c^2 = a^5 + b^5 \geq 2c^5$ буюу $c \leq 1$ болно.

Хэрэв $b \geq 1$ бол $2c^2 = a^5 + b^5 \geq 2$ буюу $c \geq 2$ гэж гарна. Иймд $a = b = c = 1$ байхаас өөр боломжгүй юм.

Хэрэв $b \leq 1$ бол $2a^2 = b^5 + c^5 \leq 2$ буюу $a \leq 1$ гэж гарна. Иймд $a = b = c = 1$ байхаас өөр боломжгүй юм.

- (ii) a, b, c тоонуудын яг нэг нь эерэг биш байг. a, b, c тэгш эрхтэй учир $a \geq b \geq 0 \geq c$ гэж үзэж болно. $2(a^2 - b^2) = (b^5 + c^5) - (c^5 + a^5) = b^5 - a^5$ буюу

$$(a - b)(2a + 2b + a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = 0$$

болно. Эндээс $a = b$ эсвэл $a = b = 0$ гэж гарна. $a = b = 0$ үед $c = 0$ болно.

$a = b$ ($a \neq 0$) бол $2a^2 = a^5 + c^5$, $2c^2 = 2a^5$ болох ба эндээс $c^{10} = (2a^2 - a^5)^2 = (a^5)^5$ биелнэ. Эндээс $a^{21} - a^6 + 4a^3 - 4 = 0$ гэж гарна.

$$a^{21} - a^6 + 4a^3 - 4 = (a^3 - 1)(a^{18} + a^{15} + a^{12} + a^9 + a^6 + 4) = 0$$

ба $a \geq 0$ тул $a = 1$ гэж гарна. $c^2 = a^5$ ба $c \leq 0$ тул $c = -1$ болно. Гэвч энэ тохиолдолд $2a^2 = a^5 + c^5$ биелэхгүй учир шийд болохгүй.

Хариу: $(a, b, c) = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0)\}$.

Бодолт ББ-А2. 8^{n+1} тоог k оронтой гэе. Тэгвэл бид $A = 8^n \cdot 10^k + 8^{n+1}$ тоо 2016-д хуваагддаг байх төгсгөлгүй олон натурал n олдоно гэж батлах ёстой болно. $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ ба $n \geq 2$ үед A тоо 2^5 -д хуваагдах нь тодорхой. Мөн дурын натурал n тооны хувьд

$$8^n \cdot 10^k + 8^{n+1} \equiv 8^n + 8^{n+1} \equiv 8^n \cdot 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

тул A тоо нь 9-д хуваагдана.

$k = 6s + 3$ (s нь сөрөг биш бүхэл тоо) үед

$$8^n \cdot 10^k + 8^{n+1} \equiv 10^{6s+3} + 1 \equiv 10^3 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

тул A тоо нь 7-д хуваагдана. Иймд 8^{n+1} тоо нь $6s + 3$ оронтой байх дурын натурал n тооны хувьд A тоо 2016-д хуваагдана. Ийм чанартай n тоо төгсгөлгүй олон олдох нь илт юм. Учир нь n тоо 1-ээр ихсэхэд 8^n тооны оронгийн тоо хамгийн ихдээ 1-ээр ихэснэ.

Бодолт ББ-Б1.

- а) x, y, z нь сондгой тул 4-д хуваахад 1 эсвэл 3 үлдэгдэл өгнө. Иймд Дирихлейн зарчмаар 4-д хуваахад ижил үлдэгдэл өгдөг 2 тоо олдох ба уг 2 тооны үржвэр дээр 1-ийг нэмэхэд 4-д хуваахад 2 үлдэгдэл өгдөг тоо гарна. Энэ тоо нь бүтэн квадрат болж чадахгүй, учир нь тооны квадрат 4-д хуваахад хэзээ ч 2 үлдэгдэл өгөхгүй юм.
- б) Аливаа натурал k тооны хувьд $x = 2k, y = 2k + 2, z = 8k + 4$ нь бодлогын нөхцөлийг хангах тул төгсгөлгүй олон олдох нь батлагдав.

Бодолт ББ-Б2. 1. $n = 2k$ үед бүх орой сайн байхыг баталъя. Үүний тулд эхлээд $2k - 1$ оройтой зөв өнцөгтийг O төвийн хамт авч үзье. O төвөөс оройнууд руу гарах радиусуудыг ялгаатай $2k - 1$ өнгөөр будъя. Тухайлбал, OA_i радиусыг i дүгээр өнгөөр будсан гэж үзье. Түүнд перпендикуляр байх тал, диагоналиудын тоо $k - 1$ ширхэг бөгөөд тэдгээрийг мөн i дүгээр өнгөөр будна. Энэ мэтчилэн будвал бүх тал, диагоналиуд будагдах бөгөөд аль ч оройн хувьд түүнээс эхлэх тал ба диагоналиуд параллель биш байх тул өөр өөр өнгөтэй байна. Одоо O цэг болон $A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}$ оройнуудыг гүдгэр n -өнцөгт үүсэхээр хөдөлгөвөл уг гүдгэр n -өнцөгтийн аль ч оройн хувьд түүнээс эхлэх тал, диагоналиуд өөр өөр өнгөтэй байх болно.

2. $n = 2k + 1$ үед бүх орой сайн байж чадахгүйг баталъя. Хэрэв гүдгэр n -өнцөгтийн тал ба диагоналиудыг $n - 1 = 2k$ өнгөөр орой бүрээс өөр өөр өнгийн хэрчмүүд гардаг байхаар будаж болдог гэж үзвэл 1-р өнгөөр будагдсан тал ба диагоналийн нийт тоо $\frac{2k+1}{2}$ болох ба энэ нь бүхэл биш тул боломжгүй юм. Иймд сайн орой хамгийн олондоо $n - 1$ байна.

Өгсөн $2k + 1$ оройн A оройг түр орхиж үлдсэн $2k$ оройг өгөгдсөн $2k$ өнгийн эхний $2k - 1$ өнгөөр өмнөх 1-р тохиолдлын адил будъя. Тэгвэл A -аас бусад аль ч оройгоос $2 - 1$ ширхэг өөр хоорондоо өөр өнгөтэй хэрчмүүд гарах юм. Одоо эдгээр оройтой A оройг үлдсэн $2k$ дугаар өнгөөр холбовол A -аас бусад бүх орой сайн болох юм. Иймд n сондгой үед сайн орой хамгийн олондоо $n - 1$ байна.

Бодолт ББ-Б3. Хэрэв бүх овоонд тэгш тооны чулуу байвал, аль нэг овооны чулууг дахин хагаслан хуваасаар тэр овоонд сондгой тооны чулууг гарган авч чадна. Тэгэхлээр анхнаасаа 1-р овоонд тэгш тооны чулуу, 2 ба 3-р овоонд сондгой тооны чулуу байсан гэж үзэж болно.

1-р овооны хагасыг 2-р овоонд хийгээд, дараа нь 2-р овооны хагасыг 1-р овоонд хийгээд хийх үйлдлийг “1, 2-р овооны үйлдэл” гэж нэрлэе. Энэ үйлдлийг хийх явцад энэ 2 овооны тэгш тоотой овооны чулууны тоо 4-д хуваагдвал, түүний хагасыг нь 3-р овоо руу хийх үйлдлийг “3-р овооны үйлдэл” гэж нэрлэе. 1, 2-р овооны үйлдэл ба 3-р овооны үйлдлийг бид ямагт хийж чадах бөгөөд 3-р овооны үйлдлийг нэг удаа хийхэд 1 ба 2-р овооны нийт чулууны тоо багасах тул энэ үйлдлийг төгсгөлгүй олон удаа хийж чадахгүй. Тэгэхлээр хэзээ нэгэн цагт, бид дандаа 1, 2-р овооны үйлдлийг хийнэ. Нэгэнт овооны чулуунуудын тоо төгсгөлөг боломжтой тул энэ үйлдлийг дахин дахин давтан хийхэд ямар нэгэн цикл үүсэх ёстой.

Циклийн эхэнд 1-р овоонд a ширхэг чулуу, 2-р овоонд b ширхэг чулуу байсан гэж үзээд, $a = 2b$ гэдгийг баталъя. 1, 2-р овооны үйлдлийг нэг удаа хийхэд 1-р овоонд $a' = \frac{3a}{4} + \frac{b}{2}$ чулуу, 2-р овоонд $b' = \frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ чулуутай болно. Энд $a' - 2b' = \frac{a-2b}{4}$ гэдгийг тэмдэглэе. Тэгэхлээр $a - 2b \neq 0$ үед үйлдлийг хэдэн ч удаа хийсэн $a' - 2b'$ илэрхийлэл нь эргээд хэзээ ч $a - 2b$ -тэй тэнцэхгүй.

1-р овоонд $a = 2b$ чулуу, 2-р овоонд b чулуу байх үед 1-р овооны хагасыг 3-р овоонд хийгээд, дараа нь $2N - 2b$ чулуутай 3-р овооны хагасыг 1-р овоонд хийвэл эхний овоо N чулуутай болно.

Дунд ангийн багш

Бодолт ДБ-А1.

$$\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \right)$$

тул

$$ab + bc + ca + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \right) \leq 6$$

буюу

$$2(ab + bc + ca)(a + b + c) + 3(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$

гэж батлахад хангалттай (энд $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ нөхцөлийг ашиглав). Хялбарчилбал

$$9abc \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$

болох ба энэ нь Кошийн тэнцэтгэл бишээс илэрхий.

Бодолт ДБ-А3. Эхлээд дараах леммийг баталъя.

Лемм. $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots$ нь бүхэл коэффициенттой олон гишүүнт бөгөөд ε нь нэгжийн p зэргийн анхдагч язгуур бол

$$a_0 + a_p + a_{2p} + \dots = \frac{1}{p} (f(1) + f(\varepsilon) + \dots + f(\varepsilon^{p-1}))$$

байна.

Баталгаа. $\sum_{n=0}^{p-1} \varepsilon^{nk} = \begin{cases} p, & \text{хэрэв } p \mid k \\ 0, & \text{эсрэг тохиолдолд} \end{cases}$ гэдгээс хялбархан гарна. $\square$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ гэж үзье. $f(x) := (1 - x^{a_1}) \dots (1 - x^{a_n})$ гэсэн олон гишүүнтийг сонирхё.

$f(x)$ олон гишүүнтийн нэг гишүүнтүүд нь $B = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ үед $(-1)^k x^{a_{i_1} + \dots + a_{i_k}}$ хэлбэртэй гэдгийг анхааръя. Өөрөөр хэлбэл, $(-1)^{|B|} x^{\sum(B)}$ гэсэн үг юм. Тэгэхээр лемм ёсоор $N_{\text{тэгш}} - N_{\text{сондгой}}$ ялгавар нь $\frac{1}{p} (f(1) + f(\varepsilon) + \dots + f(\varepsilon^{p-1}))$ болно.

$f(\varepsilon) = (1 - \varepsilon^{a_1}) \dots (1 - \varepsilon^{a_n})$ билээ. Хэрэв аль нэг $a_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ бол $f(\varepsilon) = \dots = f(\varepsilon^{p-1}) = 0$ байх тул энэ тохиолдолд $N_{\text{тэгш}} - N_{\text{сондгой}} = 0$ юм. Одоо $a_1, \dots, a_n$ тоонууд бүгд p -д хуваагдахгүй гэж үзье.

$$f(\varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon^{a_1}}{1 - \varepsilon} \frac{1 - \varepsilon^{a_2}}{1 - \varepsilon^2} \dots \frac{1 - \varepsilon^{a_{p-1}}}{1 - \varepsilon^{p-1}} \cdot (1 - \varepsilon^{a_p}) \dots (1 - \varepsilon^{a_n}) \cdot (1 - \varepsilon) \dots (1 - \varepsilon^{p-1})$$

гэж бичье. $1 \leq k \leq p-1$ үед $k \pmod{p}$ нь урвуутай хаслага учраас $a_k \equiv kb_k \pmod{p}$ байх $1 \leq b_k \leq p-1$ тоо олдоно. Тэгвэл $\frac{1 - \varepsilon^{a_k}}{1 - \varepsilon^k} = \frac{1 - \varepsilon^{kb_k}}{1 - \varepsilon^k} = 1 + \varepsilon^k + \dots + \varepsilon^{k(b_k-1)}$ гэж бичиж болно. Тэгэхлээр

$$\frac{1 - \varepsilon^{a_1}}{1 - \varepsilon} \frac{1 - \varepsilon^{a_2}}{1 - \varepsilon^2} \dots \frac{1 - \varepsilon^{a_{p-1}}}{1 - \varepsilon^{p-1}} \cdot (1 - \varepsilon^{a_p}) \dots (1 - \varepsilon^{a_n})$$

үржвэрийг бүхэл коэффициенттой ямар нэг $g(x)$ олон гишүүнтийн хувьд $g(\varepsilon)$ гэж үзэж болно.

$(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{p-1}) = p$ байдаг. Энэ нь $\frac{1-x^p}{1-x} = (1 - \varepsilon x) \dots (1 - \varepsilon^{p-1} x)$ илэрхийлэлд $x = 1$ гэж орлуулахад шууд гарна. Үүгээр $f(\varepsilon) = p \cdot g(\varepsilon)$ хэлбэртэй гэж гарлаа. Нэгжийн бусад язгууруудын хувьд ижилхэн $f(\varepsilon^2) = p \cdot g(\varepsilon^2)$, ..., $f(\varepsilon^{p-1}) = p \cdot g(\varepsilon^{p-1})$ байх бөгөөд тэгэхлээр

$$N_{\text{тэгш}} - N_{\text{сондгой}} = g(\varepsilon) + g(\varepsilon^2) + \dots + g(\varepsilon^{p-1})$$

болно. $n > p$ тул $g(x) \div (1 - x)$ буюу $g(1) = 0$ юм. Иймд $N_{\text{тэгш}} - N_{\text{сондгой}} = g(0) + g(\varepsilon) + \dots + g(\varepsilon^{p-1})$ бөгөөд лемм ёсоор энэ нь p -д хуваагдана.

Бодолт ДБ-Б1. $a_0 > b_0$ гэж үзье. Хэрэв $a_n \geq b_n$ бол

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= a_n - b_n - (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}) + \{\sqrt{a_n}\} - \{\sqrt{b_n}\} \\ &= (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} - 1) + \{\sqrt{a_n}\} - \{\sqrt{b_n}\} \geq \{\sqrt{a_n}\} - \{\sqrt{b_n}\} > -1 \end{aligned}$$

буюу $a_{n+1} \geq b_{n+1}$ байна. Цаашилбал, $a_n \geq b_n$ үед $\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor \geq \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor$ байх тул

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n - (\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor - \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor) \leq a_n - b_n$$

болно. Тэгэхлээр эсрэгээс бүх натурал тооны хувьд $a_n - b_n > 0$ гэж үзвэл, ямар нэгэн n дугаараас эхлэн $a_n - b_n = a_{n+1} - b_{n+1} = \dots = c > 0$ байна. Дээр харуулсан тэнцэтгэл бишээр тэр дугаараас эхлэн $\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor = \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor$ байх ёстой.

$\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor = x_n$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $0 \leq y_n \leq 2x_n$ байх y_n тооны хувьд $a_n = x_n^2 + y_n$ байна. Хэрэв $y_n = 0$ буюу a_n нь бүтэн квадрат тоо бол $b_n = a_n - c < a_n = x_n^2$ байх тул $\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor < x_n$ болох ба энэ нь $\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor = \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor$ гэдэгт зөрчинө. Иймд хэрэв бид ямар нэгэн тооны хувьд $y_n = 0$ гэж харуулж чадвал зөрчил үүсэж бодлого бодогдоно.

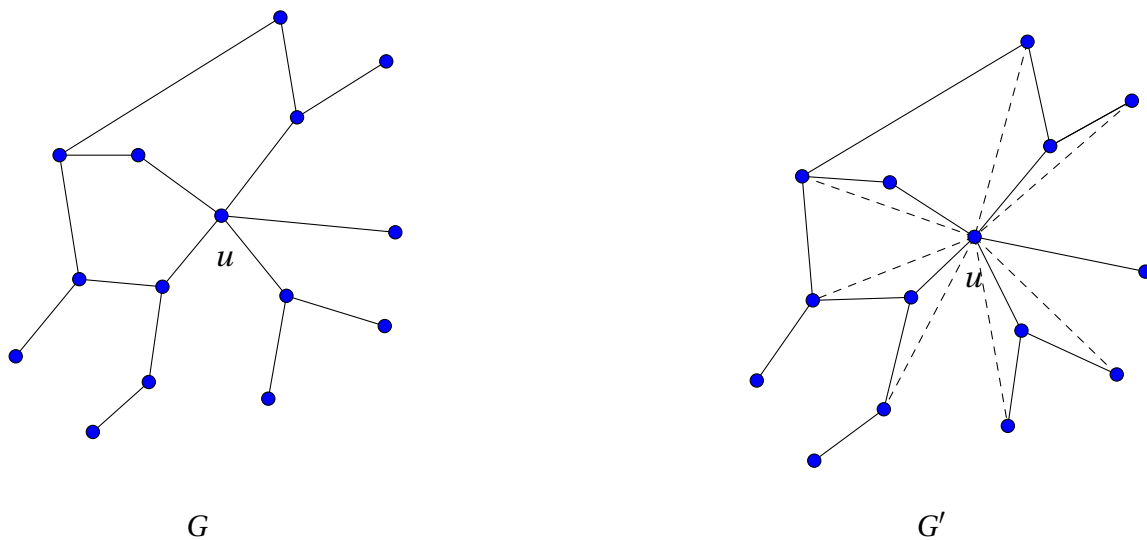
Нэгэнт $\lfloor \sqrt{a_n} \rfloor = \lfloor \sqrt{b_n} \rfloor = x_n$ гэж үзвэл, өгсөн рекуррент харьцаагаар $a_{n+1} = a_n + x_n = x_n^2 + y_n + x_n$ байна. Тэгэхлээр

$$1 \leq y_n \leq x_n \text{ үед } x_{n+1} = x_n, y_{n+1} = y_n + x_n \text{ байна,}$$

$$x_n < y_n \leq 2x_n \text{ үед } x_{n+1} = x_n + 1, y_{n+1} = y_n - x_n - 1 \text{ байна.}$$

Энэ 2 томъёоноос $1 \leq y_n \leq x_n$ үед $x_{n+1} = x_n + 1, y_{n+1} = y_n - 1$ гэж гарах ба нэгэнт y_n нь 1-ээр буурч байгаа тул хэзээ нэгэн цагт $y_{n+k} = 0$ болно. $x_n < y_n \leq 2x_n$ үед Дээрх томъёоноос $0 \leq y_{n+1} < x_{n+1}$ болох ба тэгэхлээр өмнөх дүгнэлтээр бас хэзээ нэгэн цагт $y_{n+k} = 0$ болно.

Бодолт ДБ-Б2. G нь бодлогын нөхцөлийг хангах граф ба u нь түүний бэхлэгдсэн орой байг. u оройтой холбогдсон v оройг сонгон авч v -тэй холбогдсон, харин u оройтой холбогдоогүй бүх оройнуудыг u -тай ирмэгээр холбоё. Энэ үйлдлийг u оройтой холбогдсон бүх оройн хувьд гүйцэтгэхэд үүсэх графыг G' гэж тэмдэглэвэл, G нь 3 ба 4 урттай цикл агуулаагүй тул $d_{G'}(u) = n_G(u)$, энд $d_{G'}(u)$ нь G' графын u оройн зэрэг. (Зураг)



Зураг

Иймд дээрх үйлдлийг бүх оройн хувьд хийхэд үүсэх графад ижил зэргийн ялгаатай 2 орой үргэлж олдох учраас G графад $n_G(u) = n_G(v)$ байх u ба v оройнууд олдоно.

Бодолт ДБ-БЗ. Хариу: n ширхэг $n+1$, бусад нь $-n$ эсвэл n ширхэг $-(n+1)$, бусад нь n .

Өгөгдсөн тоонуудыг $a_1, \dots, a_{2n+1}$ гэж тэмдэглээд модулиараа хамгийн их тоог эерэг гэж үзье. Абсолют хэмжигдэхүүнээрээ n -ээс ихгүй a_k тоог сонгон авъя. Энэ тоо эхний гишүүн нь байх $\{\sigma_i\}_{i=1}^{2n+1}$ дарааллыг $\sigma_{i+1} = \sigma_i + a_{i_k}$ дүрмээр байгуулъя. Энд, a_{i_k} нь $\sigma_i a_{i_k} < 0$ байх тоо бөгөөд нийт тоонуудын нийлбэр тэг тул σ_i ($2n \geq i \geq 1$) бүрийн хувьд энэ чанартай a_{i_k} сонгон авч чадна. Байгуулалтаас $|\sigma_{i+1}| \leq \max\{|\sigma_i|, |a_{i_k}|\} - 1$ (*) гэж мөрдөх тул дурын i -ийн хувьд индукцээр $|\sigma_i| \leq n$ байна.

Өгөгдсөн тоонуудын нийлбэр тэг, аль ч хэдийнх нь нийлбэр тэг биш тул $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{2n+1}\}$ олонлог $\{-n, \dots, 0, 1, \dots, n\}$ олонлогтой тэнцэнэ. Иймд $|\sigma_{i+1}| = n$ байх i дугаар олдох бөгөөд энэ үед $\sigma_i = -1$ ба $a_{i_k} = n+1$. Мөн $\sigma_{j+1} = -n$ байх j дугаар олдох ба a_{j_k} нь $-(n+1)$ -тэй тэнцэх боломжгүй тул $\sigma_1 = -n$ байхаас өөр боломжгүй юм. Иймд a_i бүр $-n$ эсвэл $n+1$ -тэй тэнцүү бөгөөд $(n, n+1) = 1$ тул өгөгдсөн тоонуудын n ширхэг нь $n+1$, $n+1$ ширхэг нь $-n$ байна.

Хичээлүүд

Комбинатор тооны онол

Г. Баярмагнай (МУИС)

Оршил

Бидний сайн мэдэх бодлогууд болон тэдгээрийн хувилбаруудаар дамжуулан "Комбинатор тооны онол" сэдвийн талаар ойлголт өгөх нь энэ лекцийн үндсэн зорилго юм. Энэ зорилгоор бид алгебрлаг арга, техникээс илүүтэй комбинаторикийн техникүүдийг хэрэглэвэл илүү оновчтой шийдэгдэх тооны онолын бодлогуудтай танилцана.

Бүхэл (рационал) тоонууд дээр биелэх ерөнхий зүй тогтол болон арифметик шинж чанар нь хүнээс үл хамааран оршин байгаа билээ. "Комбинатор Тооны Онол" сэдвийн хүрээнд комбинаторикийн арга, техникүүдтэй зохицон хосолдог тэрхүү нууцлаг зүй тогтол, шинж чанарыг эрж хайдаг. Урт хугацаанд үргэлжилж буй эрэл хайгуулын үр дүнд бид олон зүйлийг мэддэг болсон. Тухайлбал: Рационал тоо үелэх тухай, Эрдеш-Зив-Гинзбургийн теорем, Алоны теорем гэх мэт. Гэсэн хэдий ч өнөөг хүртэл шийдлээ хүлээж буй олон сонирхолтой асуудал байсаар байгаа.

Комбинатор тооны онолд хамаарах олимпиадын төрлийн тун сонирхолтой бодлогууд түгээмэл байдаг. Тэдгээр бодлогууд комбинаторикийн дараах сэдвүүдэд голлон хамардаг. Үүнд:

1. Дирихлейн зарчим
2. Нэгтгэн зайлуулах зарчим
3. Олонлогийн хуваалт
4. Үүсгэгч функц
5. Инвариант (тэгш-сондгой, тэгш хэм гэх мэт)
6. Граф
7. Харгалзаа (хоёр аргаар тоолох гэх мэт)

Олимпиадын төрлийн бодлогууд дунд комбинатор тооны онолын сэдэвт хамаардаг тун сонирхолтой бодлогууд нилээд олон тааралддаг бөгөөд онолын судалгаанд математикчидийн анхаарлыг татдаг өнөөг хүртэл шийдэгдээгүй алдартай асуудлууд ч цөөнгүй байдаг. Энэхүү сэдвийг бидний сайн мэдэх жишээ бодлогуудаар дамжуулан тайлбарлах нь өнөөдрийн лекцийн үндсэн зорилго юм.

Дирихлейн зарчим

Жишээ 1. Өгөгдсөн a_1, a_2, a_3 бүхэл тоонуудын хувьд $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ нийлбэр 7-д хуваагддаг байхаар бүгд нэгэн зэрэг тэг биш $b_1, b_2, b_3 \in \{-1, 0, 1\}$ тоонууд олдоно гэж батал.

Эхлээд Дирихлейн зарчмаар бодъё.

Бодолт. Энд $0, a, b, c, a+b, b+c, c+a, a+b+c$ гэсэн найман тооны 7-д хуваахад гарах үлдэгдлүүдийг сонирхоход хангалттай. Үнэндээ, ижил үлдэгдэл өгөх 2 тооны ялгавар бодлогод шаардсан хэлбэртэй байх бөгөөд 7-д хуваагдана. $\square$

Одоо энэ бодлогыг алгебрын хэлэнд хэрхэн томъёолж, бодож болохыг сонирхоё.

Жишээ 2. a, b, c бүхэл тоонуудын аль нь ч 7-д хуваагдахгүй бол

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)$$

үржигдэхүүн 7-д хуваагдана.

Бодолт. Дээрх үржигдэхүүнийг S -ээр тэмдэглэж хувиргая:

$$\begin{aligned} S &= (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(c^2 - (a+b)^2)(c^2 - (a-b)^2) \\ &= (c^4 - c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2)(c^4 - 2c^2(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2). \end{aligned}$$

Фермагийн бага теоремоор $c^6 \equiv 1 \pmod{7}$ байх тул хялбар тооцоогоор

$$S \equiv c^2(1 + a^2b^2(a^2 + b^2)) - 2(a^2 + b^2 + a^4b^4) \pmod{7}$$

болно. Хэрэв $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{7}$ бол S нь 7-д хуваагдах нь тодорхой. Иймд $a^6 \equiv b^6 \equiv 1 \pmod{7}$ гэдгээс

$$a^2 + b^2 + a^4b^4 \equiv 1 + a^2b^2(a^2 + b^2) \equiv 0 \pmod{7}$$

мөрдөнө. Эндээс $S \equiv 0 \pmod{7}$. $\square$

Жишээ 1-ийг бодоход дээрх комбинаторик болон алгебрлаг аргын аль нь илүү тохиромжтой, оновчтой болохыг харахын тулд дараах бодлогыг сонирхож үзээрэй. Бид энд алгебрлаг аргаар бодох нь хүнд гэж батлахыг зориогүй болно.

Бодлого ДБ-ВЗ. Өгөгдсөн $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ бүхэл тоонуудын хувьд $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{11}b_{11}$ нийлбэр 2015-д хуваагддаг байхаар бүгд нэгэн зэрэг тэг биш $b_1, b_2, \dots, b_{11} \in \{-1, 0, 1\}$ тоонууд олдоно гэж батал.

Энэ бодлого Дирихлейн зарчмаар хялбархан бодогдох боловч өмнөхтэй адил алгебрлаг аргаар бодоход нилээд хүнд юм. Одоо энэ бодлогыг ерөнхий тохиолдолд томъёолж бодолтон дээр нь анализ хийцгээе.

Жишээ 4. Өгөгдсөн натурал n тооны хувьд дараах чанартай натурал k тооны авч болох бүх утгыг тодорхойл. Дурын бүхэл $a_1, a_2, \dots, a_n$ тоонуудын хувьд $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ нийлбэр k -д хуваагддаг байхаар бүгд нэгэн зэрэг тэг биш $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{-1, 0, 1\}$ тоонууд олддог.

Бодолт. Дирихлейн зарчмаар k нь 2^n -ээс бага бүх натурал тоон утгыг авч болох нь тодорхой. k нь 2^n -ээс багагүй бол $a_i = 2^{i-1}$ гэж сонгон авъя. Тэгвэл $b_1 + 2b_2 + \dots + 2^{n-1}b_n$ хэлбэрийн тоонууд 2^n -ээс бага бөгөөд b_i тоонууд бүгд нэгэн зэрэг тэг үед л тэг байх тул энэ хэлбэрийн тоонууд k -д хуваагдахгүй. $\square$

Жишээ 5. Үржвэр нь 3-д хуваагддаггүй гурван бүхэл тоо өгөв. Тэгвэл аль нэг хоёрынх нь эсвэл бүгдийнх нь нийлбэр 3-д хуваагдана гэдгийг батал.

Эхлээд алгебр аргаар бодъё.

Бодолт. Өгсөн гурван тоог a, b, c -ээр тэмдэглэж, бодлогыг эсрэгээс нь үзье. Ямар ч бүтэн квадратыг 3-т хуваахад 0 эсвэл 1 үлдэгдэл өгөх тул

$$ab + bc + ac \equiv (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b + c)^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Нөгөө талаас

$$2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

байх тул зөрчил гарна. $\square$

Бодолт. Харин энэ бодлогыг 0, $a, a + b$ ба $a + b + c$ дөрвөн тооны 3-т хуваахад гарах үлдэгдлүүдийн хувьд Дирихлейн зарчмыг хэрэглэн тун хялбархан бодож болно. Энэ бодлогын ерөнхийлөл ч мөн энэ санаагаар хялбархан бодогдоно. $\square$

Жишээ 6. Дурын n ширхэг бүхэл тоон дотроос нийлбэр нь n -д хуваагдах хэдэн тоог сонгон авч болно.

Бодолт. $a_1, a_2, \dots, a_n$ бүхэл тоонууд байг. $S_0, S_1, \dots, S_n$ тоонуудыг n -д хуваахад гарах үлдэгдлүүдийн хувьд Дирихлейн зарчим хэрэглэснээр бодлого бодогдоно. Энд $S_0 := 0$ ба $S_j := \sum_{i=1}^j a_i$. $\square$

Жишээ 7. Самбарт тус бүр нь n -ээс бага n ширхэг натурал тоог бичсэн байв. Нийлбэр нь n -д хуваагддаг хэдэн тоог самбараас цор ганц аргаар сонгон авч болдог бол самбарт бичигдсэн бүх тоо ижил гэдгийг батал.

Бодолт. Өгөгдсөн n тоог $a_1, a_2, \dots, a_n$ гэж тэмдэглэе. Нийлбэр нь n -д хуваагдах тоонуудын нэгийг нь a_1 гэж үзэхэд явцуурахгүй. $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ -ээр

$$a_2 + (a_2 + a_3) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_2 + \dots + a_n)$$

нийлбэрийг тэмдэглэе. Өгөгдсөн нөхцөл болон a_1 -ийн сонголтоос энэ нийлбэрийн $n - 1$ ширхэг нэмэгдэхүүнүүд n -д хуваагдахад бүгд ялгаатай үлдэгдэл өгнө гэж дүгнэж

болно. Иймд $S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv n(n-1)/2 \pmod{n}$ болно. a_{n-1}, a_n тоонууд n -ээс бага бөгөөд

$$a_n - a_{n-1} = S(a_2, \dots, a_n, a_{n-1}) - S(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \equiv 0 \pmod{n}$$

болох буюу эндээс $a_2, a_3, \dots, a_n$ тоонууд бүгд тэнцүү гэж мөрдөнө. Нийлбэр нь n -д хуваагдах хэсэг тоог цор ганц аргаар сонгож болох тул нийт тоонуудын нийлбэр n -д хуваагдана. Иймд бүх тоонууд тэнцүү байхаас өөрцгүй. $\square$

Шигтгээ

Жишээ 8. Рациональ тооны аравтын бутархай дүрслэл үетэй.

$\frac{p}{q}$ рациональ тооны аравтын бутархай дүрслэлийг $\overline{a, a_1 a_2 \dots}$ гэе. Энд a_i нь цифр, a нь бүхэл тоо.

Бодолт. Арифметикийн үндсэн теоремоор $p = aq + p_1$ ба $0 \leq p_1 < q$ байх p_1, i дугаар бүрийн хувьд

$$10p_i = a_i q + p_{i+1} \text{ ба } 0 \leq p_{i+1} < q \quad (0.3)$$

байх p_{i+1} олдоно. Аль нь ч q -ээс бага бөгөөд эерэг тул $p_1, \dots, p_{q+1}$ тоонууд дотор тэнцүү хоёр тоо Дирихлейн зарчмаар олдоно. Эдгээрийг $p_s = p_{k+s}$ гэвэл (1)-ээс $a_s = a_{k+s}$ ба $p_{s+1} = p_{k+s+1}$ гэж мөрдөнө. Иймд индукцээр $i \geq s$ үед $a_i = a_{k+i}$ болох буюу $\frac{p}{q}$ үетэй гэдэг нь мөрдөнө. $\square$

Мөн Эйлерийн теорем ашиглан бодож бодно.

Бодолт. q -ийн 10-тай харилцан анхны хамгийн их хуваагчийг q_1 -ээр, $v_2(q)$ ба $v_5(q)$ тоонуудын хамгийн ихийг s -ээр тэмдэглэе. Эйлерийн теоремоор $10^k \equiv 1 \pmod{q_1}$ байх натурал тоо k олдоно. Ийм чанартай хамгийн бага k -ийн хувьд

$$\frac{p}{q}(10^k - 1)10^s = \overline{aa_1 \dots a_{k+s}, a_{k+s+1} \dots} - \overline{aa_1 \dots a_s, a_{s+1} \dots}$$

тоо бүхэл юм. Иймд дурын $i \geq s+1$ дугаар бүрийн хувьд $a_{k+i} = a_i$ болох буюу өгсөн бутархай үетэй гэдэг нь мөрдөнө. $\square$

Дээрх алгебрлаг аргын тусламжтайгаар илүү тодорхой үр дүнд хүрч болно. Тухайлбал ямар ч рациональ бутархайн үеийг олж болно.

Теорем. $q > p > 0$ байх p ба q натурал тоонууд өгөгдөв. p/q бутархай таслалаас хойшхи $\max(v_2(q), v_5(q)) + 1$ дугаартай орноос эхлэн үелэнэ. Хэрэв $(q, 10) = 1$ бол бутархайн үеийн урт нь $(10^k - 1)/q$ ногдвор бүхэл байх хамгийн бага k тоотой, үе нь $\frac{p(10^k - 1)}{q}$ тоотой тэнцүү байна.

Баталгаа. Өгсөн бутархайг үетэй гэж мэдэх тул таслалаас хойшхи $m+1$ дугаартай орноосоо эхлэн үелдэг бөгөөд үеийг нь $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ гэсэн n оронтой тоо гэж үзье. Тэгвэл дээрх бодолтоос $m \leq s$ ба $n \leq k$ гэж мөрдөнө.

$$\frac{p}{q} 10^{n+m} - \frac{p}{q} 10^m$$

ялгавар бүхэл тоо байх тул $q \mid 10^m(10^n - 1)$ гэдгээс $\max(v_2(q), v_5(q)) \leq m$ буюу $m = s$ болно. Иймд q нь 10-тай харилцан анхны бол $m = 0$ байх ба дээрх ялгавар $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ -тэй тэнцүү юм. Түүнчлэн $(10^n - 1)/q$ нь бүхэл гэдгээс $n \geq k$ буюу $n = k$ болно. $\square$

1. Жишээ болгон $\frac{68}{7}$ бутархайн үеийг олъё. $\frac{66}{7} = 9 + \frac{5}{7}$ тул $\frac{5}{7}$ бутархайн үеийг олоход хангалттай. $10^k \equiv 1 \pmod{7}$ байх хамгийн бага $k = 6$ нь юм. Иймд теоремоор $\frac{5}{7}$ бутархай таслалаас хойшхи эхний орноосоо эхлэн үелэх бөгөөд үе нь

$$\frac{5}{7}(10^6 - 1) = 714285$$

байх ёстой.

2. Одоо $\frac{3}{28}$ бутархайг сонирхоё. Өгсөн бутархайн үеийг олох нь $10^2 \times \frac{5}{28} = \frac{75}{7}$ буюу $\frac{5}{7}$ бутархайн үеийг олохтой адил юм. Дээрх теоремоор өгсөн тоо таслалаас хойшхи 3 дугаар орноосоо эхлэн үелэх бөгөөд үе нь 714285 юм.

Тоолох арга

Фермагийн бага теоремоор ямар ч x -ийн хувьд $x^{p-1} \equiv 0$ or $1 \pmod{p}$ байх тул ямарваа нэг зүйлийг тоолоход ашиглаж болно. Мөн энэ санааг ашигласан Жишээ 4-ийн бодолтыг харна уу.

Жишээ 9. Дурын 5 ширхэг бүхэл тоон дотроос нийлбэр нь 3-д хуваагдах 3 ширхэг тоог сонгон авч болно.

Эхлээд комбинаторикийн аргаар бодъё.

Бодолт. Өгөгдсөн тоонуудыг a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 гэж тэмдэглэе. $S_{ijk} := a_i + a_j + a_k$ нийлбэрийг тодорхойлъя. Хэрэв S_{ijk} нь 3-д хуваагдахгүй бол $S_{ijk}^2 \equiv 1 \pmod{3}$ байна. Иймд аль ч 3 тооны нийлбэр 3-д хуваагдахгүй бол

$$\sum_{i,j,k} S_{ijk}^2 \equiv C_5^3 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Нөгөө талаас тооцвол, зүүн талын нийлбэрт a_i^2 бүр $C_4^2 = 6$, $2a_i a_j$ бүр $C_3^1 = 3$ ширхэг оролцсон. Иймд дээрх нийлбэр 3-д хуваагдах болж зөрчил гарна. $\square$

Одоо алгебрын аргаар бодъё. Дараах теоремийг санъя.

Теорем (Chevalley–Warning). Бүхэл коэффициенттэй $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $(i = \overline{1, r})$, гэсэн олон гишүүнтүүд өгөгдөв. Хэрэв $n > \sum_{i=1}^r \deg(f_i)$ бол

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p} \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p} \\ \vdots \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

систем тэгшитгэлийн шийдийн тоо p -д хуваагдана. Тухайн тохиолдолд, хэрэв $f_1, f_2, \dots, f_r$ олон гишүүнтүүд тогтмол гишүүнгүй бол систем дор хаяад p ширхэг шийдтэй.

Бодолт. Chevalley–Warning-ийн теоремоор

$$\begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2 \equiv 0 \pmod{3} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

систем тэгшитгэл шийдтэй. 2-р тэгшитгэлээс аль нэг 2 нь тэг, нөгөө гурав нь тэг биш гэж мөрдөнө. Иймд 1-р тэгшитгэлээс тэг биш хувьсагчдад харгалзах гурван тооны нийлбэр 3-т хуваагдана гэж гарна. $\square$

Эцэст нь Дирихлейн зарчим хэрэглэн бодъё.

Бодолт. 5 тоон дотор 3-т хуваахад 0, 1, 2 үлдэгдэл өгдөг тоонууд байвал уг гурван тооны нийлбэр 3-т хуваагдана. Эсрэг тохиолдолд ижил үлдэгдэл өгдөг гурван тоо олдоно. $\square$

Жишээ 10. Дурын $2p - 1$ ширхэг бүхэл тоон дотроос нийлбэр нь p -д хуваагдах p ширхэг тоог сонгон авч болно.

Бодолт. Өгөгдсөн тоонуудыг $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ гэж тэмдэглэе. Эдгээр тоонуудаас бүрдэх олонлогийн p элементтэй A дэд олонлог бүрийн хувьд

$$S_A = \sum_{a \in A} a$$

нийлбэрийг тодорхойлъё. $S_A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $\square$

Жишээ 11. (Эрдеш-Зив-Гинзбург) Дурын $2p - 1$ ширхэг бүхэл тоон дотроос нийлбэр нь p -д хуваагдах p ширхэг тоог сонгон авч болно.

Бодолт. Өгөгдсөн тоонуудыг $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ гэж тэмдэглэе. Эдгээр тоонудуудаас бүрдэх олонлогийн p элементтэй A дэд олонлог бүрийн хувьд

$$S_A = \sum_{a \in A} a$$

нийлбэрийг тодорхойлъё. $S_A^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $\square$

Жишээ 12. Сондгой p анхны тоо өгөгдөв. Натурал тоон A олонлогийн тоонуудыг p -д хуваахад гарах ялгаатай үлдэгдэлүүдийн олонлогийг A_p гэж тэмдэглэе. Хамгийн бага ямар n тооны хувьд $|A| = n$ бөгөөд $|A_p| = p - 1$ байх ямар ч A олонлогт нийлбэр нь p -д хуваагдах p ширхэг ялгаатай тоо заавал олдох вэ?

Бодолт. $p + 1$ элементтэй $A = \{1, 2, \dots, p - 1, p + 1, 2p - 1\}$ олонлогийн хувьд $|A_p| = p - 1$ байна. Энэ олонлогийн нийт элементтүүдийн нийлбэр p -д хуваагдах тул өгсөн нөхцлийг биелүүлэх p элементийг A олонлогоос сонгон авч чадахгүй. Иймд $n \geq p + 2$.

Одоо $a, b, c, a_1, a_2, \dots, a_{p-1} \in A$ бөгөөд $a_i \not\equiv a_j \pmod{p}$ гэе. S -ээр $a + b + c + \sum a_i$ нийлбэрийг тэмдэглэе. Хэрэв $B = \{a + a_1, a + a_2, \dots, a + a_{p-1}\}$ олонлогийн ямар нэг элемент S -тэй $\pmod{p}$ -ээр ижил үлдэгдэл өгөх бол бодлого бодогдоно. Эсрэг тохиолдолд $B \cup \{S\} = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ байна. Иймээс

$$b + c + 2 \sum a_i \equiv 0 \pmod{p}$$

болно. Үүнтэй адилаар $a + c + 2 \sum a_i \equiv 0 \pmod{p}$ болох буюу $a \equiv b \pmod{p}$ гэж мөрдөнө. Иймд $\sum_{i=1}^{p-1} a_i + a \equiv 0 \pmod{p}$ болж бодлого бодогдов. $\square$

Дасгалууд

Дасгал 1. (IMO-2003 C1) A нь $S = \{1, \dots, n\}$ олонлогийн k элементтэй дэд олонлог бөгөөд m нь $n > (m - 1) \binom{k}{2} + 1$ байх натурал тоо байг. Тэгвэл $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$, $j = 1, \dots, m$, олонлогууд хос хосоороо үл огтлолцох байхаар $t_1, \dots, t_m \in S$ олдохыг батал.

Дасгал 2. A нь $\{1, \dots, 100\}$ олонлогийн дэд олонлог. A -ийн аль ч 2 элементийн хувьд $2x \neq y$ биелдэг. A -д хамгийн ихдээ хэдэн элэмэнттэй байж болох вэ?

Дасгал 3. Самбарт 2^n ширхэг тоог цувуулан бичив. Бичигдсэн тоо бүр n -ээс хэтрэхгүй бол үржвэр нь бүтэн квадрат байх дараалан бичигдсэн хэдэн тоо олдохыг батал.

Дасгал 4. [Putnam-1999 B6] Натурал тоо n бүрийн хувьд $s | n$ эсвэл $(s, n) = 1$ байх $s \in S$ олддог чанартай 1-ээс их бүхэл тоонуудаас тогтох төгсгөлөг олонлог S өгөгдөв. Тэгвэл S олонлог анхны тоо эсвэл ХИЕХ нь анхны тоо байх хоёр элемент агуулахыг батал.

Дасгал 5. $a_1, \dots, a_n$ ба $\epsilon > 0$ бодит тоонууд өгөгдөв. Бүх i дугаарын хувьд $|pa_i m_i| < \epsilon$ биелдэг байхаар m_i ба $p > 0$ бүхэл тоонууд олдохыг үзүүл.

Дасгал 6. (Putnam 2006/B2) X нь n ширхэг элементтэй бодит тоон олонлог. Тэгвэл

$$|m + \sum_{s \in S} s| \leq \frac{1}{n + 1}$$

байх X ийн дэд олонлог S ба бүхэл тоо m олдохыг батал.

Дасгал 7. [IMO-2011 C2] Аль ч гишүүн нь 0 эсвэл 1 байх $a_1, \dots, a_{1000}$ дараалал өгөгдөв. $S_k(i)$ -ээр

$$a_i + \dots + a_{k+i-1}$$

нийлбэрийг тэмдэглэе. Энд $a_{i+1000} = a_{i1000} = a_i$. Тэгвэл $S_k(i) = S_k(k+i)$ байх k тоо ($100 \leq k \leq 300$) болон i дугаар олдохыг үзүүл.

Дасгал 8. Самбарт $n^2 + 1$ ширхэг бодит тоонуудыг дараалуулан бичив. Энэ дараалалд $n + 1$ урттай өсдөг эсвэл буурдаг дэд дараалал олдохыг үзүүл.

Дасгал 9. Төгсгөлгүй дарааллаас өсдөг төгсгөлгүй эсвэл буурдаг төгсгөлгүй дэд дараалал олдохыг батал.

Дасгал 10. (IMO-2012 C1) Нэг мөрөнд бичигдсэн хэсэг эерэг бүхэл тоонууд өгөгдөв. x нь y -ийн зүүн талд байрлах ба $x > y$ байх хөрш x ба y тоонуудын хувьд (x, y) хосыг $(y + 1, x)$ эсвэл $(x1, x)$ хосоор солих үйлдэл зөвшөөрөгдөв. Өгөгдсөн тоонуудын хувьд зөвшөөрөгдсөн үйлдлийг төгсгөлөг удаа л гүйцэтгэх боломжтой гэж үзүүл.

Дасгал 11. (IMO-2012 C2) $n1$ бүхэл тоо. $\{1, 2, \dots, n\}$ олонлогийн дараах чанартай үл огтлолцох хосуудын тоо хамгийн ихдээ хэд байх вэ? Үүнд:

1. Аль ч хосын нийлбэр n -ээс хэтрэхгүй.
2. Ялгаатай хосуудын нийлбэр ялгаатай.

Диофант тэгшитгэл

Ү. Отгонбаяр (МУИС)

Оршил

Диофант нь манай эрний өмнөх 350-250 оны хооронд амьдарч байсан Александриагийн математикч бөгөөд алгебрийн эцэг гэж нэрлэгддэг. Тэрээр алгеблаг тэгшитгэл, тооны онолын судалгаагаараа алдартай. Бид

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

хэлбэртэй тэгшитгэлийг Диофантын тэгшитгэл гэх бөгөөд энэ тэгшитгэлийг хангадаг бүхэл $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ тоонуудыг уг тэгшитгэлийн *шийд* гэнэ.

Диофант тэгшитгэл боддог олон арга байдаг дотроос энэ удаагийн хичээлээр жишлэг ашиглах аргийн тухай үзнэ.

Юуны өмнө алгебрийн үндсэн теоремийг санъя.

Теорем (Алгебргийн үндсэн теорем). *Дурын эерэг бүхэл тоо нь анхны тооны үржвэрт нэг утгатай тавигдана.*¹

$n \geq 2$ нь натурал тоо болог. Тэгвэл $a, b \in \mathbb{Z}$ бүхэл тоонуудын хувьд хэрэв $a - b$ нь n -д хуваагддаг бол $a \equiv b \pmod{n}$ гэж тэмдэглэдэг билээ. Дараах чанаруудыг бүгд мэдэх биз.

Теорем. $n \geq 2$ болог. Хэрэв $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ бөгөөд $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$ бол $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{n}$ ба $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{n}$ байна.

Теорем (Фермагийн жижиг теорем). Хэрэв p нь анхны тоо бөгөөд $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ бол $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ байна.

Теорем (Эйлериийн теорем). $p \equiv 3 \pmod{4}$ байх анхны тоо болог. Хэрэв $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ бол $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ байна.

Мөрдлөгөө (Эйлериийн теорем). $a^2 + 1$ хэлбэрийн тоо нь 4 жишлэгээр 3 гардаг хуваагчгүй. Тухайлбал $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ тэгшитгэл шийдгүй.

Жишээнүүд

Маш хялбар жишээнүүдээс эхэлье. Доорх жишээнүүд болон дасгалуудын ихэнхийг

T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, “An introduction to Diophantine equations”, Birkhäuser Verlag, New York 2010

¹Үржигдэхүүний байрыг сольсоныг тооцохгүй.

номноос ашиглав.

Жишээ 1. $x^2 + 1 = 4y$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $(\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{4}$ тул x^2 нь 4 жишлэгээр зөвхөн 0 эсвэл 1 утга авна. Иймд $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ тэгшитгэл шийдгүй. Эндээс анхны тэгшитгэл маань шийдгүй болно. $\square$

Жишээ 2. $x^2 + 1 = 7y$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. Эйлэрийн теоремоос мөрдөн гарна. Мөн шууд шалгахад ч төвөггүй. $0^2 \equiv 0 \pmod{7}$, $(\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$, $(\pm 2)^2 \equiv 4 \pmod{7}$, $(\pm 3)^2 \equiv 2 \pmod{7}$ тул x^2 нь 7 жишлэгээр зөвхөн 0, 1, 2 эсвэл 4 гэсэн утга авна. Иймд $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ тэгшитгэл шийдгүй. Эндээс анхны тэгшитгэл маань шийдгүй болно. $\square$

Жишээ 3. $x^2 + 4 = 16y$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. 16 жишлэгээр

$$\begin{array}{lll} 0^2 \equiv 0 & (\pm 1)^2 \equiv 1 & (\pm 2)^2 \equiv 4 \\ (\pm 3)^2 \equiv 9 & (\pm 4)^2 \equiv 0 & (\pm 5)^2 \equiv 9 \\ (\pm 6)^2 \equiv 4 & (\pm 7)^2 \equiv 1 & (\pm 8)^2 \equiv 0 \end{array}$$

тул x^2 нь 16 жишлэгээр зөвхөн 0, 1, 4 эсвэл 9 гэсэн утга авна. Иймд $x^2 + 4 \equiv 0 \pmod{16}$ тэгшитгэл шийдгүй. Эндээс анхны тэгшитгэл маань шийдгүй болно.

Дээрх жишлэгийг арай хялбараар тооцож болно. Учир нь $(8 \pm a)^2 \equiv a^2 \pmod{16}$ байна. Иймд зөвхөн 0^2 , $(\pm 1)^2$, $(\pm 2)^2$, $(\pm 3)^2$ болон $(\pm 4)^2$ -г 16-аар жишихэд хангалттай. $\square$

Жишээ 4. (Балкан) $x^2 = y^5 - 4$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. 11 жишлэгээр бодъё. Фермагийн теоремоор эсвэл $y \equiv 0 \pmod{11}$ эсвэл $y^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ байна, иймд y^5 нь 11 жишлэгээр 0, ± 1 утгууд авах боломжтой. (Бид ийм ч учираас 11-ээр жишсэн). Иймд $y^5 - 4$ нь 11 жишлэгээр 6, 7 эсвэл 8 утгуудыг авах боломжтой. Нөгөө талаас 11 жишлэгээр

$$\begin{array}{lll} 0^2 \equiv 0 & (\pm 1)^2 \equiv 1 & (\pm 2)^2 \equiv 4 \\ (\pm 3)^2 \equiv 9 & (\pm 4)^2 \equiv 5 & (\pm 5)^2 \equiv 3 \end{array}$$

тул x^2 нь 11 жишлэгээр зөвхөн 0, 1, 3, 4, 5 эсвэл 9 утгуудыг авна. Иймд дээрх тэгшитгэл шийдгүй. $\square$

Жишээ 5. $x^3 + y^4 = 7$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. 13 жишлэгээр бодъё. Тэгвэл

$0^2 \equiv 0$	$0^3 \equiv 0$	$0^4 \equiv 0$
$(\pm 1)^2 \equiv 1$	$(\pm 1)^3 \equiv \pm 1$	$(\pm 1)^4 \equiv 1$
$(\pm 2)^2 \equiv 4$	$(\pm 2)^3 \equiv \pm 5$	$(\pm 2)^4 \equiv 3$
$(\pm 3)^2 \equiv -4$	$(\pm 3)^3 \equiv \pm 1$	$(\pm 3)^4 \equiv 3$
$(\pm 4)^2 \equiv 3$	$(\pm 4)^3 \equiv \pm 1$	$(\pm 4)^4 \equiv 9$
$(\pm 5)^2 \equiv -1$	$(\pm 5)^3 \equiv \pm 5$	$(\pm 5)^4 \equiv 1$
$(\pm 6)^2 \equiv -3$	$(\pm 6)^3 \equiv \pm 5$	$(\pm 6)^4 \equiv 9$

байна. Иймд $7 - x^3$ нь 2, 6, 7, 8 эсвэл 12 утгуудыг авна, харин y^4 нь 0, 1, 3 эсвэл 9 утгуудыг авна. Эндээс тэгшитгэл шийдгүй болно. $\square$

Одоо Эйлерийн теорем ашиглаж бодъё.

Бодолт. Эхлээд $7 = 2^3 - 1^4$ гэж бичье.

Эсрэгээс нь шийдтэй гэе. Тэгвэл $y^4 + 1 = 2^3 - x^3 = (2 - x)(2^2 + 2x + x^2)$ болно. Хэрэв x нь тэгш бол $y^4 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ болж Жишээ 1-д харшилна. Хэрэв $x \equiv 1 \pmod{4}$ бол $2^2 + 2x + x^2 \equiv 3 \pmod{4}$ болно. Хэрэв $x \equiv 3 \pmod{4}$ бол $2 - x \equiv 3 \pmod{4}$ болно. Аль ч тохиолдолд Мөрдлөгөө -т харшилна.

Энэ бодолтоос $x^3 + y^2 = 7$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй болох нь гарна. $\square$

Жишээ 6. $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2015)^2 = y^2$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. Эсрэгээс нь (x, y) гэсэн шийдтэй гээд $z := x + 1008$ гэе. Тэгвэл $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2015)^2 = (z-1007)^2 + (z-1006)^2 + \dots + z^2 + (z+1)^2 + \dots + (z+1007)^2 = 2015z^2 + 2 \cdot \frac{1007 \cdot 1008 \cdot 2015}{6} = 2015z^2 + 1007 \cdot 336 \cdot 2015$ болно.

3-аар жишвэл $2015z^2 + 1007 \cdot 336 \cdot 2015$ нь 0 эсвэл 2, харин y^2 нь 0 эсвэл 1 утга авах боломжтой тул $y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}$ байх ёстой. Гэтэл $1007 \cdot 336 \cdot 2015 = y^2 - 2015z^2$ нь 9-д хуваагдахгүй тул зөрчил болно. Иймд бидний тэгшитгэл шийдгүй.

Сүүлийн хэсэгт 3-ийн оронд 5-аар жишиж болно (дасгал). $\square$

Жишээ 7. (АНУ1979.1) $x_1^{14} + x_2^{14} + \dots + x_{14}^{14} = 1599$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Бодолт. Жишээ 3-ийн бодолтоос x^4 нь 16 жишлэгээр зөвхөн 0 эсвэл 1 утга авах боломжтой. Нөгөө талаас $15999 \equiv 15 \pmod{16}$ тул илэрхий. $\square$

Жишээ 8. (Орос1997.(4 даваа, 8 анги).7) $p^3 - q^5 = (p+q)^2$ байх бүх анхны тоо p, q -г ол.

Бодолт. $p = 7$, $q = 3$ нь шийд болохыг хялбархан шалгаж болно. Өөр шийдгүй болохыг харуулъя. Юуны өмнө хэрэв $q = 3$ бол $p^3 - p^2 - 9p = 252$ болох тул $p \mid 252$ болох ба эндээс зөвхөн $p = 7$ шийд болно. Хэрэв $p = 3$ бол $2^5 \leq q^5 < 27$ болж зөрчил гарна. Эцэст нь $p \neq 3$, $q \neq 3$ гэе. Тэгвэл p , q нь анхны тул $p \not\equiv 0 \pmod{3}$, $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ болно. Энэ үед хэрэв $p \equiv q \pmod{3}$ бол $p^3 - q^5 \equiv 0 \pmod{3}$, $(p + q)^2 \not\equiv 0 \pmod{3}$, хэрэв $p \not\equiv q \pmod{3}$ бол $p^3 - q^5 \not\equiv 0 \pmod{3}$, $(p + q)^2 \equiv 0 \pmod{3}$ болно. Иймд энэ тохиолдолд дээрх тэгшитгэл шийдгүй. $\square$

Жишээ 9.
$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2 \\ p^2 + 1 = 2y^2 \end{cases}$$
 тэгшитгэл бүхэл шийдтэй байх бүх анхны тоо p -г ол.

Бодолт. $p = 7$ үед $x = \pm 2$, $y = \pm 5$ нь шийд болно.

Одоо өөр шийдгүй болохыг харуулъя. Бид $x \geq 0$, $y \geq 0$ гэж үзэж болно. Тэгвэл $p(p - 1) = 2(y - x)(y + x)$ болох бөгөөд $0 < x < y < p$ тул $0 < y - x < p$, $0 < x + y < 2p$ болно. Иймд $x + y = p$, $2y - 2x = p - 1$ болно. Эндээс $4x = p + 1 = 2x^2$ буюу $x = 0$ эсвэл $x = 2$ болно. Эхний тохиолдолд $p = -1$ нь анхны тоо биш, дараагийн тохиолдолд $p = 7$ болно. Эндээс өөр шийдгүй болох нь гарна. $\square$

Дасгалууд

Дасгал 1. (Унгар) $(x + 1)^2 + \dots + (x + 99)^2 = y^z$, $z > 1$, тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Дасгал 2. (Т. Андрэскү) $x^2 - y! = 2015$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Санаа: 3 жишлэгээр $y \geq 3$ байх боломжгүй нь гарна.

Дасгал 3. (Варингийн бодлогын тухайн тохиолдол) $n \geq 0$ болог.

(i) $x_1^4 + \dots + x_{16}^4 = 31 \cdot 16^n$ тэгшитгэл бүхэл шийдтэй гэж харуул.

(ii) $x_1^4 + \dots + x_{15}^4 = 31 \cdot 16^n$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Санаа:

(i) $16 = 2^4$ тул $n = 0$ тохиолдолыг авч үзэхэд хангалттай.

(ii) x^4 нь 16 жишлэгээр 0, 1 утгууд авна. Үүнийг ашиглан n -ээр индукцлэнэ.

Дасгал 4. $3^x - 2^y = 7$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

Санаа: 8 жишлэгээр $y \geq 3$ байх боломжгүй нь гарна.

Дасгал 5. (Эйлерийн бодлого) $4xy - x - y = z^2$ тэгшитгэл эерэг бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Санаа: Эйлерийн теоремоос мөрдөнө.

Дасгал 6. (IMO1982.4-ийн хувилбар) $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2015$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Санаа: 5-аар жишин $x \equiv y \equiv 0 \pmod{5}$ байх ёстойг харна. Гэтэл $2015 \not\equiv 0 \pmod{25}$.

Дасгал 7. (IMO1990.3) $2^x + 1 = x^2 y$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

Дасгал 8. (Г. М. Бухарест) $x^3 - 4xy + y^3 = -1$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

Санаа: Хариу: (x, y) нь $(0, -1)$ эсвэл $(-1, 0)$.

$a := x + y$, $b := xy$ гэе. Тэгвэл өгөгдсөн тэгшитгэл нь $a^3 - 3ab - 4b + 1 = 0$ гэж бичигдэнэ. Иймд $a^3 + 1$ нь 3 + 4-д хуваагддаг болно. Эндээс $3a + 4$ нь 37-ийн хуваагч болно.

Дасгал 9. (Putnam2001.A5) $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

Санаа: Хариу: $n = 2$, $a = 13$.

a -аар жишвэл $a \mid 2002$ болно. Энд $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ болохыг анхааръя.

3-аар жишин $a \equiv 1 \pmod{3}$ болон n нь тэгш гэж харна. Одоо $x + 1$ -ээр жишвэл $(x+1) \mid 2002$ болох бөгөөд эндээс $x = 13$ болно. Одоо $13^n - 14^{(n+1)} = 2001$ тэгшитгэлийг 8-аар жишин $n = 2$ болохыг харж болно.

Дасгал 10. (USA.TST.2008.) $x^7 + 7 = y^2$ тэгшитгэл бүхэл шийдгүй гэж харуул.

Санаа: Эйлерийн теоремоос $x \equiv 1 \pmod{4}$ болно. Эндээс $x^7 + 2^7 = y^2 + 11^2$ гэж бичвэл $x + 2 \equiv 3 \pmod{4}$ тул ахиад Эйлерийн теоремоос y нь 11-д хуваагддаг болно. Одоо $z := y/11$, $a := x + 2$, $b := (x^7 + 2^7)/(x+2)$ гэе. Тэгвэл a ба b нь зэрэг 11-т хуваагдахгүй (яагаад?) бөгөөд хожуулаа 4 жишлэгээр 3 үлдэнэ. Энэ нь $z^2 + 1$ -ийн хувьд Эйлерийн теоремийг зөрчинө.

Дасгал 11. (IMO2006.N5) $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$ тэгшитгэлийн бүхэл шийдүүдийг ол.

Санаа: Хариу: шийдгүй.

$x^6 + \dots + x + 1$ -ийн анхны хуваагчууд 7 жишлэгээр 0 эсвэл 1 үлдэнэ.

Функционал тэгшитгэл 1

А. Ганбат (МУИС)

Оршил

Функционал тэгшитгэл гэдэг нь тус бүр нь төгсгөлөг тооны хамаарах ба төгсгөлөг тооны үл хамаарах хувьсагчтай функцуудээр илэрхийлэгдэх тэгшитгэлийг хэлэх бөгөөд уг тэгшитгэлийг хангах функцуудыг олох нь функционал тэгшитгэлийг судлах гол зорилго нь юм. Үүнийг бид функционал тэгшитгэлийг бодох гэж хэлэх ба функционал тэгшитгэлийг хангах функцуудыг функционал тэгшитгэлийн шийд гэж нэрлэнэ. Функционал тэгшитгэл нь сонгодог утгаараа буюу ялгаварт тэгшитгэл (difference equation) ба рекуррент харьцаатай итерацийг үл тооцвол орчин үеийн функцийн онолтой зэрэгцэн гарч ирсэн. Функционал тэгшитгэл нь анх 1747-1750 онд хэвлэгдсэн Даламбертийн гурван өгүүлэл дээр тодорхойлогдсон бөгөөд уг тэгшитгэл нь дараах хэлбэртэй байв:

$$f(x+y) - f(x-y) = g(x)h(y).$$

Энэ тэгшитгэл нь хэрэглээнээс буюу утасны чичэрхийллийн бодлогоноос гарч ирсэн юм. Үүнээс хойш функционал тэгшитгэлийн онол нь эрдэмтэн математикчдийн дунд ихээр судлагдах болсон бөгөөд одоогийн түвшинд хүрэхэд нь Даламберт, Эйлер, Коши, Абел нараас эхлэн олон алдартай математикчид хувь нэмрээ оруулсан байна.

Математикийн олимпиадад тодорхой нөхцлийг хангах функцуудыг олох эсвэл функцийн тодорхой утгыг олох бодлогууд цөөнгүй ирдэг. Эхлээд тэдгээр нь ямар хэлбэрийн бодлогууд байж болох вэ гэдгийг харуулсан хэдэн хялбархан жишээ бодлого авч үзье.

Жишээнүүд

Жишээ 1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n(n+1)$ функц өгөгдөв. $4f(n) = f(m)$ нөхцлийг хангах бүх m, n натурал тоонуудыг ол.

Бодолт. $4f(n) = f(m)$ байх m, n натурал тоонуудын хувьд $4n^2 + 4n = m^2 + m$ байна. Эндээс

$$(2n+1)^2 = m^2 + m + 1.$$

Гэвч $m^2 < m^2 + m + 1 < (m+1)^2$ тул өгөгдсөн нөхцлийг хангах m, n натурал тоонууд олдохгүй. $\square$

Жишээ 2. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ба дурын натурал $n > 1$ хувьд $f(3n) = n + f(3n - 3)$ биелдэг байх f функц өгөгдөв. $f(3) = 1$ бол $f(12)$ -г ол.

Бодолт. $f(12) = f(3 \cdot 4) = 4 + f(3 \cdot 3) = 4 + 3 + f(3 \cdot 2) = 4 + 3 + 2 + f(3 \cdot 1) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$.
Ерөнхий тохиолдолд $f(3n) = n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Жишээ 3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ба дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$ биелдэг байх бүх f функцийг ол.

Бодолт. $y = x$ гэж орлуулбал $f(2x) - f(0) = 4x^2$ болно. $f(0) = c$ гэвэл $f(2x) = 4x^2 + c$ буюу $f(x) = x^2 + c$ болно. Уг функц өгөгдсөн нөхцлийг хангана гэдгийг харуулах нь хялбархан юм. $\square$

Жишээ 4. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ба дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ хувьд $f(xy) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ биелдэг байх бүх f функцийг ол.

Бодолт. $y = x$ гэж орлуулбал $f(x^2) = f(1)$ болно. $y = x^2$ гэвэл $f(y) = f(1)$ болох ба энэ нь дурын $y \in \mathbb{R}^+$ хувьд үнэн тул f нь тогтмол функц гэж гарна. $\square$

Жишээ 5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ба дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x + y) + f(x - y) = f(x) + 6xy^2 + x^3$ биелдэг байх бүх f функцийг ол.

Бодолт. $y = 0$ гэж орлуулбал $2f(x) = f(x) + x^3$ болно. Эндээс $f(x) = x^3$ болох ба уг функц өгөгдсөн нөхцлийг хангана гэдгийг шууд хялбархан шалгаж болно. $\square$

Жишээ 6. $f(1) = 3, f(2) = 2$ ба дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n + 2) + \frac{1}{f(n)} = 2$ биелдэг байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодолт. f -ийн бага утгуудыг ажиглавал $f(3) = 2 - \frac{1}{f(1)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, f(4) = 2 - \frac{1}{f(2)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ болно. Эндээс бид дурын $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n) = \frac{n+2}{n}$ гэж таамаглаж болохоор байна. $n = 1$ ба $n = 2$ үед үнэн гэдэг нь ойлгомжтой. $n > 4$ үед индукцээр баталъя. $f(n) = \frac{n+2}{n}$ байг. Тэгвэл

$$f(n + 2) = 2 - \frac{1}{f(n)} = 2 - \frac{n}{n + 2} = \frac{n + 4}{n + 2}$$

болж батлагдав. $\square$

Жишээ 7. (Энэтхэг, 2010) Бүх $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x + y) + xy = f(x)f(y)$ биелдэг байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодолт. $x = y = 0$ гэж орлуулбал $f(0) = f(0)^2$ болох ба эндээс $f(0) = 0$ эсвэл $f(0) = 1$ байна. Хэрэв $f(0) = 0$ бол өгөгдсөн нөхцөлд $y = 0$ гэж орлуулахад бүх $x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = 0$ гэж гарна. Гэвч энэ үед $xy \neq 0$ байх x, y -ийн хувьд өгөгдсөн нөхцөл биелэхгүй болж зөрчил үүснэ. Иймд $f(0) = 1$.

$x = 1, y = -1$ гэвэл $f(1)f(-1) = f(1 - 1) - 1 = f(0) - 1 = 0$ болох ба $f(1) = 0$ эсвэл $f(-1) = 0$ гэж гарна.

$f(-1) = 0$ үед $y = -1$ гэвэл $f(x-1) - x = 0$ болох буюу $f(x-1) = x$. Энд $y = x-1$ гэвэл $f(y) = y+1$ болно.

$f(1) = 0$ үед $y = 1$ гэвэл $f(x+1) + x = f(x)f(1) = 0$ болох буюу $f(x+1) = -x$. Энд $y = x+1$ гэвэл $f(y) = 1-y$ болно. Иймд уг функционал тэгшитгэл $f(x) = x+1, f(x) = 1-x$ гэсэн хоёр хариутай. $\square$

Жишээ 8. (Олон Улс, 1977) Аливаа натурал $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n+1) > f(f(n))$ биелдэг байх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц өгөгдөв. Тэгвэл бүх $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n) = n$ байна гэж батал.

Бодолт. $A = \{f(1), f(2), \dots\}$ нь f -н дүр олонлог байг. Өгсөн ёсоор $n \geq 2$ үед $f(n) > f(f(n-1))$ байна. Эндээс $n \geq 2$ үед $f(n)$ нь A олонлогийн хамгийн бага элемент болж чадахгүй тул хамгийн бага нь $f(1)$ байна. Өөрөөр хэлбэл дурын натурал $n > 1$ хувьд $f(n) > f(1)$ байна.

Одоо $m \geq p$ бол $f(m) \geq p$ байна гэж харуулъя. $p = 2$ үед өмнөх дүгнэлтээс шууд гарна. Уг чанар нь $p \geq 2$ байх p -н хувьд биелдэг гэж үзээд $p+1$ үед биелэхийг харуулахад хангалттай. $m \geq p+1$ байг. Эндээс $m-1 \geq p$ болох ба $f(m-1) \geq p$ байна. Өгсөн ёсоор $f(m+1) > f(f(m)) \geq p$ тул $f(m) \geq p+1$ болов.

Хэрэв ямар нэг $p \in \mathbb{N}$ хувьд $f(p) \geq f(p+1)$ бол өмнө баталсан ёсоор $f(f(p)) \geq f(p+1)$ болох ба нөгөө талаас $f(p+1) > f(f(p))$ тул зөрчилд хүрэв. Иймд $f(p) < f(p+1)$ байна.

$f(1) \geq 1, f(2) > f(1)$ гэдгээс $f(2) \geq 2$ болно. $f(2) \geq 2, f(3) > f(2)$ гэдгээс $f(3) \geq 3$ болно. Гэх мэтчилэн үргэлжлүүлбэл индукцээр $f(n) \geq n, n \in \mathbb{N}$ гэж гарна.

Ямар нэг n -ийн хувьд $f(n) > n$ байдаг гэе. Тэгвэл $f(n) \geq n+1$ болох ба өмнө баталсан ёсоор $f(f(n)) \geq f(n+1)$ болж зөрчил үүснэ. Иймд $f(n) = n, n \in \mathbb{N}$ болж батлагдав. $\square$ Одоо функцийн зарим шинж чанаруудтай холбоотой бодлогуудыг авч үзье.

Тодорхойлолт. $f: X \rightarrow Y$ функцийн хувьд $x_1 \neq x_2$ байх аливаа $x_1, x_2 \in X$ хувьд $f(x_1) \neq f(x_2)$ бол f -г инъектив гэнэ.

Тодорхойлолт. $f: X \rightarrow Y$ функцийн хувьд аливаа $y \in Y$ авахад $f(x) = y$ байх $x \in X$ олдож байвал f -г суръектив гэнэ.

Тодорхойлолт. f нь нэгэн зэрэг инъектив ба суръектив бол f -г биектив гэнэ.

Жишээ 9. Аливаа натурал $m, n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(f(m) + f(n)) = m + n$ биелдэг байх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц нь инъектив байна гэж батал.

Бодолт. $f(m) = f(n)$ байг. Тэгвэл $f(m) + f(n) = f(n) + f(n)$ ба $m + n = f(f(m) + f(n)) = f(f(n) + f(n)) = n + n$ гэдгээс $m = n$ болно. Иймд f инъектив байна. $\square$

Жишээ 10. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ба дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ хувьд $f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$ биелдэг байх аливаа f функцийг инъектив гэж батал.

Бодолт. $y = x$ гэж орлуулбал $f(xf(x)) = x^2$ болно. Тухайлбал $f(f(1)) = 1$ байна. Өмнөх гаргаж авсан тэгшитгэлд $x = f(1)$ гэвэл $f(1)^2 = f(f(1)f(f(1))) = 1$ болох эндээс $f(1) = 1$ гэж гарна. Өгөгдсөн нөхцөлд $y = 1$ гэвэл $f(x) + f(f(x)) = 2x$ гэсэн тэгшитгэл гарна. Хэрэв $f(x) = f(y)$ бол $2x = f(x) + f(f(x)) = f(y) + f(f(y)) = 2y$ болох буюу $x = y$. Иймд f инъектив байна. $\square$

Жишээ 11. Бүх $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$ биелдэг байх аливаа $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг суръектив гэж батал.

Бодолт. $y = -f(x)$ гэж орлуулбал $f(f(x) - f(x)) = 2x + f(f(-f(x)) - x)$ болно. Эндээс $f(f(-f(x)) - x) = f(0) - 2x$ гэж гарна. Дурын $y \in \mathbb{R}$ хувьд $x = \frac{f(0)-y}{2}$ гэвэл $f(f(-f(x)) - x) = y$ болно. Иймд f суръектив байна. $\square$

Жишээ 12. $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ ба дурын $x, y \in \mathbb{Q}^+$ хувьд $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ биелдэг байх аливаа f функцийг биектив гэж батал.

Бодолт. $x = 1$ гэж орлуулбал $f(f(y)) = \frac{f(1)}{y}$ болно. Хэрэв $f(y_1) = f(y_2)$ бол $f(f(y_1)) = f(f(y_2))$ буюу $\frac{f(1)}{y_1} = \frac{f(1)}{y_2}$ болно. Эндээс $y_1 = y_2$ буюу f инъектив гэж гарна.

Одоо f -г суръектив гэж харуулъя. $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ үед $f(x) = \frac{m}{n}$ байх $x \in \mathbb{Q}^+$ олдоно гэж харуулах ёстой.

$$f(x) = \frac{m}{n} \iff f(f(x)) = f\left(\frac{m}{n}\right) \iff \frac{f(1)}{x} = f\left(\frac{m}{n}\right) \iff x = \frac{f(1)}{f\left(\frac{m}{n}\right)}$$

ба $x \in \mathbb{Q}^+$ тул f суръектив болно. Иймд f биектив болох нь батлагдав. $\square$

Тодорхойлолт. $f(x) = f(-x)$ байх f функцийг тэгш функц, $f(x) = -f(-x)$ байх f функцийг сондгой функц гэж тус тус нэрлэнэ.

Жишээ 13. Бүх $x, y \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ биелдэг байх бүх $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ функцийг ол.

Бодолт. $x = y = 0$ гэж орлуулбал $f(0) = 0$ болно. $x = y$ үед $f(2x) = 4f(x)$ болох ба индукцээр $f(nx) = n^2 f(x)$, $n \in \mathbb{N}$ гэж гарна.

$x = 0$ гэвэл $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ буюу $f(y) = f(-y)$ болох тул f нь тэгш функц байна. Иймд дурын $n \in \mathbb{Z}$ ба $x \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(nx) = n^2 f(x)$ биелнэ.

$r = \frac{p}{q}$, $p \geq 1$ байг. Тэгвэл $p^2 f(1) = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{p}{q}\right)$ болох ба $f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 f(1)$ байна. Эндээс $f(r) = cr^2$, $r \in \mathbb{Q}$ ба $c = f(1)$ байна. Уг функц бодлогын нөхцлийг хангана гэдгийг хялбархан шалгана. $\square$

Тодорхойлолт. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийн хувьд $f(x+a) = f(x)$ нь дурын $x \in \mathbb{R}$ дээр биелж байх $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) тоо олдож байвал f -г үет функц гэж нэрлэнэ. a тоог f функцийн үе гэнэ.

Жишээ 14. $a \in \mathbb{R}$ өгөгдсөн тоо. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ба дурын $x \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

биелдэг бол f функцийг үетэй гэж батал.

Бодолт. Өгсөн нөхцлөөс $f(x) = \frac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}$ гэж гарна. Өгсөн нөхцлийн x -д $(x-a)$ -г орлуулбал $f(x) = \frac{1+f(x-a)}{1-f(x-a)}$ болно. Эдгээр хоёрыг тэнцүүлээд хялбарчилсны дараа $f(x+a) = \frac{-1}{f(x-a)}$ болно. Энд x -г $(x+a)$ -аар орлуулбал $f(x+2a) = \frac{-1}{f(x)}$ гэж гарна.

$$f(x+4a) = \frac{-1}{f(x+2a)} = \frac{-1}{\frac{-1}{f(x)}} = f(x)$$

гэдгээс f нь $4a$ үетэй болж батлагдав. □

Жишээ 15. (Беларус, 2005) Аливаа натурал $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n) = f(n+f(n))$ биелдэг байх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц өгөгдөв. Хэрэв f -ийн дүр олонлог нь төгсгсөлөг бол f -г үетэй гэж батал.

Бодолт. $f(n+f(n)+f(n)) = f(n+f(n)+f(n+f(n))) = f(n+f(n)) = f(n)$ учраас $f(n+2f(n)) = f(n)$ болно. Эндээс индукцээр $\forall k \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n) = f(n+kf(n))$ гэдгийг хялбархан баталж болно.

$A = f(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ба $T = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m$ гэе. Тэгвэл $\frac{T}{f(n)} \in \mathbb{N}$ ба

$$f(n) = f\left(n + \frac{T}{f(n)} \cdot f(n)\right) = f(n+T)$$

тул T нь f -ийн үе болно. Иймд f нь үетэй функц юм. □

Дасгалууд

Дасгал 1. Дурын $x \neq 0, 1$ хувьд

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: x -д $\frac{1}{1-x}$ -г хоёр дахин орлуул.

Дасгал 2. (Канад, 1969) Натурал тоон олонлог дээр тодорхойлогдсон $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функц нь дараах чанаруудыг хангана. Үүнд:

- (i) $f(2) = 2$.
- (ii) Бүх $m, n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(mn) = f(m)f(n)$.
- (iii) Дурын натурал $m > n$ хувьд $f(m) > f(n)$.

Тэгвэл дурын натурал n -ийн хувьд $f(n) = n$ гэж батал.

Санаа: Индукц ашигла.

Дасгал 3. Дурын $x \neq 0$ хувьд

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: x -д $(-x)$ -г орлуул.

Дасгал 4. Дурын $x \neq 0$ хувьд

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: x -д $(-x)$ ба $\frac{1}{x}$ -г орлуул.

Дасгал 5. (Ирланд, 1995) Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: (x, y) -д $(x + y, x)$ ба $(2x + y, -x)$ -г орлуулж үз.

Дасгал 6. (Украин, 1997) Дараах чанартай бүх $f: \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ функцийг ол. Үүнд:

- (a) Бүх $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ хувьд $f(x + 1) = f(x) + 1$ байна.
- (b) Бүх $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ хувьд $f(x^2) = f(x)^2$ байна.

Дасгал 7. Дурын бодит x, y, z хувьд

$$xf(y) + yf(z) + zf(x) = yf(x) + zf(y) + xf(z)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: Дурын $x, y, z \in \mathbb{R}$ хувьд $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ биелэхийг харуул.

Дасгал 8. Дурын бодит x -ийн хувьд $f(g(x)) = g(f(x))$ биелдэг байх $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцууд өгөгдөв. f ба g функцуудыг сондгой гэж батал.

Дасгал 9. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y)$$

байх бүх сюръектив $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Дасгал 10. Аливаа натурал $n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(n) = f(n + f(n))$ биелдэг байх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ үегүй функцийн жишээ гарга.

Санаа: $n = 2^k \cdot m$, $k \geq 0$ ба m сондгой үед $f(n) = 2^{k+1}$ гэж тодорхойлогдсон функцийг авч үз.

Функционал тэгшитгэл 2

А. Ганбат (МУИС)

Өсөх ба буурах функц

Өгөгдсөн f функцийн хувьд $x < y$ үед $f(x) < f(y)$ ямагт биелдэг бол f -г өсөх функц гэж нэрлэнэ. $x < y$ үед $f(x) \leq f(y)$ ямагт биелдэг бол f -г үл буурах функц гэж нэрлэнэ. Үүнтэй адилаар, $x < y$ үед $f(x) > f(y)$ ямагт биелдэг бол f -г буурах, $f(x) \geq f(y)$ ямагт биелдэг бол f -г үл өсөх функц гэж тус тус нэрлэнэ.

Жишээ 1. (ОУМО, 1992) Дурын бодит x, y хувьд

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

биелдэг байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодолт. $a = f(0)$ гэе. Өгөгдсөн нөхцөлд $x = 0$ гэвэл $f(f(y)) = a^2 + y$ болно. $x = y = 0$ гэвэл $f(a) = a^2$ болно. Эндээс $f(x^2 + a) + a^2 = f(x)^2 + f(a)$ гэж гарна. Үүний хоёр талыг нь f -ээр үйлчилвэл $f(f(x^2 + a) + a^2) = f(f(x)^2 + f(a))$ болно. Нэг талаас,

$$f(f(x^2 + a) + a^2) = x^2 + a + f(a)^2 = x^2 + a + a^4.$$

Нөгөө талаас,

$$f(f(x)^2 + f(a)) = a + f(f(x))^2 = a + (a^2 + x)^2 = a + a^4 + 2a^2x + x^2$$

болно. Дээрх хоёрыг тэнцүүлбэл $2a^2x = 0$ болох буюу $a = 0$ гэж гарна. Эндээс дурын $x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(f(x)) = x$ ба $f(x^2) = f(x)^2$ тус тус биелнэ гэж мөрдөн гарна.

$f(x^2) = f(x)^2$ гэдгээс $x \geq 0$ үед $f(x) \geq 0$ болно. $f(f(x)) = x$ гэдгээс f нь инъектив гэж гарна. Иймд зөвхөн $x = 0$ үед л $f(x) = 0$ байна. Эндээс $x > 0$ үед $f(x) > 0$ байна.

$f(f(x)^2 + f(y)) = f(f(x))^2 + y = x^2 + y$ гэдгээс $f(x^2 + y) = f(f(f(x)^2 + f(y))) = f(x)^2 + f(y)$ болно. $y < x$ үед $x - y > 0$ ба $x = x - y + y$ гэж бичиж болно. Сүүлийн тэнцэтгэлд $\sqrt{x - y}$ ба y -г орлуулбал $f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) > f(y)$ болох ба f нь өсөх функц байна. f нь өсөх ба $f(f(x)) = x$ нөхцлийг хангана гэдгээс $f(x) = x$ гэж гарна. Учир нь, $f(x) > x$ бол $x = f(f(x)) > f(x)$ болох ба $f(x) < x$ бол $x = f(f(x)) < f(x)$ болж тус тус зөрчилд хүрнэ. Иймд зөвхөн $f(x) = x$ гэсэн функц бодлогын нөхцлийг хангана. $\square$

Зааглагдсан функц

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функц өгөгдсөн гэе. Хэрэв дурын $a \in A$ хувьд $f(a) \leq M$ байх $M \in \mathbb{R}$ тоо олдож байвал f -г A олонлог дээр дээрээсээ зааглагдсан функц гэж нэрлэнэ. Үүнтэй

адилаар, дурын $a \in A$ хувьд $f(a) \geq N$ байх $N \in \mathbb{R}$ тоо олдож байвал f -г A олонлог дээр доороосоо зааглагдсан функц гэж нэрлэнэ. f нь нэгэн зэрэг дээрээсээ ба доороосоо зааглагдсан байвал f -г A олонлог дээр зааглагдсан функц гэж хэлнэ.

f нь A олонлог дээр зааглагдсан байх чанар нь дурын $x \in A$ хувьд $|f(x)| \leq C$ байх $C > 0$ тоо олдож байхтай адил юм. Өөрөөр хэлбэл, $-C \leq f(x) \leq C$ байна.

Жишээ 2. m нь 2-оос багагүй натурал тоо байг. Дараах чанартай бүх зааглагдсан $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол. Үүнд: дурын $x \in [0, 1]$ хувьд

$$f(x) = \frac{1}{m^2} \left\{ f(0) + f\left(\frac{x}{m}\right) + f\left(\frac{2x}{m}\right) + \dots + f\left(\frac{(m-1)x}{m}\right) \right\}$$

биелнэ.

Бодолт. Дурын $x \in [0, 1]$ хувьд $|f(x)| \leq M$ байдаг гэвэл гурвалжны тэнцэтгэл бишээр

$$|f(x)| \leq \frac{1}{m^2} \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{j}{m}x\right) \right| \leq \frac{mM}{m^2} = \frac{M}{m}$$

гэж гарна. Иймд дурын $x \in [0, 1]$ хувьд $|f(x)| \leq \frac{M}{m}$ байна. Дээрхтэй адил үйлдлийг давтан хийвэл дурын $x \in [0, 1]$ хувьд $|f(x)| \leq \frac{M}{m^2}$ гэж гарна. Энэ үйлдлийг давтан хийсээр дурын $n \in \mathbb{N}$ ба дурын $x \in [0, 1]$ хувьд $|f(x)| \leq \frac{M}{m^n}$ гэж гарган авч болох ба n хязгааргүй их болох үед $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ болно. Иймд $f(x) \equiv 0$ байна. $\square$

Тасралтгүй функц

Өгөгдсөн $f(x)$ функцийн хувьд x нь a тоо руу тэмүүлж байх үед $f(x)$ нь b тоо руу тэмүүлж байвал бид b тоог x нь a -руу тэмүүлж байх үеийн $f(x)$ -ийн хязгаар гэж хэлнэ. Үүнийг математик хэлээр томъёолбол:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ хувьд } \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \text{ байх } \forall x \text{ хувьд } |f(x) - b| < \epsilon$$

биелэх явдал ба энэ үед бид $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ гэж тэмдэглэнэ.

Үүний адилаар бид $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ хязгаарыг авч үзэж болох ба дараах байдлаар томъёолно:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ хувьд } \exists M > 0: x > M \text{ байх } \forall x \text{ хувьд } |f(x) - b| < \epsilon$$

биелнэ.

Одоо функцийн хязгаартай холбоотой дараах теоремийг баталгаагүйгээр авч үзье.

Теорем. Өгөгдсөн f функцийн хувьд $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ байх зайлишгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ байх дурын $\{a_n\}$ дарааллын хувьд $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ биелэх явдал юм.

Уг теоремоос ажиглахад хэрэв $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ба $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq b$ байх $\{a_n\}$ дараалал олдож байвал $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ байна гэдэг нь хялбархан мөрдөн гарна.

Жишээ 3. (ОУМО, 1983) Дараах чанаруудыг хангах бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол. Үүнд:

(а) Дурын эерэг x, y хувьд $f(xf(y)) = yf(x)$ байна.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Бодолт. $x = 1$ гэвэл $f(f(y)) = yf(1)$ болох ба эндээс f нь биектив гэж гарна (яагаад гэдгийг уншигчдад дасгал болгон үлдээв). Иймд $f(y_0) = 1$ байх y_0 олдоно. $x = 1, y = y_0$ гэвэл $f(1) = y_0 f(1)$ болох ба $f(1) = 1$ гэж гарна. Иймд $x = 1$ нь бэхлэгдсэн цэг ($f(x) = x$ байх цэг) болно.

$x = y$ гэвэл $f(xf(x)) = xf(x)$ болох ба $xf(x)$ нь мөн бэхлэгдсэн цэг болно. Хэрэв бид зөвхөн $x = 1$ нь бэхлэгдсэн цэг байна гэж баталбал $\forall x > 0$ хувьд $xf(x) = 1$ болох ба $f(x) = \frac{1}{x}$ гэж гарна. f нь $x = 1$ -ээс өөр бэхлэгдсэн цэггүй гэж баталъя.

$x = \frac{1}{a}, y = a (a \in \mathbb{R}^+)$ гэвэл $f(\frac{1}{a}f(a)) = af(\frac{1}{a})$ болох ба f нь инъектив гэдгийг тооцвол $f(a) = a \iff f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$ гэж гарна. Хэрэв 1-ээс ялгаатай бэхлэгдсэн цэг байдаг гэж үзвэл 1-ээс их a гэсэн бэхлэгдсэн цэг олдоно. $f(a) = a$ гэдгээс индукцээр $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(a^n) = a^n$ гэж хялбархан баталж болно. Гэвч $a > 1$ тул $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ ба $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n) = \infty$ болж бодлогод өгсөн (b) нөхцөлд зөрчинө. Иймд f нь $x = 1$ -ээс өөр бэхлэгдсэн цэггүй буюу $f(x) = \frac{1}{x}$ байна. $\square$

Өгөгдсөн f функцийн хувьд x нь a -руу тэмүүлж байх үеийн $f(x)$ -ийн хязгаар нь $f(a)$, өөрөөр хэлбэл $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ бол f -г $x = a$ цэг дээр тасралтгүй функц гэж хэлнэ. f нь A олонлогийн $a \in A$ цэг бүр дээр тасралтгүй бол f -г A дээр тасралтгүй функц гэнэ.

Функцийн тасралтгүй чанартай холбоотой дараах теоремүүдийг баталгаагүйгээр авч үзье.

Теорем. f функц нь $x = a$ цэг дээр тасралтгүй байх зайлиггүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ байх дурын $\{a_n\}$ дарааллын хувьд $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ биелэх явдал юм.

$D \subset \mathbb{R}$ олонлогийн хувьд $\mathbb{R}$ -ийн дурын задгай интервал нь D -ийн ямар нэгэн цэгийг агуулдаг бол D -г $\mathbb{R}$ -д нягт олонлог гэж хэлнэ.

Теорем. Рациональ тоон олонлог нь $\mathbb{R}$ -д нягт олонлог байна.

Теорем. f нь $\mathbb{R}$ дээр тасралтгүй функц ба $\mathbb{R}$ -д нягт ямар нэг $D \subset \mathbb{R}$ олонлогийн бүх цэг дээр 0 утга авдаг бол $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = 0$ байна.

Теорем. f, g нь $\mathbb{R}$ дээр тасралтгүй функцууд ба $\mathbb{R}$ -д нягт ямар нэг $D \subset \mathbb{R}$ олонлогийн бүх цэг дээр тэнцүү утга авдаг бол $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = g(x)$ байна.

Жишээ 4. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

байх бүх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Бодолт. Хялбар орлуулгууд ашиглан $\forall x \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(x) = f(1)x^2$ гэж харуулж болно (дасгал). Теорем ёсоор $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = f(1)x^2$ байна. $\square$

Кошийн функционал тэгшитгэл

$f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг Кошийн функционал тэгшитгэл гэнэ. Уг тэгшитгэлийг шийдийг Кошийн функц гэж нэрлэнэ. Кошийн функцийг олох аргуудыг судалъя.

$x = y = 0$ гэвэл $f(0) = 2f(0)$ болох буюу $f(0) = 0$ байна. $y = -x$ гэвэл $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$ буюу f нь сондгой функц байна.

$x = y$ гэвэл $f(2x) = 2f(x)$ болно. Индукцээр $f(nx) = nf(x)$ гэж үзвэл $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$ болно. Иймд $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $f(nx) = nf(x)$ байна. f нь сондгой функц тул $\forall n \in \mathbb{Z}$ хувьд $f(nx) = nf(x)$ байна.

$f(x) = f(\frac{m}{m}x) = f(m\frac{x}{m}) = mf(\frac{x}{m})$ гэдгээс $f(\frac{x}{m}) = \frac{1}{m}f(x)$ гэж гарна. Эндээс $f(\frac{n}{m}x) = f(n\frac{x}{m}) = nf(\frac{x}{m}) = \frac{n}{m}f(x)$ болно. Иймд $\forall r \in \mathbb{Q}$ хувьд $f(rx) = rf(x)$ байна. $c = f(1)$ гэвэл $r \in \mathbb{Q}$ үед $f(r) = rf(1) = cr$ болно.

Иймд $x \in \mathbb{Q}$ үед $f(x) = cx$ боллоо. Энэ нь Кошийн тэгшитгэлийг хангах нь ойлгомжтой. Одоо бид $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ үед f -г олж тодорхойлох шаардлагатай юм. Үүнийг бид f дээр зарим нэмэлт нөхцөл тавьж өгснөөр хийцгээе.

1. f нь $\mathbb{R}$ дээр тасралтгүй.

Өмнө харуулснаар $x \in \mathbb{Q}$ үед $f(x) = cx$ байна. Теорем ёсоор дурын $x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = cx$ болно.

2. f нь $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй.

Дараах леммийг ашиглан өмнөх тохиолдол руу шилжинэ.

Лемм. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нь Кошийн тэгшитгэлийг хангах бөгөөд $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй бол бүх $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) цэг дээр тасралтгүй байна.

Бодолт. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ байх $\{a_n\}$ дараалал авч үзвэл $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ байна. f нь $x = 0$ цэг дээр тасралтгүй тул Теорем ёсоор $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n - a) = f(0) = 0$ болно. f нь Кошийн тэгшитгэлийг хангах тул $f(a_n) = f(a_n - a) + f(a)$ байна. Эндээс $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n - a) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(a) = 0 + f(a) = f(a)$ буюу f нь $x = a$ цэг дээр тасралтгүй болно. $\square$

3. f нь монотон.

f нь өсөх функц байг. Өмнө харуулснаар $x \in \mathbb{Q}$ үед $f(x) = cx$ байна. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ тооны хувьд x -рүү нийлдэг $\{r_n\}, \{s_n\}$ гэсэн рационал тоон дарааллуудыг $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $r_n < x < s_n$ байхаар сонгож болно. f нь монотон учраас $cr_n = f(r_n) < f(x) < f(s_n) = cs_n$ болно. Үүний хоёр талд $n \rightarrow \infty$ хязгаарт шилжвэл

$$cx = \lim_{n \rightarrow \infty} cr_n \leq f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = cx$$

болох буюу $f(x) = cx$ болно. Иймд $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = cx$ байна.

f нь үл өсөх, буурах, үл буурах үед мөн ижлээр бодогдоно.

4. f нь эерэг утгууд дээд эерэг.

$x > 0$ үед $f(x) > 0$ гэдгээс f нь өсөх функц гэж гарна. Учир нь $x < y$ гэвэл $y - x > 0$ ба $f(y - x) > 0$ болно. Эндээс $f(x) < f(x) + f(y - x) = f(x + (y - x)) = f(y)$ болно. Иймд өмнөх тохиолдол ёсоор $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = cx$ байна.

5. f нь зааглагдсан.

f нь $[a, b]$ завсар дээр зааглагдсан байг. Өөрөөр хэлбэл $\forall x \in [a, b]$ хувьд $|f(x)| \leq M$ байх $M > 0$ тоо олддог гэе. $x + a \in [a, b]$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $x \in [0, b - a]$ байх ба энэ үед $|f(x)| = |f(x + a) - f(a)| \leq |f(x + a)| + |f(a)| \leq 2M$ болно. Иймд f нь $[0, a - b]$ завсар дээр $2M$ -ээр зааглагдана. $\alpha = b - a, c = \frac{f(a)}{\alpha}$ ба $g(x) = f(x) - cx$ гэе. Тэгвэл

(a) $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

(b) $g(\alpha) = f(\alpha) - c\alpha = 0$.

(c) $g(x + \alpha) = g(x) + g(\alpha) = g(x)$ буюу g нь α үетэй.

(d) $x \in [0, \alpha]$ үед $|g(x)| = |f(x) - cx| \leq |f(x)| + |cx| \leq 2M + \left|\frac{f(a)}{\alpha}\right||\alpha| \leq 3M$ болох буюу g нь $[0, \alpha]$ завсар дээр зааглагдсан байна. Эндээс g нь α үетэй учраас g нь $\mathbb{R}$ дээр зааглагдсан байна.

Хэрэв ямар нэг x_0 хувьд $g(x_0) \neq 0$ бол $\forall n \in \mathbb{N}$ хувьд $g(nx_0) = ng(x_0)$ биелэх учраас $n \rightarrow \infty$ үед $|g(nx_0)|$ нь хязгааргүй их болох буюу зааглагдсан гэдэгт зөрчинө. Иймд $g(x) \equiv 0$ буюу $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = cx$ байна.

Тэмдэглэхэд, Кошийн функц нь шугаман функц гардаг байх нэмэлт нөхцлүүд нь дээрх таван нөхцлүүдээр хязгаарлагдахгүй олон бий.

Жишээ 5. Дараах чанаруудыг хангах бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол. Үүнд:

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x + y) = f(x) + f(y)$ байна.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ хувьд $f(xy) = f(x)f(y)$ байна.

Бодолт. $x \geq 0$ үед $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$ байна. Өмнө дурдагдсан 4-р нэмэлт нөхцөл ёсоор $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = cx$, $c = f(1)$ болно. (b)-д $x = y = 1$ гэвэл $c = c^2$ буюу $c = 0$ эсвэл $c = 1$ болно. Иймд $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = 0$ эсвэл $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд $f(x) = x$ байна. $\square$

Эцэст нь тэмдэглэхэд

$$(a) \quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

$$(b) \quad f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$(c) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

тэгшитгэлүүд нь Кошийн хэлбэрийн функционал тэгшитгэлүүд гэж нэрлэгддэг ба хялбар орлуулгуудаар Кошийн функционал тэгшитгэл рүү шилждэг. Кошийн хэлбэрийн функционал тэгшитгэлүүдийг авч үзэж байгаа үед функцийн тодорхойлогдох муж болон утгын мужийг зөв өгөх нь чухал юм.

Дасгалууд

Дасгал 1. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(xf(y)) = xy$$

байх бүх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: $\frac{f(x)}{x}$ -г тогтмол гэж харуул.

Дасгал 2. (Беларус, 2005) Дурын $m, n \in \mathbb{N}$ хувьд

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

байх бүх $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функцийг ол.

Санаа: $F(n) = f(n) - n$ функцийг авч үз.

Дасгал 3. (ОУМО, 1990) Дурын $x, y \in \mathbb{Q}^+$ хувьд

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

байх бүх $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ функцийг ол.

Дасгал 4. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$$

байх бүх тасралтгүй $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Дасгал 5. (ОУМО, 1968) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ба $\forall x \in \mathbb{R}$, бэхлэгдсэн $a \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$$

биелдэг бол

(i) f -г үетэй гэж батал.

(ii) $a = 1$ үед бодлогын нөхцлийг хангах f функцийг жишээг гарга.

Санаа: x -д $(x+a)$ -г орлуулж $f(x+2a) = f(x)$ гэдгийг харуул.

Дасгал 6. Өгөгдсөн a, b эерэг бодит тоонуудын хувьд

$$|x-a| + |x-b| + |x+a| + |x+b| = m(a+b)$$

тэгшитгэл ядаж нэг бодит шийдтэй байх бүх m -ийн утгуудыг ол.

Санаа: Дундаж утгын тухай теорем ашигла.

Дасгал 7. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y))$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Дасгал 8. Дурын $x, y \in \mathbb{R}^+$ хувьд

$$f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$$

байх бүх $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ функцийг ол.

Санаа: $z > 0$ үед $(x, y) = (z \cdot f(z), \frac{1}{z})$ ба $(x, y) = (z, \frac{1}{z})$ гэж орлуулж үз.

Дасгал 9. (ОУМО-Жюри, 2002) Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

байх бүх $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг ол.

Санаа: f -г сюръектив гэж харуулж $f(x_0) = 0$ байх x_0 -г авч үз.

Дасгал 10. f нь ямар нэг бэхлэгдсэн $a \in \mathbb{R}$ ба $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд

$$f(x+a) = \frac{f(x)-3}{f(x)-2}$$

нөхцлийг хангадаг бол f -г үетэй гэж батал.

Санаа: 1, 2 нь f -ийн дүрд орохгүй гэдгийг ашиглан f -ийн үе нь $3a$ байна гэж харуул.

Цэгийн зэрэг

Б. Баяржаргал (МУИС)

Оршил

Энэ сэдвийн хүрээнд зарим нэг тойргийн шинж чанарууд болон тэдгээртэй холбоотой математикийн олимпиадуудад ирсэн жишээ бодлогуудыг авч үзэх болно. Үүнд

1. Цэгийн зэрэг
2. Радикал тэнхлэг ба төв

зэрэг ойлголтуудыг судлах болно. Энэ нь дараа дараагийн арга техникүүдийн үндэс болох талтай.

Цэгийн зэрэг

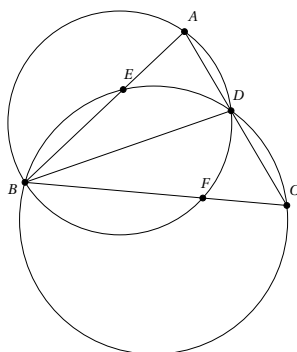
Теорем (Огтлолцсон хөвчүүдийн теорем). Бидэнд ω тойрог болон түүн дээр үл орших P цэг өгөгдөв. P -г дайрсан L шулуун ω тойргийг A ба B цэгүүдээр огтолдог бол $PA \cdot PB$ нь L шулуунаас үл хамаарна.

P цэг тойргийн гадна байх үед $PA \cdot PB = PT^2 = OP^2 - r^2$ болно, энд O нь тойргийн төв, T нь шүргэлтийн цэг, r нь тойргийн радиус.

Тодорхойлолт (Тойргийн хувьдах цэгийн зэрэг). O төвтэй, r радиустай, ω тойрог өгөгдөв. Хавтгайн P цэгийн уг тойргийн хувьдах цэгийн зэрэг гэдэг нь $pow(P, \omega) = OP^2 - r^2$ тоог хэлнэ.

Тодорхойлолтоос P цэг ω тойргийн дотор байвал цэгийн зэрэг нь сөрөг, P цэг ω тойргийн гадна байвал цэгийн зэрэг нь эерэг, P цэг ω тойрог дээр байвал цэгийн зэрэг нь тэг байна.

Жишээ 1. (Санкт-Петербургийн олимпиад 1996) ABC гурвалжинд BD дотоод биссектрис татав. BDC гурвалжныг багтаасан тойрог AB талыг E цэгт, ABD гурвалжныг багтаасан тойрог BC талыг F цэгт тус тус огтолдог бол $AE = CF$ гэж батал.



Бодолт. Огтлолцсон хөвчүүдийн теорем ёсоор $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ буюу

$$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB},$$

мөн $CF \cdot CB = CD \cdot CA$ буюу

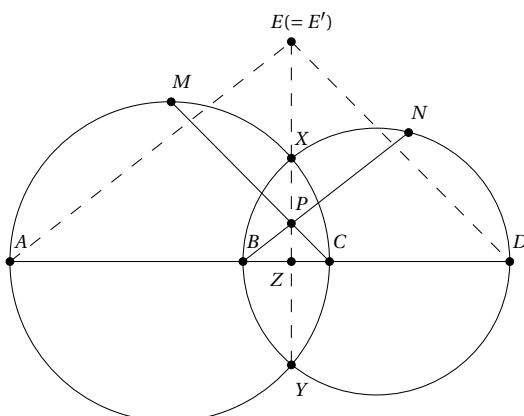
$$CF = \frac{CD \cdot CA}{CB}$$

болно. Эндээс

$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \cdot CB}{AB \cdot CD} = 1$$

болж батлагдав, энд сүүлийн тэнцэтгэлд биссектрисийн чанар ашиглав. $\square$

Жишээ 2. (IMO 1995) Шулуун дээр A, B, C ба D цэгүүд энэ дараалалаар өгөгдөв. AC ба BD -ээр диаметрээ хийсэн тойргууд X ба Y цэгүүдээр огтлолцоно. XY шулуун BC -тэй Z цэгт огтлолцоно. P нь Z -ээс ялгаатай XY шулуун дээр орших цэг бөгөөд CP шулуун AC диаметртэй тойрогтой S ба M цэгүүдээр, BP шулуун BD диаметртэй тойрогтой B ба N цэгүүдээр тус тус огтлолцдог бол AM, DN, XY шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.



Бодолт. XY шулуун дээр E ба E' цэгүүдийг DE нь CM -тэй параллел, AE' нь BN -тэй параллел байхаар авав. Тэгвэл төсөөтэй гурвалжнуудын чанар ёсоор

$$\frac{ZE'}{ZE} = \frac{ZE'}{ZP} \cdot \frac{ZP}{ZE} = \frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{ZC}{ZD}$$

болно. Мөн огтлолцсон хөвчүүдийн теорем ёсоор $ZA \cdot ZC = ZX \cdot ZY = ZB \cdot ZD$ учир $ZE = ZE'$ болно. Одоо AM, DN, XY шулуунууд нь ADE гурвалжны өндрүүд учир нэг цэгт огтлолцоно. $\square$

Огтлолцсон хөвчүүдийн теоремын урвуу нь мөн хүчинтэй байдаг бөгөөд энэ нь цэгүүдийн нэг тойрог дээр оршихыг баталдаг нилээн сайн арга юм.

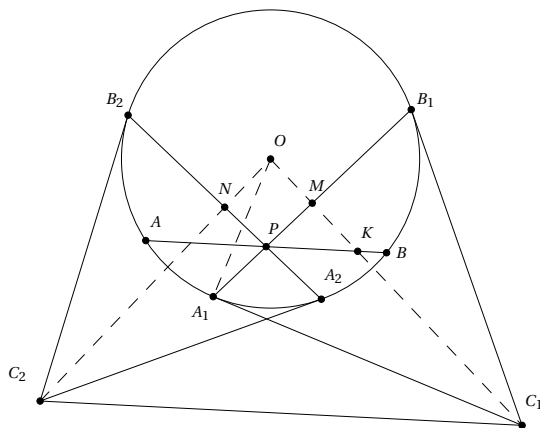
Теорем (Огтлолцсон хөвчүүдийн теоремын урвуу теорем). Хэрэв AB ба CD шулуунууд нь P цэгт огтлолцдог ба тэмдэгт уртуудын хувьд $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ нөхцөл биелэдэг бол A, B, C, D цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

Энд тэмдэгт ургууд гэдэг нь векторын тэмдэгээр илэрхийлэгдэнэ.

Бодолт. A, B, C цэгүүдийг дайрсан тойрог авч үзье. Энэ тойргийн PD -тэй огтлолцох цэгийг D' гэвэл $PA \cdot PB = PC \cdot PD' = PC \cdot PD$ болох ба энэ нь $D = D'$ болохыг харуулж байна. $\square$

Жишээ 3. AB нь тойргийн диаметрээс ялгаатай хөвч байг. Түүний дундаж цэг P -г дайрсан A_1B_1 ба A_2B_2 гэсэн хөвчүүд авъя. Хэрэв A_1 ба B_1 цэгүүдэд татсан шүргэгч шулуунууд C_1 цэгт, A_2 ба B_2 цэгүүдэд татсан шүргэгч шулуунууд C_2 цэгт тус тус огтлолцдог бол C_1C_2 нь AB -тэй параллел гэж батал.

Бодолт.



Хэрэв O нь тойргийн төв ба OC_1 нь A_1B_1 -тэй M цэгээр, OC_2 нь A_2B_2 -той N цэгээр, OC_1 нь AB -тэй K цэгээр тус тус огтлолцдог гэе. Тэгвэл $\angle OMP = \angle ONP = 90^\circ$ байх тул O, M, P, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Эндээс $\angle ONM = \angle OPM = 90^\circ - \angle MOP = \angle OKA$ (*) болно. Мөн $\triangle OA_1C_1$ ба $\triangle OB_2C_2$ нь тэгш өнцөгт гурвалжингууд учир

$$OM \cdot OC_1 = OA_1^2 = OB_2^2 = ON \cdot OC_2$$

байна. Иймд M, C_1, C_2, N цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Иймээс $\angle OC_1C_2 = \angle ONM$ (*) болж батлагдав. $\square$

Хэрэв бидэнд үл давхцах O_1, O_2 төвтэй, харгалзан r_1, r_2 радиустай тойргууд өгөгдсөн байг. Тэгвэл бид энэ хоёр тойргийн хувьд цэгийн зэргүүд нь ижил байх цэгүүдийн геометр байрыг олъё. Ийм шинж чанартай цэг O_1, O_2 цэгүүдийг холбосон шулуун дээр байх нь ойлгомжтой бөгөөд түүнийг S гэвэл бусад цэгүүдийн хувьд тэр цэгээс O_1O_2 хэрчимрүү буулгасан перпендикулярин суурь нь S гэдгийг хялбархан харж

болно. Иймээс геометр байр нь $O_1 O_2$ -д перпендикуляр S -ийг дайрсан шулуун байна. Энэ шулууныг уг 2 тойргийн радикал тэнхлэг гэнэ. Харин төвүүд нь нэг шулуун дээр үл орших 3-н тойргийн хувьд хос хосоор нь авсан радикал тэнхлэгүүд нэг цэгт огтлолцох бөгөөд түүнийг радикал төв гэнэ.

Жишээ 4. (USAMO 1997) ABC гурвалжны BC , CA , AB талууд дээр гадаад байдлаар BCD , CAE , ABF гэсэн адил хажуут гурвалжнууд байгуулав. Тэгвэл A , B , C цэгүүдийг дайрдаг харгалзан EF , FD , DE шулуунуудад перпендикуляр шулуунууд нэг цэгт огтлолцоно гэж батал.

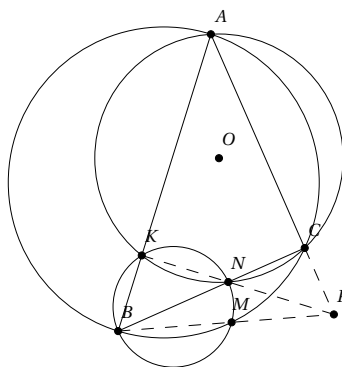
Бодолт. Хэрэв бид D дээр төвтэй DB радиустай, E дээр төвтэй EC радиустай, F дээр төвтэй FA радиустай тойргуудыг байгуулбал эдгээр тойргуудын радикал тэнхлэгүүд нь бидний байгуулсан шулуунууд болж огтлолцолын цэг нь радикал төв байх хэрэгтэй болсноор бодлого бодогдоно. $\square$

Жишээ 5. (IMO 1985-5) O цэгт төвтэй ABC гурвалжны A ба C цэгүүдийг дайрсан тойрог AB ба BC талуудыг харгалзан K , N цэгүүдээр огтолдог байг. ABC ба BKN гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд B ба M гэсэн цэгүүдээр огтлолцдог бол $\angle OMB = 90^\circ$ гэж батал.

Энэ жишээг бодоход бидэнд дараах Лемм хэрэглэгдэнэ.

Лемм. Хэрэв A , B , P , Q цэгүүд нь хавтгайн ялгаатай цэгүүд бол $AB \perp PQ$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2$ байх явдал юм.

Бодолт. (Жишээ 5)



Бодлого дээр байгуулагдсан гурван тойргийн радикал төв буюу AC , KN , BM шулуунуудын огтлолцолын цэгийг P гэе. Зурагт үзүүлснээр $\angle PCN = \angle AKN = \angle BMN$ учир $PCNM$

нь тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт болно. Огтлолцсон хөвчүүдийн теорем ёсоор $PM \cdot PB = PC \cdot PA = OP^2 - r^2$ болно, энд r нь AKC гурвалжинг багтаасан тойргийн радиус. Мөн ижил аргаар бид нар $BM \cdot BP = BN \cdot BC = OB^2 - r^2$ гэж харуулж чадна. Эндээс

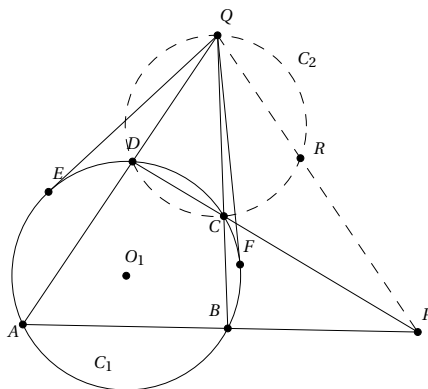
$$\begin{aligned} OB^2 - OP^2 &= BM \cdot BP - PM \cdot PB \\ &= BP \cdot (BM - PM) \\ &= (BM + PM) \cdot (BM - PM) \\ &= BM^2 - PM^2 \end{aligned}$$

буюу Лемм ёсоор $OM \perp BP$ болж батлагдав.

□

Жишээ 6. (СМО 1997) $ABCD$ нь тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт ба AB ба CD шулуунуудын огтлолцолын цэг P , AD ба BC шулуунуудын огтлолцолын цэг нь Q байг. Q цэгээс багтаасан тойрогт QE , QF гэсэн шүргэгчүүд татсан бол P , E , F цэгүүд нэг шулуун дээр оршино гэж батал.

Бодолт. $ABCD$ -г багтаасан тойрог C_1 ба төв нь O_1 байг. QCD -г багтаасан тойрог C_2 ба түүний PQ -тэй огтлолцох цэгийг R гэе. Тэгвэл $\angle PRC = \angle QCD = \angle ABC$ учир $PRCB$ нь тойрогт багтана. Өмнөх жишээтэй адилаар $O_1P^2 - O_1Q^2 = PR^2 - QR^2$ гэж харуулж болох ба энэ нь $O_1R \perp PQ$ гэдгийг харуулна. Иймээс Q , F , O_1 , E , R цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Хэрэв энэ тойргийг C_3 гэвэл C_1 , C_2 -ийн радикал тэнхлэг нь CD , C_2 , C_3 -ийн радикал тэнхлэг нь QR болох бөгөөд эдгээр шулуунууд нь P цэгт огтлолцоно. Энэ цэг нь C_1 , C_3 -ийн радикал тэнхлэг болох EF дээр оршино.



□

Жишээ 7. (IMO 2011 дэвшигдсэн бодлого) ABC гурвалжин нь ω багтаасан тойрогтой, I гэсэн багтсан тойргийн төвтэй байг. AI ба BI шулуунуудын ω тойрогтой огтлолцох цэгүүд нь харгалзан D ба E бөгөөд DE хөвч AC -тэй F цэгээр, BC -тэй G цэгээр тус тус огтлолцдог байг. F -ийг дайрсан AD -тэй параллель шулуун ба G -г дайрсан BE -тэй параллель шулуунуудын огтлолцолын цэгийг P гэе. A ба B цэгт татсан шүргэгчүүд K цэгт огтлолцдог бол AE , BD , KP шулуунууд нэг бол параллель үгүй бол нэг цэгт огтлолцоно гэж харуул.

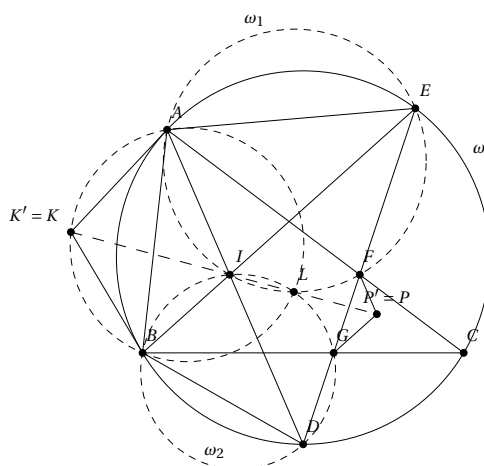
Бодолт. $\angle IAF = \angle DAC = \angle BAD = \angle BED = \angle IEF$ гэдгээс $AIFE$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтах ба уг тойргийг ω_1 гэе. Мөн ижил аргаар $BDGI$ дөрвөн өнцөгтийг тойрогт багтана гэж харуулж болох бөгөөд уг тойргийг ω_2 гэе. AE шулуун нь ω ба ω_1 тойргуудийн, BD шулуун нь ω ба ω_2 тойргуудийн радикал тэнхлэг болно. ω_1 ба ω_2 тойргуудын хоёр дахь огтлолцолын цэгийг L гэе (хэрэв тойргууд шүргэлцдэг бол $I = L$ байна). IL шулууны ABL ба FGL гурвалжнуудыг багтаасан тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг харгалзан K' , P' гэвэл

$$\begin{aligned}\angle(AB, BK') &= \angle(AL, LK') = \angle(AL, LI) = \\ &= \angle(AE, EI) = \angle(AE, EB) = \angle(AB, BK)\end{aligned}$$

учир $BK' \parallel BK$. Ижил аргаар бид $AK' \parallel AK$ гэж харуулж чадна. Иймээс $K = K'$ байна. Мөн

$$\begin{aligned}\angle(P'F, FG) &= \angle(P'L, LG) = \angle(IL, LG) = \\ &= \angle(ID, DG) = \angle(AD, DE) = \angle(PF, FG)\end{aligned}$$

учир $P'F \parallel PF$ болох ба ижил аргаар $P'G \parallel PG$ гэж харуулж болох ба эндээс $P' = P$ болно. Иймд IL шулуун нь ω_1 ба ω_2 тойргуудын радикал тэнхлэг болох учир AE , BD , KP шулуунууд нэг бол параллель үгүй бол нэг цэгт огтлолцоно.



□

Дасгалууд

Дасгал 1. A, B цэгүүд ба k бодит тоо өгөгдөв. Тэгвэл $PA^2 - PB^2 = k$ байх P цэгийн геометр байр нь AB -д перпендикуляр шулуун гэж батал.

Санаа: P цэгээс AB буулгасан перпендикулярын суурийг тогтмол гэж харуул.

Дасгал 2. Леммийг батал.

Санаа: Дасгал 1-ийг ашигла.

Дасгал 3. (MOP 1995) ABC гурвалжин түүний BC тал дээр D, E цэгүүд авав. A цэгийг дайрсан тойрог AB, AC, AD, AE шулуунуудыг харгалзан P, Q, R, S цэгүүдээр огтлолцдог бол

$$\frac{AP \cdot AB - AR \cdot AD}{AS \cdot AE - AQ \cdot AC} = \frac{BD}{CE}$$

гэж батал.

Санаа: Өгсөн тойргийн төв O , радиус нь r байг. Цэгийн зэрэг ашиглан

$$AP \cdot AB = AB^2 - PB \cdot AB = AB^2 - BO^2 + r^2 \quad \text{ба} \quad AR \cdot AD = AD^2 - DO^2 + r^2$$

гэж гаргаад цааш нь бод.

Дасгал 4. (USAMO 1998) ω_1 дотроо ω_2 тойрог нь багтдаг нэг төвтэй 2 тойрог өгөгджээ. ω_1 -ийн A цэгээс ω_2 тойрогт AB ($B \in \omega_2$) шүргэгч татав. AB -ийн ω_1 -тэй огтлолцох цэгийг C , AB -ийн дундаж цэгийг D гэе. A -г дайрсан шулуун ω_2 тойргийг E, F цэгүүдээр DE, CF -ийн дундажад татсан перпендикулярууд M цэгээр AB шулуун дээр огтлолцож байсан бол AM/MC харьцааг ол.

Санаа: $\triangle ACF \cong \triangle AEB$ гэдгийг цэгийн зэрэг ашиглан гарга.

Дасгал 5. (IMO 1994 дэвшигдсэн бодлого) ω тойрог нь хоорондоо параллел l_1, l_2 шулуунуудыг шүргэдэг байг. Хоёр дахь тойрог ω_1 нь l_1 -ийг A цэгт, ω тойрогийг C цэгт шүргэдэг ба гурав дахь тойрог ω_2 нь l_2 -ийг B цэгт, ω тойрогийг D цэгт, ω_1 тойргийг E цэгт тус тус шүргэдэг байв. Хэрэв AD нь BC -тэй Q цэгт огтлолцдог бол $QC = QD = QE$ гэж батал.

Санаа: l_1, l_2 -ийн ω тойрогтой огтлолцох цэгүүдийг X, Y гэвэл $BECY$ нь тойрогт багтана. Иймд A -г ω, ω_2 тойргуудын радикал тэнхлэг дээр байна гэж гаргаж болно. Мөн BC нь ω, ω_1 тойргуудын радикал тэнхлэг болно.

Дасгал 6. (USA TST 2004/4) ABC гурвалжин түүн дотор D цэг өгөгдөв. B ба D -г дайрсан ω_1 , C ба D -г дайрсан ω_2 тойргуудыг D -ээс ялгаатай цэгээр AD шулуун дээр огтлолцдог байхаар байгуулав. ω_1, ω_2 тойргууд нь BC талтай харгалзан E, F цэгүүдээр огтлолцдог ба DF, AB -ийн огтлолцол нь X, DE, AC -ийн огтлолцол нь Y бол XY нь BC -тэй параллел гэж батал.

Санаа: X , Y болон D цэгүүдтэй нэг тойрог дээр оршдог 2 цэгийг ол.

Дасгал 7. $ABCD$ ба $CDEF$ -үүд нь тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтүүд бөгөөд AB , CD , EF -үүд нь нэг цэгт огтлолцдог бол $EFAB$ нь нэг тойрог дээр оршино гэж батал. Бүр ерөнхий тохиолдолд хэрэв ω_1 , ω_2 тойргууд нь l гэсэн радикал тэнхлэгтэй бөгөөд A , B нь ω_1 тойрог дээр, C , D нь ω_2 тойрог дээр оршдог бөгөөд AB , EF шулуунууд нь D цэгээр l шулуун дээр огтлолцдог бол A , B , E , F цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

Санаа: Радикал төвийг ашигла.

Дөрвөн өнцөгтүүд

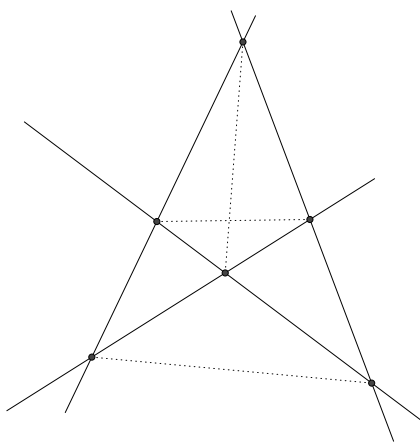
Д.Пүрэвсүрэн (МУИС)

Оршил

Дөрвөн өнцөгттэй холбоотой онцлог чанарууд ба байгууламжууд тэдгээрийг нэгтгэн бодлого бодоход хэрхэн хэрэглэгдэж буй талаар өгүүлэх болно. Үүнд:

1. Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн Гауссын шулуун, Оберын шулуун
2. Мигелийн цэг
3. Багтсан дөрвөн өнцөгт: Симпсоны шулуун, Брокардын теорем
4. Багтаасан дөрвөн өнцөгт: Ньютон-Гауссын шулуун

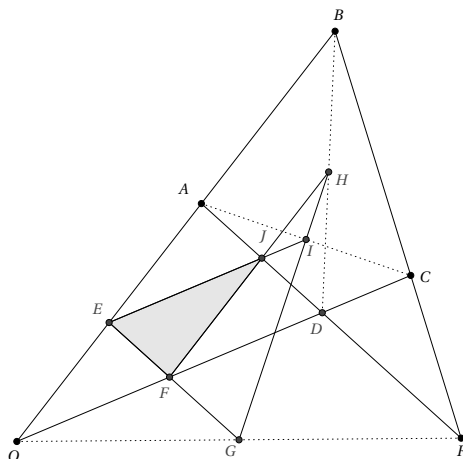
Тодорхойлолт (Гүйцэд дөрвөн өнцөгт). Ерөнхий байршилтай дөрвөн шулуун ба тэдгээрийн огтлолцолд үүсэх зургаан цэгүүдийг хамтад нь **гүйцэд дөрвөн өнцөгт** гэнэ. Эдгээр 6 цэгийг холбосон хэрчмүүд нь өгсөн шулуунуудад агуулагдахгүй 3 хосод хуваагдах ба эдгээр хэрчмүүдийг диагоналиуд, эдгээрээс нэг шулуун дээр орших 3 цэг авах бүрд үлдсэн 3 цэгүүдээр үүсэх дөрвөн гурвалжинг үүссэн дөрвөн гурвалжин гээ.



Зураг дээр гүйцэд дөрвөн өнцөгтийг дүрсэлж диагоналиудыг тасархай шугамаар тэмдэглэсэн болно. Энэхүү ойлголт нь бидний мэдэх ердийн дөрвөн өнцөгтийг эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүд ба диагоналиудын огтлолцлын цэгтэй хамт авч үздэгээрээ ялгаатай юм.

Гауссын шулуун, Оберын шулуун

Теорем (Гауссын шулуун). Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудын дундаж цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. (Энэхүү шулууныг Гауссын шулуун гэнэ.)



Баталгаа. $ABCDQR$ гүйцэд дөрвөн өнцөгт ба AC , BD , QR диагоналиудын дундаж цэгүүд- ийг харгалзан I , H , G гэж тэмдэглэе. $\triangle ADQ$ -ны талуудын дундаж цэгүүдийг харгалзан E , J , F гэвэл $EJ \parallel QD$, $\Rightarrow E$, J , I цэгүүд коллинеар ба адилхнаар $JF \parallel AQ$, $\Rightarrow F$, J , H цэгүүд коллинеар, $EF \parallel AD$, $\Rightarrow E$, F , G цэгүүд коллинеар тус тус болно. Иймд $\triangle EJF$ -ны талуудын үргэлжлэл дээр орших H , I , G цэгүүд коллинеар гэдгийг батлахын тулд Менелайн теорем ёсоор $\frac{FG}{GE} \cdot \frac{EI}{IJ} \cdot \frac{JH}{HF} = 1$ гэж баталбал хангалттай. Гэтэл дээрх параллель чанараас

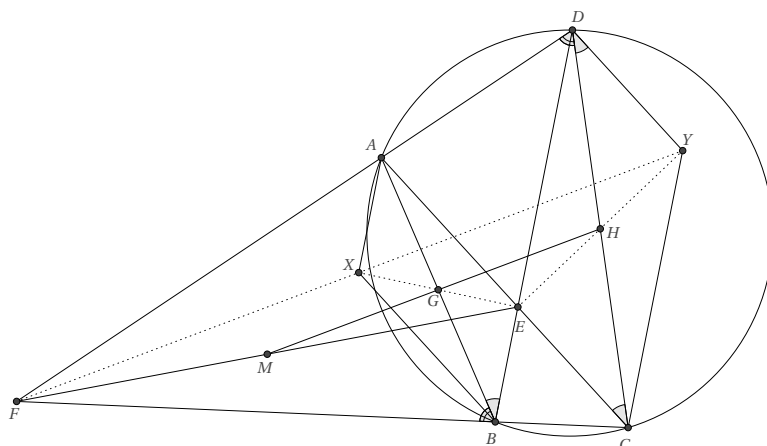
$$\frac{FG}{GE} \cdot \frac{EI}{II} \cdot \frac{JH}{HF} = \frac{DR}{RA} \cdot \frac{QC}{CD} \cdot \frac{AB}{BO} = 1$$

болж батлагдав. Сүүлийн хэсэг $\triangle ADQ$ -ны талуудын үргэлжлэл дээрх B , C , R коллинеар цэгүүдийн хувьд дахь Менелайн теорем юм. $\square$

Теорем (Оберын шулуун). Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн үүссэн дөрвөн гурвалжны ортоцентрүүд нэг шулуун дээр орших (Оберын шулуун гэдэг) ба энэ нь Гауссын шулуунд перпендикуляр байна.

Жишээ 1. (SL 2009 G4) $ABCD$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналууд E огтлолцох ба AD, BC шулуунууд F цэгт огтлолцоно. AB, DC талуудын дундаж цэгүүд харгалзан G, H бол EF шулуун E, G, H цэгүүдийг дайрсан тойргийг шүргэнэ гэж батал.

Бодолт.



EF -н дундаж цэгийг M гэвэл өмнөх бодлого ёсоор M, G, H коллинеар юм. Зураг дээрхээр $AEBX, DECY$ параллелограммууд байгуулбал G, H цэгүүд диагоналиудын огтлолцлын цэг ба эндээс X, G, E ба F, H, Y цэгүүд коллинеар ба G, H дундаж болох тул Фалесын теорем ёсоор $MG \parallel FX, GH \parallel XY$ тул F, X, Y цэгүүд коллинеар болно. Байгуулалт ёсоор $DY \parallel AC, BX \parallel CE$ ба $ABCD$ тойрогт багтсан тул $\angle FBA = \angle FDC$ болж $FAEB, FCYD$ дөрвөн өнцөгтүүдийн өнцгүүд нэг нэгээрээ харгалзан тэнцүү.

Гэтэл $\triangle AEB \sim \triangle CYD, \triangle AFB \sim \triangle CFD$ гэдгээс $FAEB, FCYD$ дөрвөн өнцөгтүүд төсөөтэй. $\angle DFY = \angle BFE$ буюу $\angle DYF = \angle BEF$ юм.

$AEBX, DECY$ параллелограммуудаас $\angle DYE = \angle BEX$ болох ба $\angle XEM = \angle ZEB - \angle FEB = \angle DYE - \angle DYF = \angle XYF = \angle GHE$ болж батлагдав. (тойргийн хөвчийн нэг үзүүрийн цэгийг дайрсан шулуун тойргийг шүргэхийн тулд уг хөвчтэй түүнд тулсан өнцөгтэй тэнцүү өнцөг үүсгэх юм.) $\square$

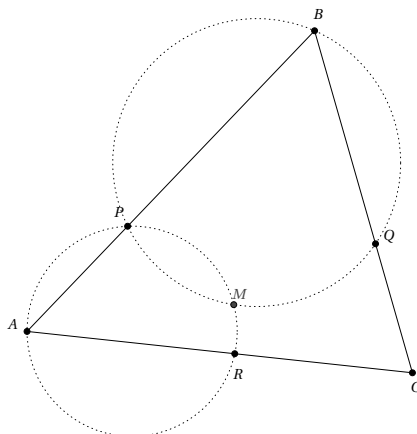
Мигелийн цэг

Бидний мэдэх гурвалжны хувь дахь Мигелийн цэг нь дараах леммээр тодорхойлогдоно.

Лемм. $\triangle ABC$ -ны AB, BC, CA талууд дээр харгалзан орших P, Q, R цэгүүдийн хувьд $\triangle APR, \triangle BQP, \triangle CRQ$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргууд Мигелийн цэг дээр огтлолцоно.

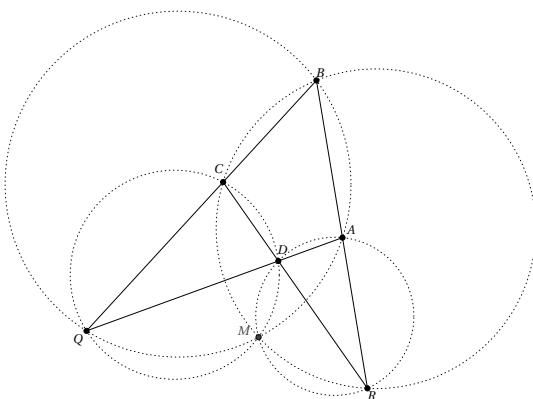
Баталгаа. M нь $\triangle APR, \triangle BPQ$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын хоёр дахь огтлолцлын цэг байг. Тэгвэл $\angle CQM = \angle BPM = \angle ARM = 180^\circ - \angle CRM$ болж $RCQM$ дөрвөн өнцөгт тойрогт багтана. Иймд гурван тойрог M цэгт огтлолцоно. $\square$

Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн хувь дахь Мигелийн цэг дараах теоремоор илэрхийлэгдэнэ.



Теорем (Мигелийн цэг). Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн үүсгэсэн дөрвөн гурвалжныг багтаасан тойргууд нэг цэгт огтлолцоно. Энэхүү цэгийг гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн хувь дахь Мигелийн цэг гэдэг.

Баталгаа. M нь $\triangle CDQ$, $\triangle ADR$ гурвалжнуудыг багтаасан тойргуудын хоёр дахь огтлолцлын цэг байг. $\angle QMA = \angle QMD + \angle DMA = \angle DCB + \angle DRA = 180^\circ - \angle CBA$ тул Q, M, A, B цэгүүд нэг тойрог дээр оршино. Адилхнаар $\triangle CBR$ гурвалжныг багтаасан тойрог M цэгийг дайрна.



□

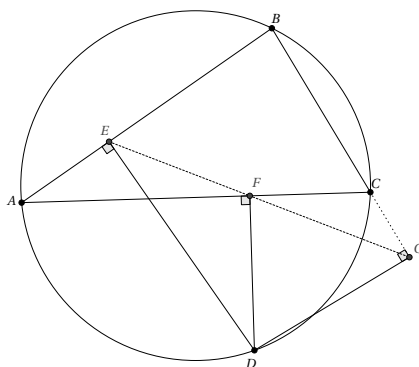
Багтсан дөрвөн өнцөгт

Теорем (Симпсоны шулуун). $ABCD$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгтийн D оройгоос AB , AC , BC шулуунууд руу буулгасан перпендикулярын сууриуд нэг шулуун дээр оршино. (Симпсоны шулуун) Буцаагаад A, B, C, D цэгүүдийн аль нэгээс үлдсэн цэгүүдийг холбосон шулуунууд руу буулгасан перпендикулярын сууриуд нэг шулуун дээр оршдог бол эдгээр цэгүүд нэг тойрог дээр оршино.

Баталгаа. D цэгээс $\triangle ABC$ -ны талууд руу буулгасан перпендикулярын суурийг зүраг дээрхээр E, F, G гэж тэмдэглэе.

$\Rightarrow$) баталъя. $ABCD$ тойрогт багтсан байг. $DECG, AEFD$ дөрвөн өнцөгтүүд тойрогт багтсан ба иймд $\angle CFG = \angle CDG = 90^\circ - \angle DCG$ болно. $ABCD$ тойрогт багтах тул $\angle EAD = \angle DCG$ буюу $\angle CDG = 90^\circ - \angle EAD = \angle ADE$ болно. Эндээс $\angle AFE = \angle ADE = \angle CDG = \angle CFG$ болж E, F, G цэгүүд коллинеар юм.

$\Leftarrow$) E, F, D цэгүүд коллинеар байг. ө.х. $\angle CFG = \angle EFA$ байг. Тэгвэл $DECG, AEFD$ тойрогт багтах тул $\angle ADE = \angle CDG$ ба $\angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle CDG + \angle EDC = \angle EDG$ болно. $DEBG$ тойрогт багтана гэдгээс $\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle EDG = 180^\circ$ болж батлагдав.



□

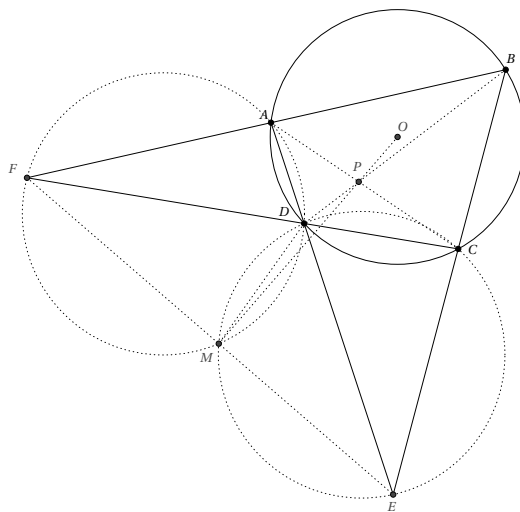
Гуйцэд дөрвөн өнцөгтийн онцлог шинжтэй Мигелийн цэгийн тохиолдлыг дараах теоремоос харж болно.

Лемм. $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгт ба эсрэг талуудын огтлолцлын цэгүүд Q, R бол үүсэх гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн Мигелийн цэг M нь QR шулуун дээр орших гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $ABCD$ тойрогт багтах ба энэхүү тойргийн төвийг O гэвэл $OM \perp QR$ байх юм.

Теорем (Брокардын теорем). $ABCD$ нь O төвтэй ω тойрогт багтсан ба $AC \cap BD = P, AB \cap DC = F, AD \cap BC = E$ бол F, P, E, O цэгүүдийн аль нь ч үлдсэн гурваар үүсэх гурвалжны ортоцентр болно.

Баталгаа. O цэг $\triangle EFP$ -ны ортотөв болохыг баталъя. M Мигелийн цэг өмнөх бодлого ёсоор $M \in EF$ ба $FM \cdot EF = FD \cdot FC = FA \cdot FB, EF \cdot EM = EC \cdot EB$ тул эдгээрийг нэмбэл $EF^2 = EF(EM + FM) = FA \cdot FB + EC \cdot EB = OF^2 - r^2 + OE^2 - r^2$ болно.

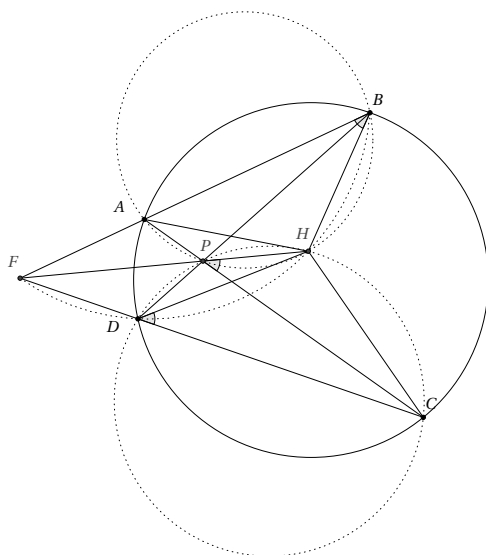
Яг адилхан тооцоог FP -н хувьд хийхийн тулд $\triangle APB$ -г багтаасан тойргийг FP шулуун огтлох хоёр дахь цэгийг H гэвэл $DPHC$ тойрогт багтах ба өнцөг тооцвол мөн $FDHB$ тойрогт багтана.



Эндээс $FP \cdot FH = FA \cdot FB = OF^2 - r^2$, $FP \cdot PH = DP \cdot PB = r^2 - OP^2$ тул $FP^2 = FP(FH - PH) = OF^2 + OP^2 - 2r^2$ болно. Яг адилхнаар $\triangle CPB$ -г багтаасан тойргийг EP шулуун огтлох хоёр дахь цэгийг тэмдэглэн тооцоо хийж $EP^2 = OE^2 + OP^2 - 2r^2$ болохыг батална.

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 - 2r^2, FP^2 = OF^2 + OP^2 - 2r^2, EP^2 = OE^2 + OP^2 - 2r^2$$

гэдгээс эхний хоёроос $EF^2 - FP^2 = OE^2 - OF^2$ болж $OF \perp EP$ ба адилхнаар $OE \perp FP$, $OF \perp EP$ болж батлагдав.



□

Жишээ 2. (IMO 1985-5) O төвтэй тойрог $\triangle ABC$ -ны A, C оройнуудыг дайрах ба AB, BC талуудыг харгалзан K, N цэгүүдэд огтолно. $\triangle ABC$ ба $\triangle KBN$ -уудыг багтаасан тойргууд B, M цэгүүдэд огтлолцох бол $\angle OMB = 90^\circ$ гэж батал.

Бодолт. $B \neq M$ гэдгээс AC, KN параллель биш ба $Q = AC \cap KN$ гэвэл M нь $ACNK BQ$ гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн Мигелийн цэг болох өмнөх лемм ба теорем ёсоор $O \in QB$, $OM \perp MB$ болно. (Энэхүү бодлогыг өмнө радикаль тэнхлэг ашиглан бодсон болно.) $\square$

Багтаасан дөрвөн өнцөгт

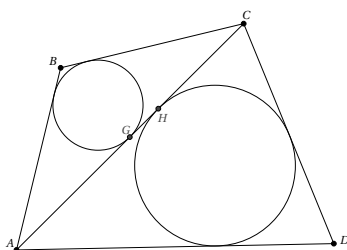
Дөрвөн өнцөгтийн тойрог багтаасан байх нэгэн нөхцлийг томъёолъё.

Лемм. $ABCD$ тойрог багтаасан байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\triangle ABC, \triangle ADC$ гурвалжнуудад багтсан тойргууд шүргэжлэх юм.

Баталгаа. Зураг дээрх тэмдэглэгээ ашиглая.

$$\begin{aligned} GH &= |AG - AH| \\ &= \left| \frac{1}{2}(AB + AC - BC) - \frac{1}{2}(AC + AD - CD) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(AB + CD - AD - BC) \right| \end{aligned}$$

тул $GH = 0 \Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$ болж батлагдав.

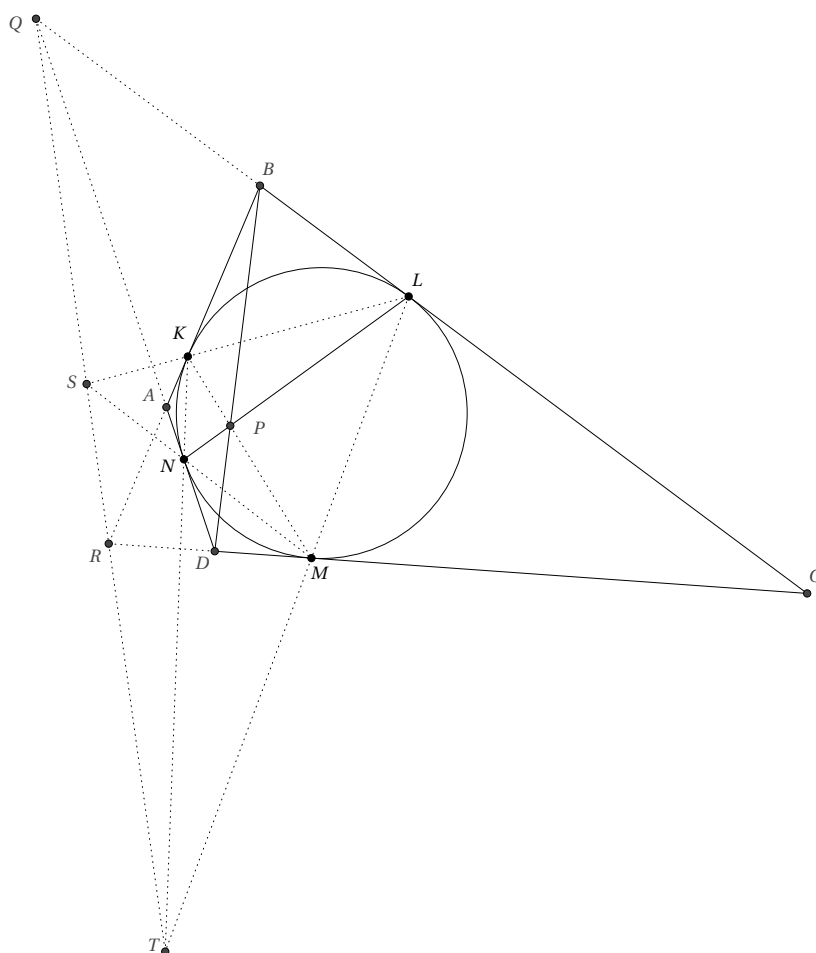


$\square$

Дараах теорем тойрог багтаасан дөрвөн өнцөгтийн түгээмэл хэрэглэгдэг маш чухал чанар юм.

Теорем. $ABCD$ дөрвөн өнцөгтөд багтсан тойрог AB, BC, CD, DA талуудыг K, L, M, N цэгүүдэд шүргэдэг байг. $AB \cap CD = R, BC \cap AD = Q, KL \cap MN = S, KM \cap LN = T$ бол

- AC, BD, KM, LN шулуунууд нэг цэгт огтолно.
- Q, R, S, T цэг шулуун дээр оршино.



Баталгаа.

$NL \cap BD = P$ гэдгээс $QN = QL$ гэдгээс $\angle QNL = \angle QLN$. Эндээс $\triangle NDP$, $\triangle LBP$ -д синусын теорем бичвэл $\frac{ND}{DP} = \frac{\sin \angle NPD}{\sin(180^\circ - \angle QNP)}$, $\frac{BL}{BP} = \frac{\sin \angle BPL}{\sin \angle QLN}$ гэдгээс $\frac{ND}{DP} = \frac{BL}{BP}$ болно.

$KM \cap BD = P'$ гэвэл өмнөхтэй адилхнаар $\frac{DM}{DP'} = \frac{BK}{BP'}$ болно. $DM = DN$, $BL = BK$ болохыг ашиглавал $\frac{BP'}{DP'} = \frac{BP}{DP}$ гэдгээс $P = P'$ болно. Иймд BD диагональ $NL \cap KM = P$ цэгийг дайрах ба адилхнаар AC диагональ P цэгийг дайрах тул батлагдав.

б) хэсгийг батлахын тулд дараах Дезаргийн теоремыг саная.

Теорем (Дезарг). $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ гурвалжнуудын хувьд AA' , BB' , CC' шулуунууд нэг цэгт огтлолцдог байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $X = AB \cap A'B'$, $Y = BC \cap B'C'$, $Z = AC \cap A'C'$ цэгүүд коллинеар байна.

$\triangle KBL$, $\triangle MDN$ гурвалжнуудын хувьд өмнөх ёсоор $KM \cap BD \cap LN = P$ гэдгээс Дезаргийн теорем хэрэглэвэл $KB \cap MD = R$, $KL \cap MN = S$, $BL \cap DN = Q$ цэгүүд нэг шулуун дээр оршино. Адилхнаар R , Q , T цэгүүд коллинеар юм. $\square$

Санамж. R, Q, T цэгүүд коллинеар тул $\triangle KBL, \triangle NDM$ гурвалжнуудын хувьд Дезаргийн теорем хэрэглэвэл S, A, C цэгүүд коллинеар болж S, A, P, C цэгүүд нэг шулуун дээр адилхнаар D, P, B, T цэгүүд нэг шулуун дээр оршино.

Теорем (Ньютон-Гауссын шулуун). *О төвтэй тойрог багтаасан $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн AC, BD диагоналиудын дундаж M, L бол O, M, L цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал. (Энэ шулууныг Ньютон-Гауссын шулуун гэдэг.)*

Баталгаа. LM нь $\triangle DMB$ -ны медиан тул $O \in LM$ гэж батлахын тулд $S_{\triangle ALO} = S_{\triangle CLO}$ болохыг батлахад хангалттай.

L, M дундаж цэгүүд учир

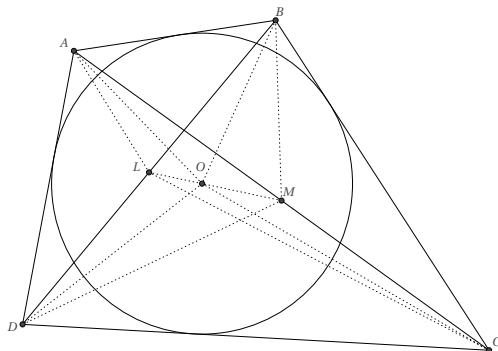
$$S_{\triangle ADL} = S_{\triangle ABL}, S_{\triangle DCL} = S_{\triangle BCL}, S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}, S_{\triangle DAM} = S_{\triangle DCM} \text{ буюу } S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCL} = S_{\triangle ABL} + S_{\triangle DCL} = \frac{S}{2},$$

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle DCM} = S_{\triangle CBM} + S_{\triangle DAM} = \frac{S}{2} \text{ болно.}$$

Нөгөө талаас $ABCD$ тойрог багтаасан гэдгээс $\frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BD \cdot r$ буюу эквивалентаар $S_{\triangle ABO} + S_{\triangle DCO} = S_{\triangle CBO} + S_{\triangle DAO} = \frac{S}{2}$ байна.

Эндээс $S_{\triangle CBO} + S_{\triangle DAO} = S_{\triangle ADL} + S_{\triangle BCL}$ болох ба $S_{\triangle CBO} - S_{\triangle BCL} = S_{\triangle ADL} - S_{\triangle DAO}$ юм.

Гэтэл $S_{\triangle CBO} - S_{\triangle BCL} = -(S_{\triangle BLO} + S_{\triangle CLO})$ ба $S_{\triangle ADL} - S_{\triangle DAO} = -(S_{\triangle ALO} + S_{\triangle DLO})$ болно. L дундаж тул $S_{\triangle BLO} = S_{\triangle DLO}$ ба $S_{\triangle ALO} = S_{\triangle CLO}$ болж батлагдав.



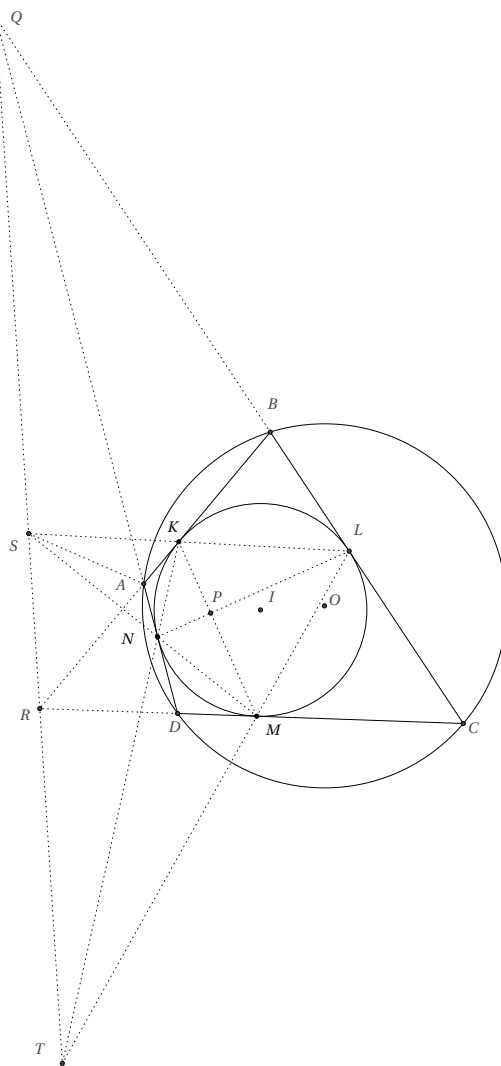
□

Санамж. Бодлогыг бодсон аргаар Аннё-гийн теорем гэж нэрлэгдэх

Паралелограммаас ялгаатай дурын $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{ADP} + S_{BCP}$ байх цэгүүдийн олонлог Гауссын шулуун байна. гэсэн өгүүлбэрийг баталж болдог.

Теорем (Багтсан ба багтаасан дөрвөн өнцөгт). *О төвтэй Ω тойрогт багтсан ба I төвтэй ω тойрог багтаасан диагоналиуд нь P цэгт огтлолцох $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд I, O, P цэгүүд нэг шулуун дээр оршихыг батал.*

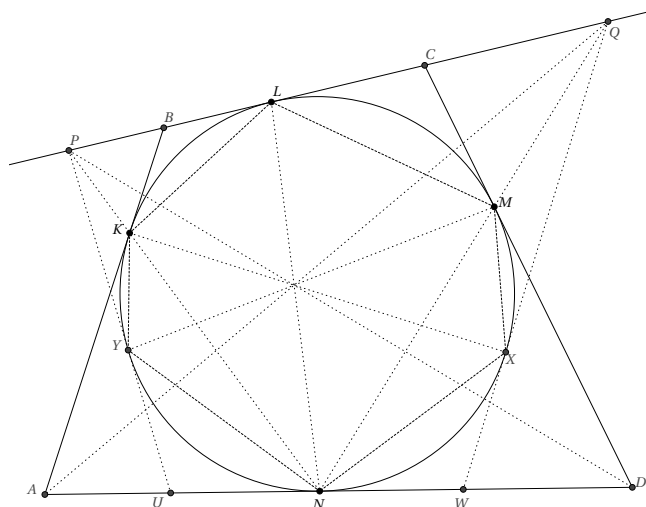
Баталгаа. $ABCD$ тойрогт багтсан гэдгээс Брокаардын теорем ёсоор $OP \perp RQ$ байна. Мөн $KLMN$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд Брокаардын теорем хэрэглэвэл $IP \perp ST$ ба $ABCD$ тойрог багтаасан тул теорем ёсоор T, R, S, Q коллинеар гэдгээс энэхүү шулуунд перпендикуляр P -г дайрсан шулуун дээр I, O цэгүүд орших болж батлагдав.



□

Жишээ 3. (ММО-51 ДБ-В2 (III даваа)) $ABCD$ - д багтсан тойрог AB, BC, CD, DA талуудыг K, L, M, N цэгүүдэд шүргэдэг байг. KN, MN шулуунууд BC талын үргэлжлэлийг харгалзан P, Q цэгт огтлолдог бол AQ, DP шулуунуудын огтлолцлын цэг LN шулуун дээр оршихыг батал.

Бодолт.



Олонлог сургуулийн багш Ганбилэгийн бодолтыг доор сийрүүлэе.

P цэгээс татсан хоёр дахь шүргэгч тойргийг Y цэгт шүргэдэг, AD талыг U цэгт, Q цэгээс татсан хоёр дахь шүргэгч тойргийг X цэгт шүргэдэг, AD талыг W цэгүүдэд тус тус огтлолдог байг.

$ABQW$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд теорем ёсоор AQ, BW, LN, KX нэг цэгт огтлолцох ба түүнийг S гэж тэмдэглэнэ.

$CDUP$ дөрвөн өнцөгтийн хувьд теорем ёсоор DP, CU, LN, MY нэг цэгт огтлолцох ба түүнийг S' гэж тэмдэглэнэ. $P \equiv P'$ гэж баталбал хангалттай.

Үүний тулд $LN \cap YM \cap KX = S$ гэж баталъя. $\triangle YPK \sim \triangle NPY \Rightarrow \frac{YN}{YK} = \frac{PN}{PY}$ болно.

Нөгөө талаас $YP = PL$ ба $\triangle PLK \sim \triangle PNL$ гэдгээс $\frac{PN}{PL} = \frac{LN}{LK}$ тул $\frac{YN}{YK} = \frac{LN}{LK}$ болно.

Яг адилхнаар $\frac{NX}{XM} = \frac{LN}{LM}$ ба эдгээрийг LN -р тэнцүүлбэл $YN \cdot KL \cdot MX = YK \cdot LM \cdot NX$ болж тойрог дээрх L, M, X, N, Y, K цэгүүдийн хувьд Чевийн теоремын хувилбар ёсоор LN, YM, KX хөвчүүд нэг цэгт огтлолцох болж батлагдав. $\square$

Санамж. Тойрог дээрх 6 цэгийн хувь дахь Чевийн теорем хувилбар нь аль нэг цэгээс эхлэн цэг алгасан холбоод үүссэн гурвалжинд чевийн теоремыг синусын хэлбэрт бичээд дараа өнцгүүдийн синусыг тулсан нумын урт ба 2 дахин авсан радиусын харьцаагаар солиод эмхтгэхэд батлагдана.

Дасгалууд

Дасгал 1. Оберийн шулууны тухай теоремийг батал.

Санаа: Гүйцэд дөрвөн өнцөгтийн диагоналиудаар диаметрээ хийсэн гурван тойрог аваад аль нэг гурвалжны ортотөвийн эдгээр тойргийн хувьд дахь цэгийн зэргүүд тэнцүү болохыг ортотөвийн чанар ашиглан батлаад эдгээр тойргийн радикаль тэнхлэгүүд давхцах ба үүн дээр ортотөвүүд орших тул бодлого бодогдох ба радикаль тэнхлэг төвүүдийг дайрсан Гауссын шулуунд перпендикуляр болох нь гарна.

Дасгал 2. Мигелийн цэгийн тухай леммийг батал.

Санаа: Өнцөг тооцон $M \in QR$ гэж тогтоон $PM^2 - QM^2 = PO^2 - QO^2$ гэж батал.

Дасгал 3. (2006 China Hong Kong Math Olimpiad) $ABCD$ гэсэн $AC \neq BD$ байх гүдгэр дөрвөн өнцөгт O төвтэй тойрогт багтсан ба $E = AC \cap BD$ байг. $ABCD$ дотор орших P цэгийн хувьд $\angle PAB + \angle PCB = \angle PBC + \angle PDC = 90^\circ$ бол O, E, P цэгүүд коллинеар гэж батал.

Санаа: P цэг A, C цэгүүдэд татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэг дээр O_1 төвтэй тэдгээрийг дайрсан тойрог дээр оршихыг баталж, мөн B, D цэгүүдэд татсан шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэг дээр O_2 төвтэй B, D -г дайрсан тойрог дээр орших ба дээрх хоёр тойргийн радикаль тэнхлэг дээр O, E, P оршино гэж батал.

Дасгал 4. (1997 Chinese Math Olimpiad) $ABCD$ тойрогт багтсан дөрвөн өнцөгт $AB \cap CD = P, AD \cap BC = Q$ байг. Q цэгээс тойрогт татсан шүргэгч тойргийг E, F цэгүүдэд шүргэх бол P, E, F коллинеар гэж батал.

Санаа: Q дээр төвтэй E, F цэгүүдийг дайрсан тойрог өгсөн тойрог хоёрын радикаль тэнхлэг дээр P оршино гэж батал.

Дасгал 5. (SL 2007 G8) $ABCD$ гүдгэр дөрвөн өнцөгтийн AB тал дээр P цэг өгчээ. $\triangle CPD$ -д багтсан ω тойргийн төвийг I гээ. ω тойрог $\triangle APD, \triangle BPC$ гурвалжинд багтсан тойргуудыг харгалзан K, L цэгүүдэд шүргэдэг ба $AC \cap BD = E, AK \cap BL = F$ гэвэл E, I, F цэгүүд коллинеар болохыг батал.

Санаа: Багтаасан дөрвөн өнцөгтийн тухай леммийг ашигла.

Дасгал 6. (SL 2008 G7) $ABCD$ нь $BA \neq BC$ байх гүдгэр дөрвөн өнцөгт байг. $\triangle ABC, \triangle ADC$ -д багтсан тойргуудыг харгалзан k_1, k_2 гээ. Хэрэв AD, CD шулуунуудыг шүргэсэн k тойрог BA цацрагыг A цэгийн дараа, BC цацрагыг C цэгийн дараа тус тус шүргэдэг бол k_1, k_2 -н гадаад ерөнхий шүргэгчүүд k тойрог дээр огтлолцохыг батал.

Санаа: AC талыг k_1, k_2 тойргууд S, T цэгүүдэд шүргэдэг гэвэл $AS = TC$ гэж батал. k_1 -г k_2 -т буулгасан гомотетийн төв гадаад ерөнхий шүргэгчүүдийн огтлолцлын цэг гэдгийг ашигла.

Монголын Математикийн Нийгэмлэг

Бакалаврын элсэлтийн шалгалт

Бодлогууд

Бодлого 2016.01.06. $y = x(x-1)(x-3)$ функцийн графикийг C , координатын эх O -г дайрсан, өнцгийн коэффициент нь t байх шулууныг l гээд, C ба l нь O -оос гадна бас өөр цэг дээр огтлолцдог гээ. C ба l -ийн огтлолцлын цэгүүдийг O, P, Q гээд $|OP|$ ба $|OQ|$ уртуудын үржвэрийг $g(t)$ гээ. Энд огтлолцлын цэгүүдийн аль нэг нь шүргэлтийн цэг бол O, P, Q цэгүүдийн хоёр нь яг тэр шүргэлтийн цэг дээрээ давхацсан байна гэж үзнэ. $g(t)$ функцийн өсөлт бууралтыг судалж, хамгийн их, хамгийн бага утгуудыг нь ол.

Бодлого 2016.01.13. Бодит a, b тоонууд авъя. Бодит x, y тоонууд нь

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

нөхцөлүүдийг хангадаг үеийн $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ илэрхийллийн хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого 2016.01.20. Координатын хавтгай дээр гурван цэг

$$P(0, -\sqrt{2}) \quad Q(0, \sqrt{2}) \quad A(a, \sqrt{a^2 + 1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

авъя.

- (1) Хоёр хэрчмийн уртуудын ялгаа $|PA| - |AQ|$ нь a -аас үл хамаарах болохыг харуулж, тэр утгыг нь ол.
- (2) Q цэгийг эхлэл болгосон A цэгийг дайрсан цацраг $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ параболыг B цэгт огтлолцдог гээ. B цэгээс $y = 2$ шулуунлуу буулгасан перпендикулярын суурийг C гээ. Тэгвэл уртуудын нийлбэр

$$|PA| + |AB| + |BC|$$

нь a -аас үл хамаарах болохыг харуулж тэр утгыг нь ол.

Бодлого 2016.01.27. Бодит a, b тоонуудын хувьд хавтгай дээрх $P_n(x_n, y_n)$ цэгүүдийг

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

гэж тодорхойлж. Дараах (i), (ii) нөхцөлүүд зэрэг биелдэг байх бүх бодит (a, b) хосыг ол.

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ нь хоорондоо ялгаатай.

Бодлого 2016.02.03. a -г бодит тоо гээд $x > 0$ муж дээр $f(x), g(x)$ функцүүдийг дараах байдлаар тодорхойлж.

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

Энэ үед $y = f(x)$ болон $y = g(x)$ -ийн графикууд $x > 0$ муж дээр яг гурван цэгээр огтлолцдог байх бүх a -г ол.

Бодлого 2016.02.17. Гурвалжин ABC -ийн хувьд $\angle BAC = 90^\circ$, $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{3}$ байдаг гэе. ABC гурвалжны дотоод цэг P нь

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|PC|} = \vec{0}$$

нөхцөлийг хангадаг гэе.

(1) $\angle APB, \angle PAC$ өнцгүүдийг ол.

(2) $|PA|, |PB|, |PC|$ уртуудыг ол.

Бодлого 2016.02.24. Дараах асуултуудад хариул.

(1) Эерэг бүхэл y тооны хувьд дараагийн тэнцэтгэл биш

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

биелдэг байх бүх бодит x тооны мужийг ол.

(2) Дараах Өгүүлбэрийг батал.

Өгүүлбэр. Дараах (a), (b) нөхцөлүүдийг хангах эерэг бүхэл A тоо оршин байна.

(a) A нь дараалсан гурван эерэг бүхэл тооны үржвэр.

(b) A -г 10 суурьтай бичихэд 1-ийн цифр нь дор хаяж 99 удаа дараалж орно.

Бодлого 2016.03.02. А, Б хоёр хүн байв. Шидэхэд сүлд болон тоо буух магадлал нь тус тус $\frac{1}{2}$ байдаг зоос нэг ширхэг байгаа бөгөөд эхлээд А зоосыг барьж байв. Дараах үйлдлийг давтан хийнэ.

- (i) А нь зоос барьж байх үед, зоосоо шидээд сүлд буувал А-д 1 оноо өгч, зоосыг А үргэлжлүүлэн барина, харин тоо буувал хэнийх нь ч оноог өөрчлөхгүй бөгөөд зоос Б-рүү шилжинэ.
- (ii) Б нь зоос барьж байх үед, зоосоо шидээд сүлд буувал Б-д 1 оноо өгч, зоосыг Б үргэлжлүүлэн барина, харин тоо буувал хэнийх нь ч оноог өөрчлөхгүй бөгөөд зоос А-руу шилжинэ.

А, Б-ийн аль түрүүлж 2 оноо авсан нь хожно. Жишээлбэл зоос шидэхэд сүлд, тоо, сүлд, сүлд гэж буусан гэвэл энэ үед А нь 1 оноотой, Б нь 2 оноотой байх тул Б нь хожно.

- (1) А, Б нийлээд яг n удаа зоос шидээд оноогоо тоолоход А нь хожих магадлал $p(n)$ -ийг ол.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ нийлбэрийг ол.

Бодлого 2016.03.09. Координатын огторгуй дахь x -хавтгай дээрх $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ тэнцэтгэл бишүүдээр тодорхойлогдох дөрвөн өнцөгт S -ийн оройн цэгүүдийг

$$A(-1, 1, 0), \quad B(1, 1, 0), \quad C(1, -1, 0), \quad D(-1, -1, 0)$$

гэе. Дөрвөн өнцөгт S -ийг BD шулууныг тэнхлэг болгон эргүүлэхэд гарах биетийг V_1 , AC шулууныг тэнхлэг болгон эргүүлэхэд гарах биетийг V_2 гэе.

- (1) $0 \leq t < 1$ байх бодит t тооны хувьд $x = t$ хавтгайгаар V_1 -ийг огтлоход гарах дүрсийн талбайг ол.
- (2) V_1 ба V_2 -ийн огтлолцол биетийн эзлэхүүнийг ол.

Бодлого 2016.03.30.

- (1) t нь тогтмол бодит тоо байг. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцийг

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

гэж тодорхойлъя. Энэ үед $f(x)$ -ийн хамгийн их утгыг t -ээр илэрхийл.

- (2) (1)-д олсон $f(x)$ функцийн хамгийн их утгыг $g(t)$ гэе. t нь $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ мужаар гүйх үеийн $g(t)$ -ийн хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого 2016.04.06. Өгөгдсөн сөрөг биш бүхэл r тооны хувьд $\{a_n\}$ дарааллыг

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

гэж тодорхойлъя. Өгөгдсөн p анхны тооны хувьд a_n -ийг p -д хуваахад гарах үлдэгдлийг b_n гэе.

- (1) Дурын натурал n тооны хувьд b_{n+2} ба $b_{n+1}(b_n + 1)$ тоонууд нь p -д ижил үлдэгдэл өгнө гэж батал.
- (2) $r = 2$, $p = 17$ үед $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ -г ол.
- (3) Ялгаатай m, n натурал тоонуудын хувьд

$$b_{m+1} = b_{n+1} > 0, \quad b_{m+2} = b_{n+2}$$

биелэх бол $b_m = b_n$ гэж батал.

Бодлого 2016.04.13. Координатын хавтгай дээр $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ цэг авав. $y = x^2$ парабол дээгүүр $Q(\alpha, \alpha^2)$ ба $R(\beta, \beta^2)$ цэгүүд нь PQR нь QR суурьтай адил хажуут гурвалжин байхаар хөдөлнө. Энэ үед PQR гурвалжны хүндийн төв $G(X, Y)$ -ийн геометр байрыг ол.

Бодлого 2016.04.20. Дурын эерэг x, y тоонуудын хувьд

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x + y}$$

тэнцэтгэл биш биелдэг байх k -ийн боломжит хамгийн бага утгыг ол.

Бодлого 2016.04.27. Натурал n тооны хувьд

$$x^n + y^n + z^n = xyz$$

тэгшитгэлийг авч үзье.

1. $n = 1$ үед дээрх тэгшитгэлийг хангадаг ба $x \geq y \geq z$ байх бүх натурал тоон гурвал (x, y, z) -г ол.
2. $n = 3$ үед дээрх тэгшитгэлийг хангах натурал тоон гурвал (x, y, z) олдохгүй гэж харуул.

Бодлого 2016.05.04. Координатын хавтгай дээр $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, -1)$ гэсэн гурван цэг өгөгдөв. Тэгвэл $\angle APC = \angle BPC$ байх A, B, C цэгүүдээс ялгаатай бүх P цэгийн геометр байрыг ол.

Бодлого 2016.05.11. $0 < c < 1$ байх бодит c тоо ба $f(x) = -4x^3 + 3x^2$ функц өгөгдөв.

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t) dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t) dt,$$

гэх мэтчилэн $n = 3, 4, 5, \dots$ үед

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t) dt,$$

гэж тодорхойлъя.

- (1) $f_n(x)$ функцийг ол.

(2) $0 < x < 1$ үед $f_n(x) = 0$ байх x цор ганц олдохыг харуул.

Бодлого 2016.05.18. Натурал n тооны хувьд $x^{n+1} - x^2 - x - 1$ олон гишүүнтэд хуваахад гарах үлдэгдлийг $a_n x + b_n$ гэж тэмдэглэе.

(1) Аливаа натурал n тооны хувьд

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

биелэхийг батал.

(2) Аливаа натурал n тооны хувьд a_n, b_n нь эерэг бүхэл тоонууд ба хоорондоо харилцан анхны байна гэж батал.

Бодолтууд

Бодолт 2016.01.06. Өнцгийн коэффициент нь t байх шулууны тэгшитгэл нь $y = tx$ бөгөөд C -тэй дор хаяж хоёр цэгээр огтлолцохын тулд $x(x-1)(x-3) = tx$ тэгшитгэл дор хаяж хоёр шийдтэй байх ёстой. Эндээс $(x-1)(x-3) = t$ тэгшитгэл шийдтэй байх ёстой буюу дискриминант $D = 4(t+1) \geq 0$ байна. Иймд $t \geq -1$.

$t > -1$ үед дээрх квадрат тэгшитгэлийн хоёр шийд нь $2 \pm \sqrt{t+1}$ ба $t = -1$ үед уг хоёр шийд давхцах нь тодорхой юм. Эндээс P, Q цэгүүдийн координатууд t -ээр илэрхийлэгдэх ба $P(2 - \sqrt{t+1}, t(2 - \sqrt{t+1})), Q(2 + \sqrt{t+1}, t(2 + \sqrt{t+1}))$ гэе. Эндээс $|OP| = |2 - \sqrt{t+1}| \cdot \sqrt{t^2 + 1}, |OQ| = (2 + \sqrt{t+1}) \cdot \sqrt{t^2 + 1}$ болох ба

$$g(t) = |OP| \cdot |OQ| = |2 - \sqrt{t+1}| \cdot (2 + \sqrt{t+1}) \cdot (t^2 + 1)$$

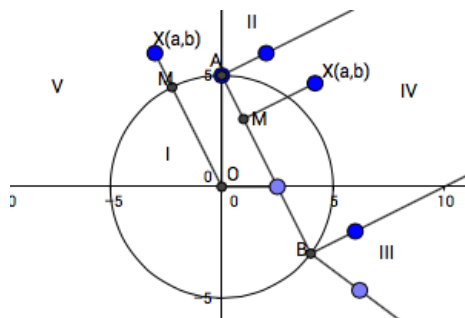
гэж олдоно.

$1 \leq t \leq 3$ үед $g(t) = (3-t)(t^2+1)$ ба $g'(t) = -3t^2 + 6t - 1$ болно. $3 \leq t$ үед $g(t) = (t-3)(t^2+1)$ ба $g'(t) = 3t^2 - 6t + 1$ болно. Аль ч тохиолдолд $g'(1 \pm \sqrt{6}/3) = 0$ гэдгээс $g(t)$ нь

$[-1, 1 - \sqrt{6}/3] \cup [1 + \sqrt{6}/3, 3]$ завсар дээр буурах ба $[1 - \sqrt{6}/3, 1 + \sqrt{6}/3] \cup [3, \infty]$ завсар дээр өснө гэж гарна. Эндээс $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ тул $g(t)$ нь хязгааргүй их утга авч чадах ба $g(t)$ -ийн хамгийн бага утга нь $g(3) = 0$ байна гэдэг нь хялбархан харагдана.

Бодолт 2016.01.13. $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2$ ба a, b нь тогтмол тул $(x-a)^2 + (y-b)^2$ илэрхийллийн хамгийн бага утгыг олох ёстой болно. Энэ илэрхийлэл нь (x, y) ба (a, b) координаттай цэгүүдийн хоорондох зайны квадрат тул өгөгдсөн (a, b) цэгээс $x^2 + y^2 = 25$ тойрог ба $2x + y = 5$ шулуунаар хашигдсан зүүн талын муж S хүртэлх хамгийн бага зайг олох ёстой болно. $x^2 + y^2 = 25$ тойрог ба $2x + y = 5$ шулууны огтлолцлын цэгүүд нь $A(5, 0), B(4, -3)$ байна. Координатын эхийг $O(0, 0)$ гэвэл хавтгай нь S муж болон OA, OB цацрагууд, A, B цэгүүд дээр AB -д перпендикуляраар босгосон цацрагуудаар 5 хэсэгт хуваагдана (зураг үз).

1. $X(a, b)$ цэг нь I хэсэг буюу S мужид орших үед $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \geq -a^2 - b^2$ байна. Энд $x = a, y = b$ үед тэнцэлд хүрнэ.
2. $X(a, b)$ цэг нь II хэсэгт орших үед $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \geq |XA|^2 - a^2 - b^2 = 25 - 10a$ байна.
3. $X(a, b)$ цэг нь III хэсэгт орших үед $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \geq |XB|^2 - a^2 - b^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2 - a^2 - b^2 = 25 - 8a + 6b$ байна.
4. $X(a, b)$ цэг нь IV хэсэгт орших үед $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \geq |XM|^2 - a^2 - b^2$ байна. Энд M нь X цэгээс AB -д буулгасан перпендикулярын суурь байна.
5. $X(a, b)$ цэг нь V хэсэгт орших үед $z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \geq |XM|^2 - a^2 - b^2$ байна. Энд M нь OX цэгээс $x^2 + y^2 = 25$ тойргийн огтлолцлын цэг байна.



Нарийн тооцооллыг уншигчдад дасгал болгон үлдээлээ.

Бодолт 2016.01.20.

1. PA, AQ хэрчмүүдийн уртыг олбол:

$$|PA| = \sqrt{(0-a)^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{a^2+1})^2} = \sqrt{2a^2 + 3 + 2\sqrt{2(a^2+1)}}$$

$$|AQ| = \sqrt{(0-a)^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{a^2+1})^2} = \sqrt{2a^2 + 3 - 2\sqrt{2(a^2+1)}}$$

болно. $(|PA| - |AQ|)^2 = 4$ гэдгийг төвөггүй харуулж болох ба $|PA| > |AQ|$ гэдгийг тооцвол $|PA| - |AQ| = 2$ байна.

2. $x^2 = 4\sqrt{2}y$ параболын фокус нь $Q(0, \sqrt{2})$, директрис шулуун нь $y = -\sqrt{2}$ болно. B цэгээс $y = -\sqrt{2}$ шулуунд буулгасан перпендикулярын суурийг D гэвэл $|BQ| = |BD|$ байна (параболын дурын цэгээс фокус болон директрис шулуун хүртэлх зайнууд тэнцүү). Мөн $|BC| + |BD| = 2 + \sqrt{2}$ гэдэг нь ойлгомжтой. Иймд

$$\begin{aligned} |PA| + |AB| + |BC| &= (|PA| - |AQ|) + (|AQ| + |AB|) + |BC| \\ &= 2 + |BQ| + |BC| \\ &= 2 + (2 + \sqrt{2}) \\ &= 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

буюу тогтмол байна.

Бодолт 2016.01.27. Дурын сөрөг биш бүхэл n тооны хувьд өгөгдсөн

$$P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n)$$

нөхцөлөөс

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2)$$

гэж гарна. Иймд $P_0 = P_6$ гэдгээс $(a^2 + b^2)^6 \cdot (x_0^2 + y_0^2) = (x_0^2 + y_0^2)$ болох буюу $a^2 + b^2 = 1$ гэж гарна.

$a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$, $(0 \leq \alpha < 2\pi)$ гэе. Тэгвэл $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ болно.

Дурын сөрөг биш бүхэл n тооны хувьд $P_n(\cos n\alpha, \sin n\alpha)$ байвал өгөгдсөн нөхцөлөөс $P_{n+1}(\cos(n+1)\alpha, \sin(n+1)\alpha)$ байна гэдэг нь шууд гарна. Эндээс $P_6(\cos 6\alpha, \sin 6\alpha)$ болно.

$$P_0 = P_6 \iff \begin{cases} \cos 6\alpha = 1 \\ \sin 6\alpha = 0 \end{cases}$$

болох ба $\alpha = \frac{\pi}{3} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ гэж гарна. $P_0, P_1, \dots, P_6$ бүгд ялгаатай цэгүүд учраас $k = 1$ эсвэл $k = 5$ байх боломжтой болно. Хариу:

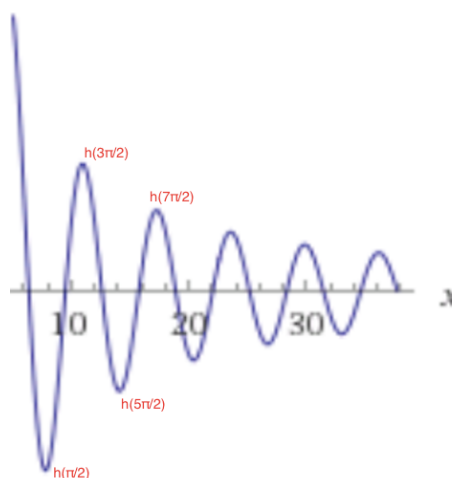
$$(a, b) = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (a, b) = \left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Бодолт 2016.02.03. $f(x) = g(x) \iff \frac{\cos x}{x} = \sin x + ax \iff \frac{\cos x - x \sin x}{x^2} = a$ болно.

$h(x) = \frac{\cos x - x \sin x}{x^2}$ гэвэл $y = a$ шулуун $x > 0$ завсар дээр $y = h(x)$ функцийн графиктай 3 цэгээр огтлолцдог байх a -н утгуудыг олох ёстой болно.

$h'(x) = -\frac{(x^2+2)\cos x}{x^3}$ тул $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$) нь $y = h(x)$ функцийн графикийн нугаралтын цэгүүд, $h(x)$ нь $x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2} \right)$ ($k \in \mathbb{N}$) завсрууд дээр өсдөг, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ ба $x \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2} \right)$ ($k \in \mathbb{N}$) завсрууд дээр буурдаг, мөн $\left| h\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \right|$ нь k өсөх үед буурдаг гэдгийг тус тус ажиглаад $y = h(x)$ функцийн графикийг дүрсэлье (зураг үз).

Эндээс $y = a$ шулуун $y = h(x)$ функцийн графиктай $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) < a < h\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ба $a = h\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ үед 3 цэгээр огтлолцох нь харагдаж байна. Иймд $a = -\frac{2}{5\pi}$ ба $\frac{2}{3\pi} > a > \frac{2}{7\pi}$ байна.



Бодолт 2016.02.17. $\overrightarrow{PA'} = \frac{\overrightarrow{PA}}{|PA|}$, $\overrightarrow{PB'} = \frac{\overrightarrow{PB}}{|PB|}$, $\overrightarrow{PC'} = \frac{\overrightarrow{PC}}{|PC|}$ гэвэл $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{PB'}$, $\overrightarrow{PC'}$ векторууд нь нэгж векторууд болох ба $\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} = \vec{0}$ гэдгээс аль ч хоёр нь хоорондоо 120° үүсгэнэ гэдэг нь хялбархан гарна (параллелограммын дүрмээр аль нэг хоёр нэгж векторыг нэмэхэд үлдсэн вектортой эсрэг чиглэлтэй нэгж вектор гарах ёстой). Иймд

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ.$$

Пифагорын теоремоор $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ ба $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{3}$ тул $|BC| = 2$ болно. $|BC| = 2 \cdot |AB|$ ба $\angle BAC = 90^\circ$ учраас $\angle ABC = 60^\circ$ гэж гарна. $\angle PAB + \angle ABP = 60^\circ$ ба $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 60^\circ - \angle PBC$ гэдгээс $\angle PAB = \angle PBC$ болно. Иймд $\triangle PAB$ ба $\triangle PBC$ гурвалжнууд төсөөтэй байна. Төсөөгийн харьцааг бичвэл $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{2}$ ба $|PA| = x$ гэвэл $|PB| = 2x$, $|PC| = 4x$ болно. $\triangle APB$ гурвалжин дээр косинусийн теорем бичвэл $1 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x) \cdot \cos 120^\circ = 7x^2$ болох ба $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$ гэж олдоно. Иймд

$$|PA| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad |PB| = \frac{2}{\sqrt{7}}, \quad |PC| = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

$\triangle APC$ гурвалжин дээр синусийн теорем бичвэл $\frac{|PC|}{\sin \angle PAC} = \frac{|AC|}{\sin \angle APC}$ болох ба эндээс

$$\sin \angle PAC = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{буюу} \quad \angle PAC = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{гэж олдоно.}$$

Бодолт 2016.02.24. (1) Өгөгдсөн тэнцэтгэл бишүүдийг эмхтгэвэл

$$0 < x(3y^2 - 1) + y^3 - y < x^2 \quad \text{болно.}$$

Эхний тэнцэтгэл бишээс $x > -\frac{y^3 - y}{3y^2 - 1}$ болох ба хоёр дахиаас нь

$$x < \frac{1}{2} \left(3y^2 - 1 - \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - 3)} \right) \quad \text{ба} \quad x > \frac{1}{2} \left(3y^2 - 1 + \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - 3)} \right)$$

гэж гарна. Дурын $y \in \mathbb{N}$ хувьд $\frac{y^3 - y}{3y^2 - 1} > \left| \frac{1}{2} \left(3y^2 - 1 - \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - 3)} \right) \right|$ гэдгийг хялбархан харуулж болох ба эндээс хариу нь

$$-\frac{y^3 - y}{3y^2 - 1} < x < \frac{1}{2} \left(3y^2 - 1 - \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - 3)} \right)$$

ба

$$x > \frac{1}{2} \left(3y^2 - 1 + \sqrt{(3y^2 - 1)^2 + 4(y^3 - 3)} \right)$$

болно.

(2) (1)-г ашиглаад $x^3 + 3yx^2 \geq \frac{10^n-1}{9} \cdot 10^m$ ба $x^3 + 3yx^2 + x^2 < \frac{10^n-1}{9} \cdot 10^m + 10^m$ байхаар $x, y, m, n \geq 99$ натурал тоонууд олоход хангалттай. Учир нь $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ тоо n ширхэг 1-ээр эхэлнэ. $n \geq 99$ ба $64 \cdot \left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 < 10^m$ байхаар m, n -г сонгоод

$$y = \left\lceil \frac{\frac{10^n-1}{9} \cdot 10^m - x^3}{3x^2} \right\rceil + 1, \quad x = \left\lceil \left(\frac{10^n-1}{9} \cdot 10^m \right)^{\frac{1}{3}} \right\rceil$$

гэвэл шаардлагатай нөхцөлүүд бүгд биелнэ. Үүнийг өөрсдөө шалгана уу.

Бодолт 2016.03.02.

(1) Эхлээд n хаялтын дараа Б хүн k удаа Тоо, 0 удаа Сүлд буулгасан гэе. Тэгвэл А хүн k удаа Тоо буулгасан байх ёстой ба 2 удаа Сүлд буулгана. Иймд $n = 2k+2$ болно. А хүн сүүлийн хаялт дээр Сүлд буулгах ба нөгөө Сүлдийг өөрийн хаялтуудын алин дээр нь ч буулгаж болно. Эндээс нийт боломж $k+1$ болох ба магадлал нь $\frac{k+1}{2^{2k+2}}$ байна. Өөрөө хэлбэл n тэгш үед $p(n) = \frac{n}{2^{n+1}}$.

Одоо n хаялтын дараа Б хүн k удаа Тоо, 1 удаа Сүлд буулгасан гэе. Тэгвэл А хүн k удаа Тоо буулгасан байх ёстой ба 2 удаа Сүлд буулгана. Иймд $n = 2k+3$ болно. А хүн сүүлийн хаялт дээр Сүлд буулгах ба нөгөө Сүлдийг өөрийн хаялтуудын алин дээр нь ч буулгаж болно. Б хүн 1 Сүлдийг өөрийн хаялтуудын алин дээр нь ч буулгаж болно. Эндээс нийт боломж $k(k+1)$ болох ба магадлал нь $\frac{k(k+1)}{2^{2k+3}}$ байна. Өөрөө хэлбэл n сондгой үед $p(n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$.

(2) Юуны өмнө

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{2k+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^{2k+3}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)k}{2^{2k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}} \end{aligned}$$

болно. Одоо

$$S_m := \sum_{k=0}^m \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$$

гэвэл

$$\begin{aligned} 4S_{m+1} - S_m &= \sum_{k=0}^m \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+1}} - \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}} \right) + 4S_0 \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{k+1}{2^{2k}} \end{aligned}$$

болно. Мөн

$$T_m = \sum_{k=0}^m \frac{k+1}{2^{2k}}$$

ГЭВЭЛ

$$\begin{aligned} 4T_{m+1} - T_m &= \sum_{k=0}^m \left(\frac{k+2}{2^{2k}} - \frac{k+1}{2^{2k}} \right) + 4T_0 \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^{2k}} + 1 = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^m} \end{aligned}$$

болно. $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = A$ гээд сүүлийн тэнцэтгэлийн хоёр талд m -ээр хязгаарт шилжвэл $3A = \frac{16}{3}$ буюу $A = \frac{16}{9}$ болно.

$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = B$ гээд $4S_{m+1} - S_m = T_m$ тэнцэтгэлийн хоёр талд m -ээр хязгаарт шилжвэл $3B = \frac{16}{9}$ буюу $B = \frac{16}{27}$ болно. Иймд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{16}{27}.$$

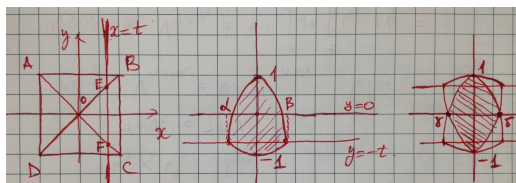
Бодолт 2016.03.09. (1) ABC гурвалжныг BD диагоналийг тойруулан эргүүлэхэд конус үүснэ. Иймд V_1 ба V_2 нь 2 конусыг сууриар нь нийлүүлсэн хэлбэрийн дүрс байна. V_1 дүрсийг $x = t$ хавтгайгаар огтлоход параболууд үүснэ (зураг үз).

Уг параболуудын суурийн уртыг олѐ. Уг суурь нь AC диаметртэй тойргийн хөвч байх ба тойргийн төв O цэгээс уг хөвч хүртэлх зай OF юм. Иймд хөвчийн урт $2 \cdot \sqrt{2-2t^2}$ буюу $\alpha = -\sqrt{2-2t^2}$, $\beta = \sqrt{2-2t^2}$ байна. Уг параболуудын өндрүүдийн суурь нь $1+t$, $1-t$ гэдэг нь мэдэгдэж байгаа тул огтлолд үүсэх талбайг олоход хялбар юм. Уг талбай нь

$$S = \int_{-\sqrt{2-2t^2}}^{\sqrt{2-2t^2}} \left(-\frac{1+t}{2-2t^2} x^2 + 1+t \right) dx + \int_{-\sqrt{2-2t^2}}^{\sqrt{2-2t^2}} \left(-\frac{1-t}{2-2t^2} x^2 + 1-t \right) dx = \frac{8}{3} \sqrt{2-2t^2} \quad \text{болно.}$$

(2) AC ба BD диагоналиуд нь бие биедээ

$y = -x$ орлуулгаар шилжих учир V_2 дүрсийг $x = t$ хавтгайгаар огтлоход гарах дүрс нь V_1 дүрсийг $x = t$ хавтгайгаар огтлоход гарах дүрстэй $y = 0$ шулууны хувьд тэгш хэмтэй байна. Эндээс V_1 ба V_2 дүрсүүдийн огтлолцол нь $x = t$ хавтгайтай огтлолцоход



үүсэх дүрсийг зурагт үзүүлэв. Иймд $\gamma = -\sqrt{2(1-t)}$, $\delta = \sqrt{2(1-t)}$ гэдгийг хялбархан олж болно. Огтлолд үүсэх дүрсийн талбай $2 \cdot \int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}} \left(-\frac{1+t}{2-2t^2} x^2 + 1 \right) dx = \frac{8}{3} \sqrt{2(1-t)}$ болно. Эндээс V_1 ба V_2 дүрсүүдийн огтлолцлын эзлэхүүн

$$2 \cdot \int_0^1 \frac{8}{3} \sqrt{2(1-t)} dt = \frac{32}{9} \sqrt{2}$$

гэж олдоно.

Бодолт 2016.03.30. (1) $f(x)$ нь доошоо харсан парабол тул хамгийн их утгаа оройн цэг дээрээ авах буюу $f'(x) = -4x + 8t - 12 = 0$ байх цэг дээр авна. Эндээс $x = 2t - 3$ болох буюу $f(x)$ -ийн хамгийн их утга нь $g(t) = f'(2t - 3) = t^3 - 9t^2 + 15t$ гэж гарна.

(2) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$ ба $g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t - 1)(t - 5)$ болно. Эндээс $g(t)$ нь $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ завсар дээр өснө, $[1, 5]$ завсар дээр буурна, $[5, \infty]$ завсар дээр өснө гэж гарна. Иймд $g(t)$ -ийн $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ үеийн хамгийн хамгийн бага утга нь $g(5) = -25$ байна.

Бодолт 2016.04.06. (1) Өгсөн нөхцөлөөс дурын натурал n тооны хувьд $b_n \equiv a_n \pmod{p}$, $0 \leq b_n \leq p - 1$ байна. Иймд $b_{n+1} \equiv a_{n+1} \pmod{p}$, $b_n + 1 \equiv a_n + 1 \pmod{p}$, $b_{n+2} \equiv a_{n+2} \pmod{p}$ ба $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1)$ тул $b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{p}$ гэдэг нь шууд гарна.

(2) $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 9$, $b_4 = 2$, $b_5 = 3$, $b_6 = 9$, $b_7 = 2$, $b_8 = 3$, $b_9 = 9$, $b_{10} = 2$ байна.

(3) $b_{m+1} = b_{n+1} > 0$ тул хоёул p -тэй харилцан анхны байна. Иймд p модулиар урвуутай байна. $b_n + 1 \equiv b_{n+2} \cdot b_{n+1}^{-1} \pmod{p}$ ба $b_m + 1 \equiv b_{m+2} \cdot b_{m+1}^{-1} \pmod{p}$ тул $b_n = b_m$ байна.

Бодолт 2016.04.13. $Q = (\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ гэе. $PQ = PR$ тул $(\alpha - \frac{1}{2})^2 + (\alpha^2 - \frac{1}{4})^2 = (\beta - \frac{1}{2})^2 + (\beta^2 - \frac{1}{4})^2$ болно. Эндээс $\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta) + (\alpha^4 - \beta^4) = 0$ гэж гарах ба $\alpha \neq \beta$ тул $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 1 + (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) = 0$ болно. Эндээс $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2}$ гэж гарна. $G(X, Y)$ нь $\triangle PQR$ гурвалжны хүндийн төв учраас

$$X = \frac{\frac{1}{2} + \alpha + \beta}{3}, \quad Y = \frac{\frac{1}{4} + \alpha^2 + \beta^2}{3}$$

байна. Эндээс $\alpha + \beta = \frac{6X-1}{2}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4}$ болно. Дурын бодит α, β тоонуудын хувьд $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$ биелэх тул $2(3Y - \frac{1}{4}) \geq (\frac{6X-1}{2})^2$ биелэх буюу $Y \geq \frac{3}{2}(X - \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{12}$ болно.

Нөгөө талаас $3Y - \frac{1}{4} = \frac{2}{6X-1} - \frac{1}{2}$ биелж байгаа бөгөөд $Y = \frac{1}{9(X-\frac{1}{6})} - \frac{1}{12}$ байна. Энд $X = \frac{1}{6}$ нь асимптот болох нь тодорхой. Иймд $G(X, Y)$ -ийн геометр байр нь $Y = \frac{1}{9(X-\frac{1}{6})} - \frac{1}{12}$ гипербол буюу өмнөх тэнцэтгэл бишээс $\frac{1}{6} \leq X \leq \frac{1}{2}$ байна. Энэ үед $Y \geq \frac{1}{4}$ байна.

Бодолт 2016.04.20. Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш ёсоор

$$(2x + y)\left(\frac{1}{2} + 1\right) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

болох буюу $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2x + y} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ гэж гарна. $y = 4x$ үед

$$k \cdot \sqrt{2x + 4x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{4x} = \sqrt{3x}$$

болох буюу эндээс $k \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ гэж гарна. Иймд хамгийн бага k нь $\sqrt{\frac{3}{2}}$ байна.

Бодолт 2016.04.27. 1. $x \geq y \geq z$ гээ. Тэгвэл $xyz = x + y + z \leq 3x$ болно. Эндээс $yz \leq 3$ гэж гарна.

1. $y = z = 1$ үед $x = x + 2$ болж зөрчил үүснэ.
2. $y = 2, z = 1$ үед $2x = x + 3$ буюу $x = 3$ гэж гарна.
3. $y = 3, z = 1$ үед $3x = x + 4$ буюу $x = 2 < y$ болж зөрчил үүснэ.
4. $y = z = 2$ үед $4x = x + 4$ ба энэ нь бүхэл шийдгүй.

Иймд $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ гэсэн шийдтэй. x, y, z нь тэгш эрхтэй учир эдгээр нь сэлгэж болно.

2. $x \geq y \geq z$ гээ. $x^3 + y^3 + z^3 > x^3 \geq xyz$ учир шийдгүй.

Бодолт 2016.05.04. APC ба BPC гурвалжнууд дээр синусийн теорем бичвэл

$$\frac{AC}{\sin \angle APC} = \frac{PC}{\sin \angle PAC} \quad \text{ба} \quad \frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{PC}{\sin \angle PBC}$$

болно. Эндээс $AC = BC$ ба $\angle APC = \angle BPC$ гэдгийг тооцвол $\sin \angle PAC = \sin \angle PBC$ гэж гарна. $\angle PAC, \angle PBC < 180^\circ$ тул

$$\angle PAC = \angle PBC \quad \text{эсвэл} \quad \angle PAC + \angle PBC = 180^\circ$$

болно.

1. $\angle PAC = \angle PBC$ үед P цэг нь Y тэнхлэг дээр оршино.
2. $\angle PAC + \angle PBC = 180^\circ$ үед P цэг нь ABC гурвалжныг багтаасан тойрог дээр оршино. Гэвч энэ тохиолдолд P цэг нь OX тэнхлэгээс доош орших үед $\angle APC \neq \angle BPC$ байх нь илт юм.

Мөн P цэг нь AB шулуун дээр, гэхдээ AB хэрчим дээр оршдоггүй үед $\angle APC = \angle BPC$ байх нь ойлгомжтой. Иймд P цэгийн геометр байр нь эсвэл OY тэнхлэг, эсвэл ABC гурвалжныг багтаасан тойргийн OX тэнхлэгээс дээш орших хагас нум, эсвэл OX тэнхлэгийн $[-1, 1]$ завсрын цэгүүдээс ялгаатай бүх цэгүүд байна.

Бодолт 2016.05.11. (1) $\int_0^c f_{n-1}(t) dt = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) гээ. $f_0(x) = f(x)$ гэж үзэж болно. Тэгвэл

$$a_1 = \int_0^c (-4t^3 + 3t^2) dt = c^3 - c^4$$

болно. Цаашилбал

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^c f_{n-1}(t) dt = \int_0^c \left\{ f(t) + \int_0^c f_{n-2}(t) \right\} dt = \int \{f(t) + a_{n-1}\} dt \\ &= \int_0^c f(t) dt + \int_0^c a_{n-1} dt = a_1 + ca_{n-1} = c^3 - c^4 + ca_{n-1} \end{aligned}$$

болох ба эндээс $a_n - c^3 = c(a_{n-1} - c^3)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) гэж гарна. Иймд $a_n - c^3 = c^{n-1}(a_1 - c^3)$ болох буюу $a_n = c^3 - c^{n+3}$ гэж олдоно. Эндээс

$$f_n(x) = f(x) + a_n = -4x^3 + 3x^2 + c^3(1 - c^n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

болно.

(2) Өмнөх (1)-ээс $f'_n(x) = -12x^2 + 6x = -6x(2x - 1)$ болно. Иймд $f_n(x)$ нь $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ үед өсөх ба $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ үед буурна.

Нөгөө талаас, $0 < c < 1$ гэдгээс $0 < c^3(1 - c^n) < 1$ гэж гарах ба эндээс $f_n(0) = c^3(1 - c^n) > 0$, $f_n(1) = c^3(1 - c^n) - 1 < 0$ тул $f_n(x) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$) байх x цор ганц оршино.

Бодолт 2016.05.18. (1) $x^{n+1} = (x^2 - x - 1)Q_n(x) + a_nx + b_n$ гэе. Тэгвэл

$$\begin{aligned} x^{n+2} &= x \cdot x^{n+1} = (x^2 - x - 1)xQ_n(x) + a_nx^2 + b_nx \\ &= (x^2 - x - 1)xQ_n(x) + a_n(x^2 - x - 1) + a_nx + a_n + b_nx \\ &= (x^2 - x - 1)\{xQ_n(x) + a_n\} + (a_n + b_n)x + a_n \end{aligned}$$

болно. $\deg\{(a_n + b_n)x + a_n\} < \deg(x^2 - x - 1) = 2$ тул $(a_n + b_n)x + a_n = a_{n+1}x + b_{n+1}$ байна. Иймд аливаа натурал n тооны хувьд

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

болно.

(2) $x^2 = (x^2 - x - 1) + (x + 1)$ тул $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ буюу $(a_1, b_1) = 1$ байна. Аливаа натурал $n \geq 2$ тооны хувьд

$$(a_n, b_n) = (a_{n-1} + b_{n-1}, a_{n-1}) = (b_{n-1}, a_{n-1}) = (a_{n-1}, b_{n-1}) = \dots = (a_1, b_1) = 1$$

болж a_n ба b_n тоонууд нь харилцан анхны байх нь батлагдав.

Магистрын элсэлтийн шалгалт

Бодлогууд

Бодлого 2015.12.13. Эерэг бодит $a_0, b_0, c_0 > 0$ тоонууд өгөгдөв. Бид $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ ба $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ дарааллуудыг дараах томъёогоор тодорхойлъя: $n \geq 0$ бол

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \\ b_{n+1} &:= \frac{a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n}{a_n + b_n + c_n}, \\ c_{n+1} &:= \frac{3a_n b_n c_n}{a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n}. \end{aligned}$$

Тэгвэл $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ ба $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ дарааллууд ижил хязгаарлуу нийлэх болохыг харуулж хязгаарыг нь ол.

Бодлого 2015.12.20. Бодит коэффициенттой, x гэсэн нэг хувьсагчтай олон гишүүнтүүдийн үүсгэх шугаман огторгуйг E гэж тэмдэглэе. E -г E -д буулгадаг дараах A_1, A_2, A_3, A_4 буулгалтуудыг авч үзье. E -ийн гишүүн P -ийн хувьд

$$\begin{aligned} A_1(P)(x) &:= P(2x - 12), \\ A_2(P)(x) &:= P(3x^2), \\ A_3(P)(x) &:= P(x) + x, \\ A_4(P)(x) &:= x \cdot \frac{dP}{dx}(x). \end{aligned}$$

- (i) A_1, A_2, A_3, A_4 буулгалтууд дотроос шугаман буулгалтуудыг бүгдийг ол.
- (ii) (i)-д шугаман гэж хариулсан бүх буулгалтуудын хувьд түүний диагональчлагдах эсэхийг баталгаатайгаар шийд.

Энд $A: E \rightarrow E$ гэсэн шугаман буулгалт диагональчлагдана гэдэг нь $e_1, e_2, \dots$ гэсэн E -ийн суурь ба $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ гэсэн бодит тоонууд $A(e_i) = \lambda_i e_i$ ($i = 1, 2, \dots$) байхаар олддог байхыг хэлнэ.

Бодлого 2015.12.27. Комплекс 2×2 матрицуудын үүсгэх шугаман огторгуйг $M_2(\mathbb{C})$ гээд, $\exp: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ буулгалтыг

$$\exp X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

гэж тодорхойлъя. Энд X^0 нь нэгж матриц. Мөн $z \in \mathbb{C}$ хувьд $A(z) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix}$ гээ.

(i) $Y := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ хувьд

$$J_z(Y) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \exp(A(z) + tY) - \exp A(z) \}$$

илэрхийллийг тооцоол.

(ii) $J_z: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ нь шугаман изоморфизм болдоггүй бүх $z \in \mathbb{C}$ -ийг ол.

Бодлого 2016.01.03. $n \geq 1$ хэмжээст Евклид огторгуй $\mathbb{R}^n$ -ийг $\mathbb{R}$ -т буулгадаг f буулгалт дурын $x, y \in \mathbb{R}^n$ ба $\alpha \in \mathbb{R}$ хувьд дараах нөхцөлүүдийг хангадаг гэе:

(a) $f(x) \geq 0$ ба хэрэв $f(x) = 0$ бол $x = (0, \dots, 0)$,

(b) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,

(c) $f(\alpha x) = |\alpha|f(x)$.

Тэгвэл

(1) f -ийг тасралтгүй гэж харуул.

(2) $c_1, c_2 > 0$ гэсэн эерэг тоонууд, дурын $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ хувьд

$$c_1 f(x) \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq c_2 f(x)$$

байхаар олдохыг батал.

Бодлого 2016.01.10. a -г $0 < a < 2$ байдаг бодит тоо гээд, $t \geq 0$ дээр тодорхойлогдсон тасралтгүй дифференциалчлагддаг бөгөөд $t \neq 1$ дээр

$$x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + x = \begin{cases} 1 & (t > 1) \\ 0 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

гэсэн дифференциал тэгшитгэлийг хангадаг функцийг $x(t, a)$ гэж тэмдэглэе. Энэ үед дараах асуултуудад хариул.

(1) Дурын $0 < a < 2$ хувьд $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = 1$ гэж харуул.

(2) Дурын $T > 1$ хувьд $\inf_{0 < a < 2} \sup_{t \geq T} |x(t, a) - 1| > 0$ гэж харуул.

Бодлого 2016.01.17. q -г $0 < |q| < 1$ байдаг комплекс тоо гээд, үл мэдэгдэх $u(z)$ функцийг хувьд

$$u(qz) = (1 - z)u(z) \quad \text{ба} \quad u(0) = 1$$

гэсэн функционал тэгшитгэлийг авч үзье.

(1) $z = 0$ цэгийн орчинд холоморфик байдаг $u(z)$ шийдийг зэрэгт цуваан хэлбэрээр олж, нийлэлтийн радиусыг нь тооцоол.

- (2) (1)-д олсон функц $u(z)$ нь $\mathbb{C}$ дээр нэг утгат мероморфик функц $\tilde{u}(z)$ -руу аналитик өргөтгөгдөхийг харуул.
- (3) (2)-т байгуулсан нэг утгат мероморфик функц $\tilde{u}(z)$ нь $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ (энд $|\alpha_0| < |\alpha_1| < \dots$) гэсэн тоологдом тооны туйлтай бөгөөд $z = \alpha_0$ цэг дээрх үлдэгдлийг (residue) K гэвэл $z = \alpha_n$ цэг дээрх үлдэгдэл нь

$$\frac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} K \quad (n = 1, 2, \dots)$$

гэж бичигдэхийг харуул.

Бодлого 2016.01.24*. p -г сондгой анхны тоо гээд $X := \{0, 1, \dots, p-1\}$ гэе.

$\sigma: X \rightarrow X$ буулгалтыг $\sigma(x) \equiv 2x \pmod{p}$ гэж тодорхойлъя. Тэгвэл σ -ийн тэмдгийг ол. Тухайлбал $p = 11213$ үед ямар байх вэ?

Бодлого 2016.01.31*. Комплекс утга авдаг 2π үетэй тасралтгүй функцүүдийн олонлогийг X гэе. Бүхэл тоо m болон $f \in X$ хувьд

$$C_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ims} ds$$

гээд

$$T_f(t) := C_{-1}(f) e^{-it} + C_0(f) + C_1(f) e^{it} \quad (t \in \mathbb{R})$$

функцийг авч үзье.

- (1) $X_\infty := \{f \in X \mid |f(s)| \leq 1 \ (s \in \mathbb{R})\}$ гээд

$$M_\infty := \sup\{|T_f(t)| \mid t \in \mathbb{R}, f \in X_\infty\}$$

утгыг ол.

- (2) $p = 1$ ба $p = 2$ үед $X_p := \left\{f \in X \mid \int_0^{2\pi} |f(s)|^p ds \leq 1\right\}$ гээд

$$M_p := \sup\{|T_f(t)| \mid t \in \mathbb{R}, f \in X_p\}$$

утгыг ол.

Бодлого 2016.02.07*. 2×2 комплекс матрицуудын огторгуйг $M_2(\mathbb{C})$ гэе. $M_2(\mathbb{C})$ -ийн гишүүн бөгөөд Жордан нормаль форм нь $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ байдаг матрицуудын огторгуйг S гэе.

- (1) $M_2(\mathbb{C})$ дотор S -ийн битүүрлийг $\bar{S}$ гэвэл $\bar{S} \setminus S$ -ийг ол.
- (2) S ба $\bar{S}$ нь гомотопи эквивалент биш гэж батал.

Бодлого 2016.02.14. $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ гэсэн $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) нөхцөлийг хангадаг бодит тоон дарааллын хувьд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k$$

цувааг авч үзье. Энд $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- (1) Энэ цувааны нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг ол.
- (2) Энэ цувааны нийлбэрийн авч болох утгын мужийг олж, комплекс хавтгай дээр зурж үзүүл.

Бодлого 2016.02.21. $f(x)$ -ийг комплекс коэффициенттой олон гишүүнт гэе.

- (1) Хэрэв S ба N нь ижил хэмжээтэй квадрат матрицууд бөгөөд $SN = NS$ ба $N^2 = 0$ байдаг бол $f(S + N) = f(S) + f'(S)N$ болохыг батал.
- (2) Хэрэв $f(x)$ нь

дурын урвуутай комплекс A матрицын хувьд A нь диагональчлагддаг байх нь $f(A)$ нь диагональчлагддаг байхтай эквивалент байна

нөхцөлийг хангадаг бол $f(x) = ax^m + b$ байх бүхэл $m \geq 1$ тоо ба комплекс $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, тоонууд олдохыг батал.

Бодлого 2016.02.28. $a > 1$ бодит тоо бол $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ олонлог дээр

$$z^2 e^{a-z} = 1$$

тэгшитгэл хоёр шийдтэй бөгөөд тэдгээр нь бодит болохыг батал.

Бодлого 2016.03.06. A -г 2×2 бодит матриц гэе.

$$\begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (*)$$

дифференциал тэгшитгэлийн $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ анхны нөхцөлийг хангадаг шийдийг

$$\Phi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

гэе. $X := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ огторгуйн p, q цэгүүдийн хувьд $p = \Phi_t(q)$ байх $t \in \mathbb{R}$ олддог бол $p \sim q$ гэе. Тэгвэл $\sim$ нь X дээрх эквивалентын харьцаа болох ба ногдвор огторгуйг нь $Y := X/\sim$ гэе. ($\pi: X \rightarrow Y$ ногдвор буулгалт байг, тэгвэл $U \subseteq Y$ задгай гэдэг нь $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ задгай гэсэн үг)

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ба $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ үед (*) дифференциал тэгшитгэлийн шийдийн муруйг зур.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ үед Y нь Хаусдорф гэж батал.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ үед Y нь Хаусдорф биш гэж батал.

Бодлого 2016.03.13.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ хязгаар оршин байхыг харуул.

(2) $\{A_n\}, \{B_n\}$ дарааллуудыг

$$A_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \quad B_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$$

гэж тодорхойлъя. Эерэг бүхэл p, q тоонуудын хувьд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{pn} - B_{qn})$$

хязгаарыг ол.

Бодлого 2016.03.20. Комплекс, квадрат A матрицын хувьд дараах (a), (b) нөхцөлүүд ижил чанартай болохыг харуул.

(a) A -ийн характеристик олон гишүүнт ба минимал олон гишүүнтүүд давхцна.

(b) A -тай байраа сольдог (өөрөөр хэлбэл $AB = BA$ байдаг) матрицууд нь бүгд A -ийн олон гишүүнтээр бичигдэнэ.

Бодлого 2016.03.27. Бодит $x, y \in \mathbb{R}$ тоонуудын хувьд

$$\rho(x, y) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + k|$$

гээд энэ ρ -гоо ашиглаад

$$d(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right)$$

гэж тодорхойлъя. X -ийг сөрөг биш бодит тоонуудын олонлог $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ гэе. Дараах өгүүлбэрүүдийг батал.

(1) (X, d) нь зайт (метрик) огторгуй болно.

(2) $x_m := 2^m - 1$ гэвэл $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ дараалал нь d зайны хувьд Коши дараалал болно.

(3) Метрик огторгуй (X, d) нь гүйцэд биш байна.

Бодлого 2016.04.03. Бодит $a, b, c \in \mathbb{R}$ тоонууд

$$a > 0, \quad b^2 - ac < 0$$

нөхцөлүүдийг хангах үед

$$\iint_D \exp(-ax^2 - 2bxy - cy^2) dx dy$$

интегралыг ол. Энд $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$.

Бодлого 2016.04.10. A нь 2×2 хэмжээтэй комплекс матриц, μ нь $0 < \mu < 1$ байдаг бодит тоо гэе. Дараах рекуррент томъёогоор тодорхойлогдох

$$x_{k+1} := Ax_k + \mu x_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$x_0 = \alpha, x_1 = \beta$ байдаг $\mathbb{C}^2$ -ийн дарааллыг авч үзье. Анхны $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2$ утгуудыг яаж ч авсан

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

байхын тулд A -ийн хувийн утгууд ямар мужид байх ёстой вэ? Зурж үзүүл.

Бодлого 2016.04.17. Нэгж урттай $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ гэсэн баганаан векторын хувьд 3×3

бодит $A(u)$ матрицыг

$$A(u) := I - 2uu^t$$

гэж тодорхойлж, энд I нь 3×3 хэмжээт нэгж матриц, u^t нь u -г хөрвүүлсэн мөрөн вектор.

(1) $A(u)$ матрицын хувийн утгуудыг (давхардлыг тоолон) ол.

(2) $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ба $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ үед $A(u)A(v)$ үржвэр нь ямар нэг тэнхлэгийг тойруулсан эргүүлэлт болохыг харуулж, эргүүлэлтийн тэнхлэг ба эргүүлэлтийн өнцгийг ол.

Бодлого 2016.04.23. $\mathbb{R}^3$ -ийн муж

$$\Delta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > y > z > 0\}$$

дээр тодорхойлогдсон эерэг бодит утга авдаг дифференциалчлагддаг функц $f(x, y, z)$ нь дараах (a), (b), (c) нөхцөлүүдийг хангадаг гэе. Энд α нь өгөгдсөн бодит тоо.

(a) $(x, y, z), (x + h, y + h, z + h) \in \Delta$ үед $f(x + h, y + h, z + h) = f(x, y, z)$.

(b) бүх эерэг бодит λ тооны хувьд $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$.

$$(c) \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + z^2 \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2\alpha}{3}(x + y + z)f.$$

Тэгвэл

- (1) $g = \log f$ функцийн бүтэн уламжлал dg -г ол.
- (2) Дээрх нөхцөлүүдийг хангах бүх f функцийг ол.

Бодлого 2016.05.01. Дурын $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ комплекс тоонуудын хувьд $z = 0$ цэгийн орчинд холомогфик $W(\alpha, \beta; z)$ функц нь дараах (a), (b) нөхцөлүүдийг хангадаг гэе.

- (a) Дурын $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ комплекс тоонуудын хувьд $W(\alpha, \beta; 0) = 0$.
- (b) Дурын $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ комплекс тоонуудын хувьд

$$\frac{d}{dz} W(\alpha, \beta; z) = 1 + (\alpha - \beta) W(\alpha - \beta, \beta; z).$$

Тэгвэл

- (1) $W(\alpha, \beta; z)$ функцийг $z = 0$ төвтэй зэрэгт цуваан хэлбэрээр ол.
- (2) Үнэмлэхүй утга нь хангалттай бага $z \in \mathbb{C}$ тооны хувьд $\zeta = W(\alpha, \beta; z)$ бол $z = W(\beta, \alpha; \zeta)$ гэж харуул.

Бодлого 2016.05.08. α -г тэгээс ялгаатай комплекс тоо гэе. Комплекс хавтгай $\mathbb{C}$ дээр

$$x \sim y \iff \text{ямар нэг бүхэл } n \text{ тооны хувьд } x = \alpha^n y$$

гэсэн эквивалентын харьцааг авч үзье.

- (1) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -ийн ногдвор огторгуй $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) / \sim$ нь компакт байх α -ийн хувь дахь зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг ол.
- (2) $\mathbb{C}$ -ийн ногдвор огторгуй $\mathbb{C} / \sim$ нь Хаусдорф байх α -ийн хувь дахь зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөлийг ол.

Бодлого 2016.05.15. 2×2 хэмжээтэй бодит матрицуудын огторгуйг $M_2(\mathbb{R})$ гэж тэмдэглэе. Бодит p, q тоонуудын хувьд

$$M := \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid X^2 + pX + qI = 0\}$$

гэж тодорхойлъя. Энд I нь нэгж матриц. Мөн

$$GL(2, \mathbb{R}) := \{Y \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(Y) \neq 0\}$$

гэе. M дээр эквивалентын харьцааг

$$X_1 \sim X_2 \iff \text{ямар нэг } Y \in GL(2, \mathbb{R})\text{-ийн хувьд } X_1 = Y^{-1}X_2Y$$

гэж тодорхойлъя. Энэ эквивалентын харьцааны хувь дахь M -ийн эквивалентын ангийн тоог ол.

Бодолтууд

Бодолт 2015.12.13. Дурын бодит x, y, z тоонуудын хувьд $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$ байх тул

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

байна. Энд $(x, y, z) = (a_n, b_n, c_n)$ ба $(x, y, z) = (a_n b_n, b_n c_n, c_n a_n)$ гэж авбал, дурын $n \geq 0$ хувьд

$$a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq c_{n+1}$$

болох нь харагдана. Иймд дурын $n \geq 1$ хувьд

$$3(a_n - a_{n+1}) = (a_n - b_n) + (a_n - c_n) \geq 0 \quad (*)$$

болох тул $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ нь доороосоо (тэгээр) зааглагдсан, үл өсөх дараалал болно. Эндээс $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ нь нийлэх ба $(*)$ -с $(a_n - b_n)_{n=0}^{\infty}$ болон $(a_n - c_n)_{n=0}^{\infty}$ сөрөг биш дарааллууд нь тэгрүү нийлнэ гэж мөрдөнө. Иймд $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ба $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ нь мөн нийлэх ба $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ байна. Эцэст нь, дурын $n \geq 0$ хувьд

$$a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} = a_n b_n c_n = \dots = a_0 b_0 c_0$$

тул

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt[3]{a_0 b_0 c_0}$$

байна. Бодлого бодогдов.

Бодолт 2015.12.20.

(i) A_1, A_2 ба A_4 нь шугаман болох нь илт ба $A_3(0) = x \neq 0$ тул A_3 нь шугаман биш.

(ii) (a) E -ийн $\{(x-12)^n \mid n \geq 0\}$ суурийн хувьд

$$A_1((x-12)^n) = ((2x-12)-12)^n = 2^n \cdot (x-12)^n$$

тул A_1 нь диагональчлагдана.

(b) Хэрэв P -ийн зэрэг $n \geq 0$ бол $A_2(P)$ -ийн зэрэг $2n$ байх тул A_2 нь тэг зэргийнхээс өөр хувийн векторгүй. Иймд A_2 нь диагональчлагдахгүй.

(c) E -ийн $\{x^n \mid n \geq 0\}$ суурийн хувьд

$$A_4(x^n) = n \cdot x^n$$

тул A_4 нь диагональчлагдана.

Бодолт 2015.12.27.

- (i) $M_2(\mathbb{C})$ дээр дурын $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$ хувьд $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ байдаг норм (жишээлбэл оператор норм) авъя. Тэгвэл дурын $X \in M_2(\mathbb{C})$ хувьд $\|X^n\| \leq \|X\|^n$ тул $\exp X$ -ийг тодорхойлох цуваа нь үнэмлэхүй нийлнэ. Дурын $A, Y \in M_2(\mathbb{C})$ хувьд

$$e_n(A, Y) := \sum_{i=0}^{n-1} A^i Y A^{n-1-i} \quad (n \geq 0) \quad \text{ба} \quad e(A, Y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e_n(A, Y)$$

гэе. Тэгвэл дурын $|t| \leq 1$ хувьд

$$\|(A + tY)^n - A^n - t e_n(A, Y)\| \leq |t|^2 (\|A\| + \|Y\|)^n, \quad (n \geq 0)$$

болохыг хялбархан харж болох тул

$$\|\exp(A + tY) - \exp A - t e(A, Y)\| \leq |t|^2 \exp(\|A\| + \|Y\|)$$

болно. Иймд $J_z(Y) = e(A(z), Y)$ байна. Одоо $A := A(z)$ гэвэл, дурын $k \geq 1$ хувьд

$$e_{2k}(A, Y) = k(YA + AY)z^{2k-2} \quad \text{ба} \quad e_{2k+1}(A, Y) = (k+1)Yz^{2k} + kAYAz^{2k-2}$$

байна. Эндээс

$$J_z \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z a & g(z)b \\ g(z)c & e^{-z}d \end{pmatrix}$$

болно, энд $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ нь $g(z) := \begin{cases} \frac{\sinh z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$ гэж тодорхойлогдсон.

- (ii) Дээрхээс J_z нь диагональчлагдах шугаман буулгалт болох бөгөөд J_z урвуугүй байх $z \in \mathbb{C}$ нь g -ийн тэгүүд буюу $z = \pi i n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ хэлбэртэй тоонууд байна.

Бодолт 2016.01.03.

- (1) $x \in \mathbb{R}^n$ хувьд $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ гэвэл $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ нь Евклидийн огторгуй $\mathbb{R}^n$ дээрх топологийг төрүүлдэг зай болно. $\mathbb{R}^n$ -ийн стандарт

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$$

суурийг авч үзээд

$$M := \sqrt{f(e_1)^2 + \dots + f(e_n)^2}$$

гэе. Тэгвэл (b), (c) ба Кошийн тэнцэтгэл бишээс дурын $x \in \mathbb{R}^n$ хувьд

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \leq |x_1| f(e_1) + \dots + |x_n| f(e_n) \leq M \cdot \|x\| \quad (*)$$

болно. Нөгөө талаас, дурын $x, y \in \mathbb{R}^n$ хувьд, (b)-ээс

$$-f(y - x) \leq f(x) - f(y) \leq f(x - y)$$

болох ба (c)-ээс $f(y - x) = f(x - y)$ болох тул

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x - y) \leq M \cdot \|x - y\|$$

болно. Иймд f нь (Липшиц) тасралтгүй байна.

(2) (а)-аас $M > 0$ байна. Иймд $c_1 := 1/M > 0$ гэвэл (*)-оос дурын $x \in \mathbb{R}^n$ хувьд

$$c_1 f(x) \leq \|x\|$$

болно. Одоо $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ гэвэл S нь $\mathbb{R}^n$ -ийн зааглагдсан битүү дэд олонлог тул компакт байх ба (1)-ээс f нь тасралтгүй тул S дээр хамгийн бага утгаа авна: $m := \min_{x \in S} f(x) = f(s)$, $s \in S$ гэе. (а)-аас $m > 0$ байна. Одоо $c_2 := 1/m > 0$ гэе. Тэгвэл дурын $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ хувьд $x/\|x\| \in S$ тул $c_2 f(x/\|x\|) \geq 1$ болох ба эндээс (с)-г ашиглан $\|x\| \leq \|x\| c_2 f(x/\|x\|) = c_2 f(x)$ болно. Мөн $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ үед $\|x\| = 0 \leq c_2 f(x)$ болох тул дурын $x \in \mathbb{R}^n$ хувьд

$$\|x\| \leq c_2 f(x)$$

байна. Бодлого бодогдов.

Бодолт 2016.01.10. $\alpha := -a/2$, $\beta := \sqrt{1 - a^2/4}$ гэе. Тэгвэл $-1 < \alpha < 0$ ба $\beta > 0$ байх бөгөөд $\alpha \pm i\beta$ нь $r^2 + ar + 1 = 0$ квадрат тэгшитгэлийн шийдүүд болох тул ямар ч задгай завсар дээр $x'' + ax' + x = b$, (энд $b \in \mathbb{R}$) тэгшитгэлийн шийд нь

$$x(t) = b + e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)),$$

(энд $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) гэж бичигдэнэ. Анхны нөхцөлөө ашиглавал $0 \leq t < 1$ завсар дээр $x(t, a) \equiv 0$ болох ба одоо $x(t, a)$ нь $t \geq 0$ дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг гэдгийг анзаарвал $x(1, a) = x'(1, a) = 0$ болно. Иймд $t \geq 1$ завсар дээр

$$x(t, a) = 1 + e^{\alpha(t-1)} \left(-\cos(\beta(t-1)) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta(t-1)) \right)$$

байна.

(1) Дурын $0 < a < 2$ ба $t \geq 1$ хувьд

$$|x(t, a) - 1| \leq (1 + |\alpha/\beta|) e^{\alpha(t-1)}$$

байх ба $\alpha < 0$ тул $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = 1$ байна.

(2) Дурын $T > 1$ авъя. Тэгвэл $s_0 + 1 \geq T$ бөгөөд $\beta s_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ байдаг $s_0 \in \mathbb{R}$ тоо олдох ба энэ тооны хувьд $x(s_0 + 1, a) = 1 - e^{\alpha s_0}$ байх тул

$$\sup_{t \geq T} |x(t, a) - 1| \geq |x(s_0 + 1, a) - 1| = e^{\alpha s_0}$$

болох ба $0 < a < 2$ үед $\alpha > -1$ тул $\inf_{0 < a < 2} \sup_{t \geq T} |x(t, a) - 1| \geq e^{-s_0} > 0$ байна.

Бодолт 2016.01.17.

- (1) $z = 0$ -ийн орчинд $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ гэе. Өгсөн нөхцөлөөс $a_0 = 1$ ба $q^n a_n = a_n - a_{n-1}$, ($n \geq 1$) болно. Иймд

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{1 - q^n} = \cdots = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)} \quad (n \geq 1)$$

байна. Харьцаан шинжүүрээр энэ цувааны нийлэлтийн радиус нь 1 байна.

- (2) $n \geq 1$ үед

$$u_n(z) := \frac{u(q^n z)}{(1 - z)(1 - qz) \cdots (1 - q^{n-1}z)}$$

нь $|z| < q^{-n}$ дээр мероморфик бөгөөд $|z| < 1$ дээр $u(z)$ -тэй давхацна. Иймд $\tilde{u}(z) := u_n(z)$, ($|z| < q^{-n}$) нь u -ийн мероморфик өргөтгөл болно.

- (3) $n \geq 0$ үед $\alpha_n := q^{-n}$ нь $\tilde{u}$ -ийн энгийн туйл болно. Иймд $K = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)u(z) = -u(q)$ ба $z = q^{-n}$ цэг дээрх үлдэгдэл нь

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow q^{-n}} (z - q^{-n}) \tilde{u}(z) &= \lim_{z \rightarrow q^{-n}} (z - q^{-n}) u_{n+1}(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow q^{-n}} (z - q^{-n}) \frac{u(q^{n+1}z)}{(1 - z)(1 - qz) \cdots (1 - q^n z)} \\ &= \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)} K. \end{aligned}$$

Бодолт 2016.01.24*. Хоёр бодолт хийе. σ -ийн тэмдгийг $\text{sgn}(\sigma)$ гэж тэмдэглэе.

- (1) $p = 2q + 1$ гэе. Тэгвэл

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & q & q+1 & q+2 & \cdots & 2q \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 2q & 1 & 3 & \cdots & 2q-1 \end{pmatrix}$$

байна. Инверсийн тоог тоолбол $q + (q - 1) + \cdots + 1 = \frac{q(q+1)}{2} = \frac{p^2-1}{8}$ болно. Иймд

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1, & p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

байна. $p = 11213$ үед $p \equiv -3 \pmod{8}$ тул $\text{sgn}(\sigma) = -1$ байна.

(2) Юуны өмнө

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \equiv \prod_{0 \leq i < j \leq p-1} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \equiv 2^{\frac{p(p-1)}{2}} \pmod{p}$$

байна. Фермагийн бага теоремоос $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ тул $2^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ болно. Эйлерийн шинжүүрээр $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{p}\right) \pmod{p}$ болно, энд $\left(\frac{a}{p}\right)$ нь Лежандрын тэмдэг. Эцэст нь квадратлаг уялдааны хуулиар $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ тул

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

байна. $p = 11213$ үед $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{2803 \cdot 5607} = -1$ байна.

Бодолт 2016.01.31*. Эхлээд дурын $f \in X$ хувьд $T_f \in X$ болохыг анзааръя. Мөн $f \in X$ хувьд

$$\|f\|_1 := \int_0^{2\pi} |f(s)| ds, \quad \|f\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |f(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ба} \quad \|f\|_\infty := \sup_{s \in \mathbb{R}} |f(s)|$$

гэе. Тэгвэл $p = 1, 2$ ба ∞ үед

$$X_p = \{f \in X \mid \|f\|_p \leq 1\} \quad \text{ба} \quad M_p = \sup_{f \in X_p} \|T_f\|_\infty$$

болно. $D(t) := \frac{1}{2\pi} (1 + 2 \cos(t))$ гэвэл тодорхойлолтоос

$$T_f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \left(e^{i(s-t)} + 1 + e^{i(t-s)} \right) ds = \int_0^{2\pi} f(s) D(t-s) ds$$

болох ба $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ гэвэл

$$\|T_f\|_\infty \leq \|f\|_p \|D\|_q$$

болохыг шалгахад хялбархан. Иймд $M_p \leq \|D\|_q$ болно. Одоо дурын $\varepsilon > 0$ хувьд $f \in X_p$ функц $\|T_f\|_\infty \geq T_f(0) \geq \|D\|_q - \varepsilon$ байхаар олдохыг харуулъя. Үүний тулд

- $p = \infty, q = 1$ үед $f \in X_\infty$ -ийг D -ийн тэмдэгтэй бараг адилхан,
- $p = 1, q = \infty$ үед $f \in X_1$ -ийг 0 дээрх δ -функцтэй бараг адилхан,
- $p = q = 2$ үед $f \in X_2$ -ийг $D/\|D\|_2$ гэж

авахад болно. Эндээс аль ч тохиолдолд $M_p = \|D\|_q$ болох нь мөрдөнө. Иймд

$$M_\infty = \|D\|_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \quad M_1 = \|D\|_\infty = \frac{3}{2\pi}, \quad M_2 = \|D\|_2 = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

байна.

Бодолт 2016.02.07*. 2×2 комплекс матрицын Жордан блокийн хэмжээ нь 1 эсвэл 2 байхыг анзаарвал

$$S = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X \neq 0_2, \operatorname{tr}(X) = 0, \det(X) = 0\}$$

болно. Энд $0_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a + d$ ба $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$.

- (1) $F := \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(X) = 0, \det(X) = 0\}$ гэе. F нь битүү бөгөөд S -ийг агуулах тул $\bar{S} \subseteq F$ байна. Мөн $\varepsilon \rightarrow 0$ үед $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0_2$ тул $F \subseteq \bar{S}$ байна. Иймд $\bar{S} = F$ буюу $\bar{S} \setminus S = \{0_2\}$ байна.

- (2) Гомеоморфик гэхийг $\simeq$, гомотопи эквивалент гэхийг $\approx$ гэж тэмдэглэе. $\bar{S}$ нь гүдгэр тул $\bar{S} \approx \{0_2\}$ байна. Одоо бүхэл коэффициенттой гомологи ашиглан S -ийг нэг цэгтэй гомотопи эквивалент биш гэж харуулъя.

$S \simeq \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid a^2 + bc = 0, (b, c) \neq (0, 0)\}$ гэж адилтгая. $U := \{(a, b, c) \in S \mid b \neq 0\}$ гэвэл $U \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \approx \mathbb{C}^\times$ байна. Энд $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Иймд $H_1(U) \cong H_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$ байна.

Мөн ижлээр $V := \{(a, b, c) \in S \mid c \neq 0\}$ хувьд $V \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \approx \mathbb{C}^\times$ ба $U \cap V \simeq \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ болох тул $H_1(V) \cong H_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$ ба $H_1(U \cap V) \cong H_1(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}^2$ байна.

U, V нь задгай бөгөөд $S = U \cup V$ тул Mayer-Vietoris-ийн дараалал бичвэл

$$0 \longrightarrow H_2(S) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow H_1(S) \longrightarrow 0$$

болно. Энд $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Эндээс $H_1(S) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\cong 0 \cong H_1(\bar{S})$ болох тул $S \not\approx \bar{S}$ байна.

Бодолт 2016.02.14. $n \geq 0$ хувьд $S_n := \sum_{k=0}^n a_k \omega^k$ гэе.

- (1) $|\omega| = 1$ тул хэрэв S_n нийлдэг бол Кошийн шинжүүрээр $a_n = |a_n \omega^n| = |S_n - S_{n-1}| \rightarrow 0$ байна. Одоо $a_n \rightarrow 0$ гэе. Тэгвэл $\omega^3 = 1$ бөгөөд $\omega^2 = -1 - \omega$ тул

$$S_{3n+2} = \sum_{k=0}^n (a_{3k} + a_{3k+1}\omega + a_{3k+2}\omega^2) = \sum_{k=0}^n (a_{3k} - a_{3k+2}) + \sum_{k=0}^n (a_{3k+1} - a_{3k+2})\omega$$

болно. Энд

$$b_n := \begin{cases} a_{3k+j}, & n = 2k, \\ a_{3k+2}, & n = 2k+1 \end{cases} \quad \text{ба} \quad c_n := \begin{cases} a_{3k+1}, & n = 2k, \\ a_{3k+2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

гэвэл $b_n \searrow 0$ ба $c_n \searrow 0$ болно. Иймд Лейбницийн шинжүүрээр $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k$ ба $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (-1)^k$ цуваанууд нийлнэ. Эндээс S_{3n+2} нь нийлэх бөгөөд $a_n \rightarrow 0$ тул S_n нь мөн адил нийлнэ.

- (2) $b := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (-1)^k$ ба $c := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (-1)^k$ гэвэл $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k = b + c\omega$ болно. Лейбниц-ийн шинжүүрээр $0 \leq b \leq b_0 = a_0 \leq 1$ болох ба мөн $0 \leq c \leq b$ байх нь илт. Иймд

$$D := \{b + \omega c \mid 0 \leq c \leq b \leq 1\}$$

гэвэл $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k \in D$ байна. Нөгөө талаас $a_0 = b$, $a_1 = c$ ба $a_k = 0$ ($k \geq 2$) гэж авбал $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k$ цувааны нийлбэр D -ийн дурын утгыг авч болох нь харагдана. Эцэст нь $D = \{t + (\omega + 1)s \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$ байх нь илт тул D нь 0 , 1 , $\omega + 1$ оройтой гурвалжинд хашигдсан муж байна.

Бодолт 2016.02.21. Доорх бодолтод бид зөвхөн комплекс *квадрат* матриц авч үзнэ.

- (1) $f(x) = x^n$ үед батлахад хангалттай. Үүнийг индукцээр баталъя. $n = 0$ үед илт. Хэрэв n үед үнэн бол $(S + N)^{n+1} = (S + N)^n (S + N) = (S^n + nS^{n-1}N)(S + N) = S^{n+1} + (n+1)S^n N$ тул $n+1$ үед үнэн. Иймд дурын n -ийн хувьд үнэн.
- (2) Ямар ч комплекс f олон гишүүнт ба A матрицын хувьд A диагональчлагддаг бол $f(A)$ нь мөн диагональчлагдана. Үнэхээр $A = RDR^{-1}$ ба D нь диагональ матриц бол $f(A) = Rf(D)R^{-1}$ болох ба $f(D)$ нь диагональ матриц байна.

Одоо f нь

A урвуутай ба диагональчлагддаггүй бол $f(A)$ нь мөн диагональчлагддаггүй

гэсэн нөхцөлийг хангадаг гэе. Тэгвэл $\deg f \geq 1$ болох нь илт ба $\deg f = 1$ үед f нь заасан хэлбэртэй тул $\deg f \geq 2$ гэж үзье. Хэрэв ямар нэг $\lambda \neq 0$ тооны хувьд $f'(\lambda) = 0$ бол

$$S := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ба} \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицууд (1)-ийн нөхцөлийг хангах ба $f'(S) = \begin{pmatrix} f'(\lambda) & 0 \\ 0 & f'(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ тул $f(S + N) = f(S)$ болно. Иймд $A := S + N$ матриц нь урвуутай бөгөөд диагональчлагддаггүй боловч $f(A)$ нь диагональ матриц болох тул нөхцөлд харшилна. Эндээс $f'(x)$ нь 0 -ээс өөр язгуургүй болох ба f нь бодлогод заасан хэлбэртэй байна.

Бодолт 2016.02.28. $u \in \mathbb{C}$ нь $z^2 e^{a-z} = 1$ тэгшитгэлийн $|u| < 1$ байдаг шийд гэе.

$u = re^{i\theta}$, энд $0 \leq r < 1$ ба $-\pi < \theta \leq \pi$, гэж бичье. Тэгвэл $u = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ тул

$$u^2 e^{a-u} = r^2 e^{i2\theta} e^{a-r \cos \theta} e^{-ir \sin \theta} = 1$$

болно. Эндээс $r^2 e^{a-r \cos \theta} = 1$ ба $2\theta - r \sin \theta \in 2\pi \mathbb{Z}$ болно.

$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\varphi) := 2\varphi - r \sin \varphi$ функцийг авч үзвэл $f'(\varphi) = 2 - r \cos \varphi > 0$ тул f нь эрс өсдөг функц байна. Цаашилбал $f(-\pi) = -2\pi$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 2\pi$ тул

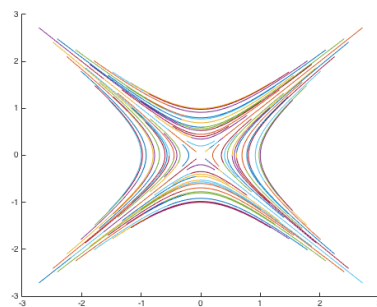
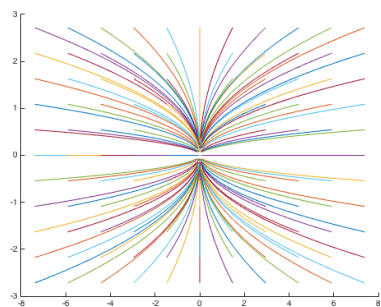
$$-\pi < \theta \leq \pi \quad \text{ба} \quad f(\theta) \in 2\pi \mathbb{Z}$$

нөхцөлөөс $\theta = 0$ эсвэл $\theta = \pi$ болох нь мөрдөнө. Аль ч тохиолдолд u нь бодит тоо болно.

Одоо $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := t^2 e^{a-t}$ функцийг авч үзье. Тэгвэл $g'(t) = t(2-t)e^{a-t}$ тул g нь $[-1, 0]$ завсар дээр эрс буурдаг, $(0, 1]$ завсар дээр эрс өсдөг байна. Мөн g нь тасралтгүй бөгөөд $g(-1) = e^{a+1} > 1$, $g(0) = 0 < 1$, $g(1) = e^{a-1} > 1$ тул $g(t) = 1$ тэгшитгэл $(-1, 1)$ завсар дээр яг хоёр шийдтэй болж бодлого бодогдов.

Бодолт 2016.03.06. Юуны өмнө $\Phi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ болохыг анхааръя.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ үед хагас параболауд, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ үед гиперболауд гарна.



(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ үед $x(t) = x_0 \exp(2t)$ ба $y(t) = y_0 \exp(t)$ болно. Энэ үед $Y \cong S^1$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Иймд Y нь Хаусдорф байна.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ үед $x(t) = x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t)$ ба $y(t) = x_0 \sinh(t) + y_0 \cosh(t)$ болно. Энэ үед $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ болон $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ цэгүүдийн Y дэх дүрүүдийн орчингууд заавал огтлолц-оно. Иймд Y нь Хаусдорф биш.

Бодолт 2016.03.13. Юуны өмнө $e^x - x$ функц $x = 0$ цэг дээр хамгийн бага утгаа авах тул дурын $x \in \mathbb{R}$ хувьд $e^x \geq 1 + x$ болохыг анхааръя. Энд $x = \frac{1}{n}$ ба $x = -\frac{1}{n+1}$ гэж авбал

$$\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log(n) \leq \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

болно. $n \geq 1$ хувьд $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ба $\gamma_n := H_n - \log(n)$ гэе.

(1) $n \geq 1$ хувьд

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log(k)) = \log(n+1) > \log(n)$$

тул $\{\gamma_n\}$ нь 0-ээр доороосоо зааглагдсан. Мөн

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log(n) \leq 0$$

тул $\{\gamma_n\}$ нь буурдаг байна. Иймд $\{\gamma_n\}$ дараалал нь нийлнэ.

(2) $B_n = \frac{1}{2}H_n$ ба $A_n = H_{2n} - B_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$ байна. Иймд

$$\begin{aligned} 2(A_{pn} - B_{qn}) &= 2H_{2pn} - H_{pn} - H_{qn} \\ &= 2(\gamma_{2pn} + \log(2pn)) - (\gamma_{pn} + \log(pn)) - (\gamma_{qn} + \log(qn)) \\ &= 2\gamma_{2pn} - \gamma_{pn} - \gamma_{qn} + 2\log(2) + \log(p) - \log(q) \end{aligned}$$

болно. Эндээс $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{pn} - B_{qn}) = \log(2\sqrt{p/q})$ болно.

Бодолт 2016.03.20. $n \times n$ комплекс матрицуудын олонлогийг $M_n(\mathbb{C})$ гэе. $A \in M_n(\mathbb{C})$ -ийн хувьд A -ийн олон гишүүнтүүдийн олонлогийг $\mathbb{C}[A] := \{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[X]\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ гээд A -тай байраа сольдог матрицуудын олонлогийг $\mathbb{C}[A]' := \{B \mid AB = BA\} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ гэе. Тэгвэл $\mathbb{C}[A] \subseteq \mathbb{C}[A]'$ болох нь илт.

A нь $J_{\lambda,n}$ Жордан блок үед

$$\mathbb{C}[J_{\lambda,n}] = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & b_1 & b_2 & \vdots \\ \vdots & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 \end{pmatrix} \mid b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}[J_{\lambda,n}]'$$

болохыг хялбархан шалгаж болно. (а), (b) нөхцөлүүд нь төсөөгөөр хадгалагдах тул Жордан нормаль формын теоремоор $A = J_{\lambda_1, n_1} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_s, n_s}$ гэж үзэж болно. Энд $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $n_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq s$). Тэгвэл $\mathbb{C}[A] \subseteq \mathbb{C}[J_{\lambda_1, n_1}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[J_{\lambda_s, n_s}]$ болно.

(а) үнэн гэе. Тэгвэл $\dim \mathbb{C}[A] = n$ болох тул $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[J_{\lambda_1, n_1}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[J_{\lambda_s, n_s}]$ болно. Мөн $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) болох ба дурын $B \in \mathbb{C}[A]'$ нь A -ийн өргөтгөсөн хувийн огторгуйнуудыг хадгална гэдгээс $\mathbb{C}[A]' \subseteq \mathbb{C}[J_{\lambda_1, n_1}]' \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[J_{\lambda_s, n_s}]'$ болно. Иймд (b) үнэн.

(а) худал гэе. Тэгвэл $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $s = 2$, гэж үзэж болно. Одоо B -г зөвхөн $(1, n)$ дээр 1 байдаг бусад нь 0 байдаг матриц авбал $B \in \mathbb{C}[A]'$ болох ба $B \notin \mathbb{C}[J_{\lambda_1, n_1}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}[J_{\lambda_s, n_s}]$ тул $B \notin \mathbb{C}[A]$ байна. Иймд (b) худал.

Бодолт 2016.03.27. Дурын $x, y \in \mathbb{R}$ хувьд ρ нь зөв тодорхойлогдсон бөгөөд $0 \leq \rho(x, y) \leq 1/2$ болох нь илт. Иймд d нь бас зөв тодорхойлогдсон бөгөөд $0 \leq d(x, y) \leq 1$ байна. Мөн хэрэв $|x - y| \leq 1/2$ бол $\rho(x, y) = |x - y|$ байна.

(1) $d(x, y) = 0$ бол $x = y$ гэж баталъя. Зайны бусад аксиомууд биелэх нь илт (гурвалжны тэнцэтгэл биш дээр бага зэрэг бодох хэрэгтэй, гэхдээ хэцүү биш).

$$2^{n-1} \geq |x - y| \text{ байх } n \geq 0 \text{ сонгож авбал } |x/2^n - y/2^n| \leq 1/2 \text{ ба}$$

$$0 \leq 2^{-n} \rho(x/2^n, y/2^n) \leq d(x, y) = 0$$

тул $x = y$.

(2) $m, l \geq N \geq 0$ гээ. Тэгвэл $0 \leq n \leq N$ хувьд $\rho(x_m/2^n, x_l/2^n) = 0$ ба $n \geq N+1$ хувьд $\rho(x_m/2^n, x_l/2^n) \leq 1/2$ байна. Иймд $d(x_m, x_l) \leq 2^{-(N+1)}$ болох ба эндээс $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ нь Коши дараалал болно.

(3) $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ дараалал $x \in X$ гэсэн хязгаартай гээ. $2^{n-1} \geq 1+x$ байх $n \geq 0$ сонгож авъя. Тэгвэл дурын $m \geq n$ хувьд

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &\geq 2^{-n} \rho(x_m/2^n, x/2^n) \\ &= 2^{-n} \min_{k \in \mathbb{Z}} |2^{m-n} - (1+x)2^{-n} + k| \\ &= 4^{-n} (1+x) \end{aligned}$$

болно. Энэ нь зөрчил.

Бодолт 2016.04.03. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ тул бидний олох интеграл нь

$$\begin{aligned} \iint_D \exp(-ax^2 - 2bxy - cy^2) &= \left(\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty + \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \right) \exp(-ax^2 - 2bxy - cy^2) dx dy \\ &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-ax^2 + 2bxy - cy^2) dx dy \end{aligned}$$

болохыг хялбархан харж болно (эерэг функц тул Тонелигийн теорем үйлчилнэ). Одоо $(x, y) = (x, xt)$ гэж орлуулъя. Тэгвэл $-ax^2 + 2bxy - cy^2 = -(a - 2bt + ct^2)x^2$ болох ба $dx dy = x dx dt$ болно. Өгсөн нөхцөлөөс $c > 0$ ба дурын $t \geq 0$ хувьд $a - 2bt + ct^2 > 0$ болох тул

$$\begin{aligned} \iint_D \exp(-ax^2 - 2bxy - cy^2) &= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \exp(-(a - 2bt + ct^2)x^2) x dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{a - 2bt + ct^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \arctan \left(\frac{ct - b}{\sqrt{ac - b^2}} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{b}{\sqrt{ac - b^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

болно.

Бодолт 2016.04.10. $n \times n$ хэмжээтэй нэгж матрицыг $1_{(n)}$ гээд $\lambda \in \mathbb{C}$ тооны хувьд $\lambda_{(n)} := \lambda \cdot 1_{(n)}$ гээ. B гэсэн 4×4 матрицыг

$$B := \begin{pmatrix} A & \mu_{(2)} \\ 1_{(2)} & 0_{(2)} \end{pmatrix}$$

гэж тодорхойлбол

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = \dots = B^k \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

болохыг хялбархан харж болно. Иймд бодлогын нөхцөл нь $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ гэж бичигдэнэ. Энэ нь Жорданы нормаль формын теоремоос B -ийн дурын хувийн утга $\lambda \in \mathbb{C}$ нь $\lambda^k \rightarrow 0$ буюу $|\lambda| < 1$ нөхцөлийг хангахтай ижил. Нөгөө талаас

$$\det(\lambda_{(4)} - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{(2)} - A & -\mu_{(2)} \\ -1_{(2)} & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} = \det((\lambda_{(2)} - A) \lambda_{(2)} - \mu_{(2)})$$

болохыг хялбархан шалгаж болох тул λ нь B -ийн хувийн утга болно гэдэг нь $\lambda \neq 0$ бөгөөд $\lambda - \mu \lambda^{-1}$ нь A -ийн хувийн утга болно гэдэгтэй ижил юм. Эндээс бидний олох A -ийн хувийн утгын муж нь

$$\{\lambda - \mu \lambda^{-1} \mid 0 < |\lambda| < 1\}$$

болно.

Бодолт 2016.04.17. $u, v \in \mathbb{R}^3$ векторуудын хувьд $u^t v = \langle u, v \rangle$ нь $\mathbb{R}^3$ дээрх стандарт дотоод үржвэр болох тул

$$A(u)v = v - 2\langle u, v \rangle u.$$

- (1) Нэгж урттай $u \in \mathbb{R}^3$ векторыг $u_1 := u$ гээд $\{u_1, u_2, u_3\}$ гэсэн ортонормал суурь болгож гүйцээвэл

$$A(u)u_1 = -u_1 \quad A(u)u_2 = u_2 \quad A(u)u_3 = u_3$$

болно. Иймд $A(u)$ нь u векторын дагуух толин хувиргалт болох бөгөөд хувийн утгууд нь $-1, 1, 1$ байна.

- (2) $R := A(u)A(v)$ ба $w := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ гэе. Тэгвэл $R(u) = v$, $R(v) = -(u + v)$, $Rw =$

w болохыг хялбархан шалгаж болно. Эндээс R нь w тэнхлэгийг тойруулсан $\arccos \langle u, v \rangle = \frac{2\pi}{3}$ өнцгийн эргүүлэлт болно. (Үнэхээр $\{u, v, w\}$ суурийн хувьд Грам-Шмидт хэрэглэвэл $u_1 := u$, $u_2 := \frac{1}{\sqrt{3}}u + \frac{2}{\sqrt{3}}v$, $u_3 = w$ нь ортонормал суурь болох ба энэ сууриар

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

болно.)

Бодолт 2016.04.23. Энэ бодолтод хэсэгчилсэн уламжлалыг $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ гэх мэтчилэн тэмдэглэе. $\frac{\partial}{\partial h} f(x+h, y+h, z+h) \Big|_{h=0}$ болон $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \Big|_{\lambda=1}$ утгуудыг (a), (b) нөхцөлүүдийг ашиглан тооцоолбол $f_x + f_y + f_z = 0$ ба $xf_x + yf_y + zf_z = \alpha f$ болно.

(1) $g_x = \frac{1}{f}f_x$, $g_y = \frac{1}{f}f_y$ ба $g_z = \frac{1}{f}f_z$ тул

$$g_x + g_y + g_z = 0 \quad xg_x + yg_y + zg_z = \alpha \quad x^2g_x + y^2g_y + z^2g_z = \frac{2\alpha}{3}(x + y + z)$$

болно. Эндээс g_x , g_y ба g_z -ийг олбол $dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz$ нь

$$dg = \frac{\alpha}{3} \left(\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-z} \right) dx + \left(\frac{1}{y-x} + \frac{1}{y-z} \right) dy + \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y} \right) dz \right)$$

болно.

(2) $h(x, y, z) := \frac{\alpha}{3} \log((x-y)(y-z)(x-z))$ гээ. Тэгвэл $dg = dh$ болохыг хялбархан шалгаж болно. Иймд $g - h$ нь тогтмол болно. Эндээс

$$f(x, y, z) = \exp g(x, y, z) = C \cdot \exp h(x, y, z) = C \cdot ((x-y)(y-z)(x-z))^{\frac{\alpha}{3}},$$

энд $C > 0$ тогтмол болно. Нөгөө талаас энэ функц бодлогын нөхцөл хангахыг шалгах хэцүү биш.

Бодолт 2016.05.01. $z = 0$ цэгийн орчинд $W(\alpha, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha, \beta) z^n$ гээ.

(1) (a) нөхцөлөөс $w_0(\alpha, \beta) = 0$ болно. (b) нөхцөлөөс $w_1(\alpha, \beta) = 1$ ба $n \geq 2$ үед

$$nw_n(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)w_{n-1}(\alpha - \beta, \beta)$$

болох тул

$$w_n(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha - \beta)}{n} w_{n-1}(\alpha - \beta, \beta) = \dots = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta) \dots (\alpha - (n-1)\beta)}{n!}$$

болно. $\left| \frac{w_n(\alpha, \beta)}{w_{n+1}(\alpha, \beta)} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha - n\beta} \right| \rightarrow \frac{1}{|\beta|}$, $(n \rightarrow \infty)$ тул нийлэлтийн радиус нь эерэг байна.

(2) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ хувьд $z = 0$ цэгийн орчинд

$$W(0, 0; z) = z$$

$$W(\alpha, 0; z) = \frac{\exp(\alpha z) - 1}{\alpha}$$

$$W(0, \beta; z) = \frac{\log(1 + \beta z)}{\beta}$$

$$W(\alpha, \beta; z) = \frac{(1 + bz)^{\alpha/\beta} - 1}{\alpha}$$

болохыг хялбархан шалгаж болох ба эндээс бодлого мөрдөнө.

Бодолт 2016.05.08. $x \in \mathbb{C}$ -ийн эквивалентын ангийг $[x]$ гэж тэмдэглэе. α ба α^{-1} нь ижил эквивалентийн харьцаа тодорхойлох тул $|\alpha| \geq 1$ гэж үзэж болно.

- (1) $|\alpha| = 1$ үед $x \sim y \implies |x| = |y|$ тул $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\sim$ нь $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\} \times (\{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}/\sim)$ гэж задарна. Иймд $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\sim$ нь компакт биш байна.

$|\alpha| > 1$ гэе. Тэгвэл $A = \{x \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |x| \leq |\alpha|\}$ нь компакт бөгөөд дурын $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ хувьд $|\alpha^n x| \geq 1$ байдаг хамгийн бага бүхэл n тоог сонговол $\alpha^n x \in A$ болно. Өөрөөр хэлбэл $A \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})/\sim$, $x \mapsto [x]$ буулгалт нь сюръектив байна. Тасралтгүй гэдэг нь илт тул $(\mathbb{C} \setminus \{0\})/\sim$ нь компакт байна. Энд компакт огторгуйн тасралтгүй дүр нь компакт байдгийг ашиглав.

- (2) $|\alpha| = 1$ үед (1) хэсгийн бодолтыг ашиглан $\mathbb{C}/\sim$ огторгуйг $[0]$ цэгээс гарсан цацрагуудад задалж бичье. Тэгвэл $\alpha = \exp(2\pi i\theta)$, $\theta \in \mathbb{Q}$ үед $\mathbb{C}/\sim$ нь төгсгөлөг тооны цацрагаас тогтох тул Хаусдорф болох бөгөөд бусад тохиолдолд Кронекорын нягтшилын теоремоос Хаусдорф биш болно.

$|\alpha| > 1$ үед дурын $x \in \mathbb{C}$ -ийн хувьд $\alpha^n x \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$ байна. Эндээс дурын $[x] \in \mathbb{C}/\sim$ ангийн задгай орчин нь $[0]$ -ийг агуулна. Иймд $\mathbb{C}/\sim$ нь Хаусдорф биш байна.

Бодолт 2016.05.15. Эхлээд бодлогоо комплекс талбар дээр бодъё.

$p(x) := x^2 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ гэе. Тэгвэл M нь $p(X) = 0$ буюу минимал олон гишүүнт нь p -г хуваадаг матрицуудаас тогтоно. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ нь $p(x)$ -ийн язгуурууд бол Жордан нормаль формын теоремоор X нь

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

матрицуудын аль нэгтэй эквивалент байна.

Рационал формын теоремоос $\mathbb{C}$ дээр эквивалент бодит матрицууд нь $\mathbb{R}$ дээр эквивалент байна. Иймд $D := p^2 - 4q$ гэе.

$D > 0$ үед $\alpha \neq \beta$ нь бодит бөгөөд дээрх матрицууд нь бүгд хоорондоо эквивалент биш. Иймд 5 ангитай.

$D = 0$ үед $\alpha = \beta$ нь бодит бөгөөд дээрх матрицуудаас ялгаатай 2 анги гарна. Иймд 2 ангитай.

$D < 0$ үед $\alpha \neq \beta$ нь бодит биш. Дээрх матрицуудаас зөвхөн эхний матриц нь бодит трасе-тэй, иймд бусад нь бодит матрицтай эквивалент биш. Иймд дээд тал нь 1 анги байх ба нөгөө талаас M нь хоосон биш болохыг хялбархан шалгаж болох тул ядаж 1 ангитай. Иймд 1 ангитай.

Геогебра ба Монголын Геогебра Хүрээлэн

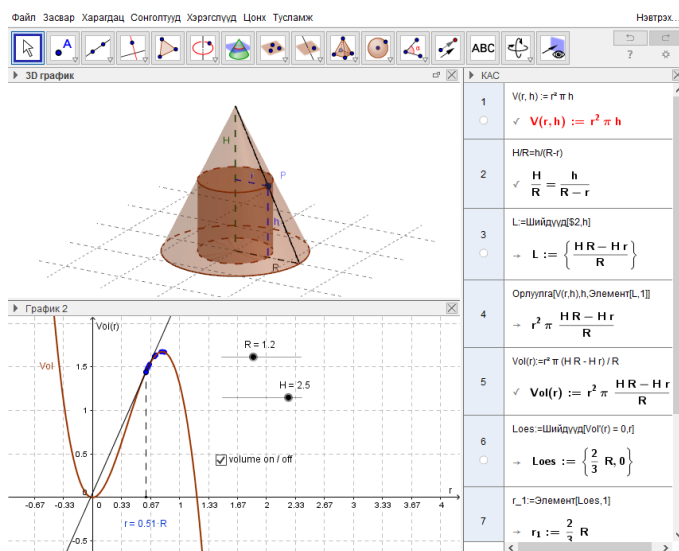
Ц.Навчаа (МУИС)

Геогебра гэж юу вэ?

Геогебра нь геометр, алгебр, хүснэгт, график, статистик, анализыг нэгэн багц болгон багтаасан ашиглахад хялбар, боловсролын бүх түвшнийхэнд зориулсан, дэлхий нийтийн суралцахуй ба сургахуйн шинэчлэл болон шинжлэх ухаан, технологи, инженерчлэл, математик (ШУТИМ)-ийн боловсролыг манлайлан дэмжин бүтээгдсэн математикийн динамик програм хангамж юм. Геогебра нь бараг бүх улсын олон сая хэрэглэгчийг өөртөө татах замаар маш түргэн өргөжин тэлж буй хамтын нийгэмлэг. Зарим тоог дурьдвал: 2015 оны 7-р сарын байдлаар 190 улс, 62 хэл дээр, 153 хүрээлэн (85 орны), 40 гаран хөгжүүлэгч, 200 гаран орчуулагчид, 200.000 ажлын хуудас, 50 сая апплет үзсэн, сард сая удаа татагддаг, танхимын сая гаруй компьютеруудад татаж суулгасан [1] байсан бол өнөөдрийн байдлаар 430.630 ажлын хуудас байршуулсан нь Геогебрагийн хэрэглээ асар хурдацтай өсч байгааг харуулж байна.

Геогебрагийн онцлог, боломж

Геометр, Алгебр, Магадлал статистик, КАС, 3D график, Хүснэгт гэсэн 6 төлвүүдтэй ба дурын сонгосон төлвүүдийн хооронд уялдаа холбоотой бүрэн динамик байдлаар ажиллах боломжтой, хялбар ашиглах интерфэйстэй.



Зураг 1. Зааглалттай оптимизацийн бодлогын жишээ

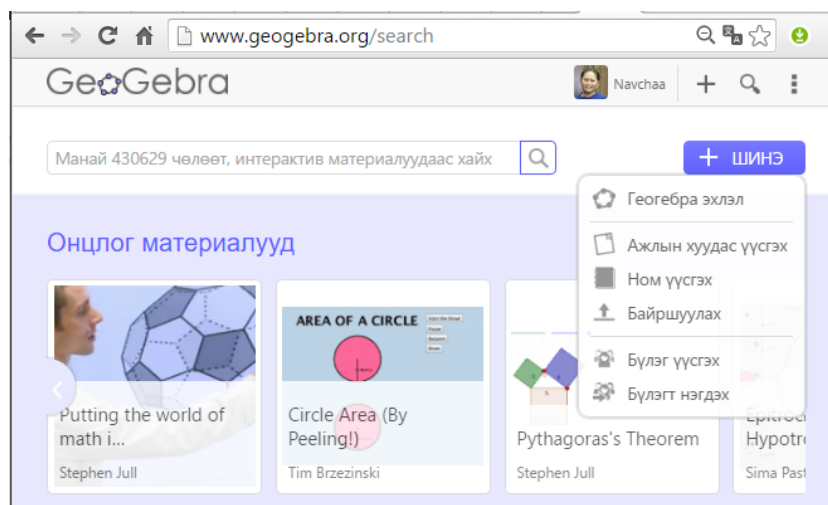
Геогебра програм нь Компьютер алгебрийн систем болон Динамик геометрийн системийг нэгтгэж чадсан, компьютерийн бүх үйлдлийн систем дээр төдийгүй ухаалаг гар утас, таблет гэх мэт бүх төрлийн төхөөрөмж дээр ажилладаг



Зураг 2. Математикийг сурах шинэ арга зам

тул хэн ч, хаана ч, хэдийд ч математикаар хичээллэх боломжийг олгосноороо математикийг нээлттэй бөгөөд хүртээмжтэй болгож буй юм. Мөн дүрслэлийн цоо шинэ аргаар дээрх 6 төлвүүдийг хооронд нь холбож математикийг турших, харах, хүрэлцэх боломжийг олгосноор математикийг мэдрэхүйц болгодог (Зураг 2).

Геогебрагийн www.geogebra.org вэб хуудас дээр нэвтрэх эрхээ үүсгэсэн ямар ч хэрэглэгч геогебра програмаар хийсэн ажлын хуудсыг байршуулах боломжтой бөгөөд түүнийгээ бусадтай хуваалцаж хэлэлцэх, мөн бусдын бүтээсэн ажлын хуудсуудаас түлхүүр үгээр хайх, ангилах, татаж авах, өөрчлөн ашиглах боломжтой байдаг (Зураг 3).

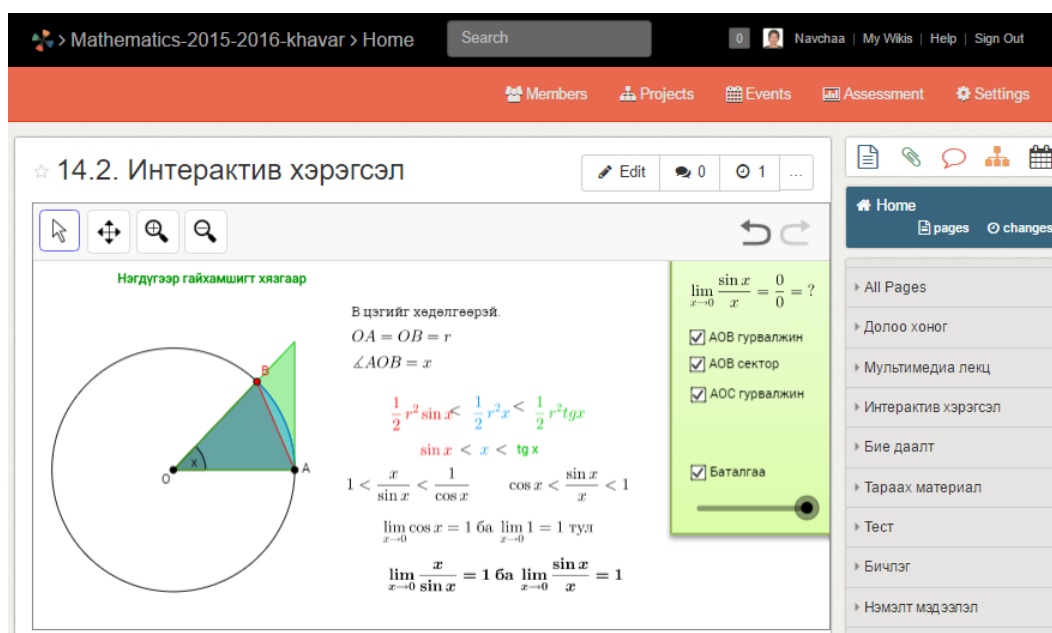


Зураг 3. Геогебра хэрэглэгчийн нэвтрэх эрх

HTML embed кодын тусламжтайгаар дурын вэб хуудсанд Геогебрагийн динамик, интерактив ажлын хуудсыг байршуулан ажиллуулах боломжийг олгодог. Жишээ нь: Математикla хичээлийн Wikispaces.com сургалт удирдах систем дээр оруулсан байдал (Зураг 4).

Геогебра дээр латехээр бичих бүрэн боломжтой байдаг тул аливаа математикийн ном, сурах бичгийн график, дүрслэлийг шийдэх математик илэрхийллийг хамтад нь оруулж мөн латех рүү хөрвүүлэн гаргаж болно. 2D график зургийг растер графикийн

png файл, техэд зориулсан eps файл, хөдөлгөөнт графикийн gif файл руу хөрвүүлэх хүчин чадалтай.



Зураг 4. 1-р гайхамшигт хязгаарын баталгааны интерактив хэрэгсэл

Монголын Геогейбра Хүрээлэн



2012.06.21-нд Олон Улсын Геогейбра Хүрээлэн (ОУГХ) рүү Монголд Геогейбрагийн салбар хүрээлэнг байгуулах хүсэлт илгээн 06.24-нд ОУГХ-ийн ерөнхийлөгч Маркус Хохенвартер гарын үсэг зурж зөвшөөрснөөр Монголын Геогейбра Хүрээлэн (МГХ) МУИС-ийн МКС-ийн Математикийн дидактик, Геометрийн тэнхимийн харьяа, дэлхийн 100 дахь хүрээлэн болж Азид байгуулагдсан билээ [2].

Олон Улсын Геогейбра Хүрээлэнгийн хэтийн зорилго

Олон Улсын Геогейбра Хүрээлэн (ОУГХ) математикийн нээлттэй динамик Геогейбра програм хангамжийг санал болгон дэлхий дахины боловсролын технологи, шинжлэх ухаан, математикийг сайжруулахад бүх багш, сурагчдад материалуудыг хөгжүүлэлтээр дэмжих, сургалтанд мэргэшүүлэх зэрэг боломжийг олгоно. Энэ нь судлаачид багш нар болон биеэ даан суралцагчдын хоорондын холбоо харилцааг төлөвшүүлж бэхжүүлэх, эдгээр хэрэглэгчдийн сонирхлын бүлэглэлийг эрж хайж бий болгох явдал юм.

ОУГХ ба Монголын Геогейбра Хүрээлэнгийн үйл ажиллагааны чиглэл

Үйл ажиллагааны дараах гурван чиглэлийг баримтална. Үүнд:

- **Сургалт ба дэмжлэг:** Багш нар болон оюутан-багш нарт мэргэжлийн хөгжүүлэлтийн боломжууд ба дэмжлэгийг өгөх ба зохицуулах
- **Хөгжүүлэлт ба Хуваалцах:** Математикийн динамик Геогейбра програм хангамж нь тасралтгүй сайжран хөгжсөөр байгаа ба хичээлийн материалууд болон нөөцүүдийг сургалт семинараар дамжуулан улам сайжруулан хөгжүүлэх, хуваалцах
- **Судалгаа ба Хамтын ажиллагаа:** ОУГХ болон МГХ-үүдийн хооронд, мөн олон улсын хамтран ажиллагчдын хоорондын хамтын ажиллагааг сургалт, хөгжлийн идэвхтэй үйл ажиллагааг идэвхижүүлэх замаар математикийг сургах, суралцахууд анхаарал хандуулсан Геогейбратай хамааралтай судалгааг дэмжиж, төлөвшүүлэх

МГХ өнгөрсөн хугацаанд

2012 оноос Геогейбра програмыг Математикийн багшийн ангийн оюутнуудад Математикийн хэрэглээний програмын хичээлийн хүрээнд зааж эхэлсэн [3] ба ММБА-ийн зохион байгуулсан сургалтаар УБ хот болон хөдөө орон нутгийн 840 орчим багш нарт Геогейбрагийн танилцуулгыг видео хэлбэрээр хүргэсэн [4].

- 2013.06.29-нд Хураангуй гарын авлага байршуулсан.
- 2013.07.20-нд Вэб хуудас орчуулагдаж дуусав.
- 2013 оны 8 сард програмын орчуулга эхний хувилбараар бүрэн дуусч, 8-р сарын 9-нд Геогейбра 4.2 дээр шинэчлэл хийгдсэн.
- 2013.08.20-нд Гарын авлага Геогейбра 4.2 хувилбар орчуулгыг байршуулсан.

2014 онд БСШУЯ-ны захиалгаар ЕБС-ийн Цахим контентийн иж бүрэн материал бэлтгэхэд Геогейбра програмыг бүрэн ашигласан төдийгүй, програмын хөгжүүлэгч нарт Геогейбрагийн сургалтыг явуулсан. Энэ нь Математикийн хичээлийн аливаа цахим хэрэглэгдэхүүнийг бусад програм хангамжуудаар (тухайлбал, флаш технологи, жава, html хэл) бэлтгэхэд учир дутагдалтай болж байгаагийн нэг илрэл гэж үзэж байна. Энэхүү хэрэгцээг Геогейбра програм хангах бүрэн чадвартай болох нь харагдсан.

2014.12.01 – 2015.01.23 хооронд Нийслэлийн дүүрэг бүр дээр математик мэдээлэл зүйн багш нарт Геогейбрагийн анхан, дунд шатны сургалтыг зохион байгуулж явуулсан.

Геогейбрагийн сүүлийн үеийн шинэчлэлт, боломжуудыг танилцуулах, харилцан туршлага солилцох "GeoGebra Gather 2015" олон улсын хурал 2015.07.15–17 хооронд

Австариин Линз хотноо зохион байгуулагдаж [5], Монголын "Геогейбра өдөрлөг"-ийг 2016.05.14-нд МУИС дээр зохион байгуулж ЕБС-ийн багш нар идэвхтэй оролцож санал бодлоо солилцлоо [6].

Эдүгээ Геогейбрагийн платформын орчуулга, програмын орчуулга, Геогейбрагийн монгол хэл дээрх онлайн хураангуй гарын авлагыг орчуулан, хийж байршуулах зэрэг ажлыг хийж байна.

Цаашид ЕБС-ийн багш нар төдийгүй их дээд сургуулийн математикийн багш нарт Геогейбрагийн ажлын хуудсыг математикийн ямар ч салбарын агуулгатай холбон бэлтгэх, бусадтайгаа хуваалцах, хэлэлцүүлэг, бүлгүүд үүсгэх ажил дээр анхааран ажиллах төлөвлөгөөтэй байна. МГХ-ийн үйл ажиллагааны тухай болон дэлгэрэнгүй мэдээллийг www.facebook.com/GeogebraMNG хуудаснаас авна уу.

Ашигласан материал

- [1] Zsolt Lavicza (2015.07.) Geomatech research aspects, Austria, Linz
- [2] <http://www.geogebra.org/blog/2012/06/100-geogebra-institutes/>
- [3] <http://www.geogebra.org/blog/2013/06/geogebra-in-mongolia/>
- [4] http://www.geogebra.org/manuGl/en/aeoGebra_nIstitute:2012_Unnual_Report_GI_NAM
- [5] <http://tube.geogebra.org/b/665971>
- [6] <http://www.geogebra.org/m/grTnysrU>

CIMPA-DAAD “Стохастик Процесс ба Түүний Хэрэглээ” олон улсын сургалт

Зохион байгуулах хорооны дарга Г. Баярмагнай (МУИС)

2015 оны 7 сарын 27-оос 8 сарын 7-ны хооронд МУИС-ийн математикийн тэнхим дээр “Стохастик процесс ба түүний хэрэглээ” нэртэй CIMPA-DAAD судалгааны төвшний сургалт (CIMPA-DAAD research school on Stochastic Processes and Applications) зохион байгуулагдан явагдсан. Сургалтад 20 гаран орны нийт 120 гаран багш, эрдэмтэн, судлаач болон оюутнууд оролцсон бөгөөд нийт долоон цуврал лекц болон таван сэдэвт лекцийг Англи, Герман, Франц, Мексик, Норвеги болон Швецарийн багш нар уншсан. Мөн сургалтын бэлтгэл болгож Австри улсын Венийн Техникийн Их Сургуулийн профессор Др. Ф. Хубалек МУИС дээр 3 долоо хоногийн магадлалы онлын бэлтгэл сургалт явуулсан.

Стохастик процесс ба түүний хэрэглээ сургалт нь зохион байгуулалтын болон шинжлэх ухааны маш өндөр төвшинд явагдаж өнгөрснийг зочин багш нар болон оролцогчдоос авсан судалгаа харуулсан бөгөөд гадаад дотоодын багш оюутнуудын хооронд холбоо тогтоох, цаашдын хамтын ажиллагааны эхлэлийг тавих цаашилбал Монгол улсад математик статистикийн ухааныг хөгжүүлэх нэгэн том алхам болсон, МУИС-ийн математикийн тэнхимийн түүхэнд үлдэхүйц томоохон ач холбогдолтой хурал болсон.

Сургалтын зохицуулагчдаар

Др. Ж. Бертуан (Цурихын ИС),

Др. А. Кипрано (Баттын ИС),

Др. С. Цогзолмаа (МУИС);

Олон улсын зохион байгуулагчдаар

Др. Э. Бардоу (Лондон ЭЗС),

К. Гелдхаузер (Боннын ИС);

Орон нутгийн зохион байгуулагчдаар

Др. Г. Баярмагнай (МУИС),

Др. Ц. Сарантуяа (ШУТИС),

Др. Н. Ууганбаатар (МУИС),

Др. А. Ганбат (МУИС),

Др. Б. Барсболд (МУИС),

Др. С. Цогзолмаа (МУИС);

Шинжлэх ухааны хорооны гишүүдээр

Др. А. Ламберт (Парис 6 ИС ба Коллеж де Франц),

Др. К. Голдшмидт (Оксфордын ИС),

Др. А. Кипрано (Баттын ИС),

Др. Л. Попович (Конкордиа ИС),

Др. Б. Чулуундорж (МУИС),

Др. Ү. Отгонбаяр (МУИС)

нар ажилласан. Тус сургалтыг МУИС-ийн ШУС, МУИС-ийн ЭШИХ, Онолын болон Хэрэглээний Математикийн Олон Улсын Төв (СИМРА), Германы Академик Солилцооны Алба (DAAD), Дэлхийн Математикийн Нийгэмлэг, Магадлал Статистикийн Бернуллийн Нийгэмлэг, Монголын Хөдөө Аж Ахуйн Бирж, Малын Индексжүүлсэн Даатгал Төсөл, Тэнгэр Даатгал ХХК, ШУТИС, Төрийн банк ивээн тэтгэсэн. Бүх ивээн тэтгэгчиддээ сургалтын зохион байгуулагчид болон нийт оролцогчдынхоо нэрийн өмнөөс гүн талархал илэрхийлье. Ялангуяа МУИС-ийн ХШУИС-аас орно гэж төлөвлөгдөж байсан 10 сая төгрөгийн санхүүжилт бүтэлгүй болж сургалтын төсөв маш хүнд байдалд ороход 10.2 сая төгрөгөөр ивээн тэтгэж сургалтыг амжилттай явуулах боломж гаргаж өгсөн МУИС-ийн ЭШИХ-д онцгойлон талархаж байна.

Дээрх хүндрэлийг ойлгосон, мөн сургалтын явц, зохион байгуулалт маш сайн байсныг өндрөөр үнэлсэн олон улсын зохион байгуулагчид болон хамтрагч байгууллагууд маань нэмэлт санхүүжилт хайсан.

Ингээд хурлын бусад үйл ажиллагааг дэмжих, хурал зохион байгуулахад оролцсон багш, ажилчид болон оюутнуудыг урамшуулах, цаашилбал математикийн тэнхим дээр магадлал, статистикийг хөгжүүлэх, энэ чиглэлийн хамтын ажиллагааг сайжруулахад зориулж

Германы Академик Солилцооны Алба	16 сая төгрөг
Онолын болон Хэрэглээний Математикийн Олон Улсын Төв	3.1 сая төгрөг
Дэлхийн Математикийн Холбоо	2.7 сая төгрөг
Макс-Планк Институтын профессор Г. Борот	2.3 сая төгрөг

нэмэлт санхүүжилт үзүүлсэн /хандивласан/ болно.

Энэ санхүүжилтээс ЭШИХ-ийн гаргасан 10.2 сая төгрөгийг 100% эргүүлэн төлсөн гэдгийг энд мэдэгдэхэд таатай байна.

Сургалтын тухай дэлгэрэнгүй тайланг (Англи хэл дээр) доорх хаягаар үзэж болно.
<http://www.maths.bath.ac.uk/~ak257/final-report.pdf>

