Бүлэг 1

Уламжлагч функц

1.1 Эхлэл

Уламжлагч функц нь комбинаторик болон бусад математикийн салбаруудын олон тооны бодлогыг бодоход хүчтэй арга болдог. Энэ өгүүллийн гол зорилго нь дунд сургуулийн хэмжээнд уламжлагч функц ашиглан хэрхэн бодлого бодохыг авч үзэх юм.

Эхлээд бид уламжлагч функцийн формаль тодорхойлолт болох зэрэгт цувааны тухай авч үзнэ. Бусад хэсэгт тодорхой бодлогуудыг хэрхэн бодох тухай илүүтэй авч үзэх болно. Эхлээд нэг, хоёр, гуравдугаар эрэмбийн рекуррент харьцааг хэрхэн бодох тухай, дараа нь “the snake oil” хэмээх нэгэн хүчирхэг аргын тухай, эцэст нь уламжлагч функц ашиглан бодогдох элдэв төрлийн бодлогуудыг авч үзнэ.

$\mathbb{N}$-ээр натурал тоон олонлогийг, $\mathbb{N}_0$-оор сөрөг биш бүхэл тоон олонлогийг тус тус тэмдэглэнэ. Хэрэв нийлбэр 0-ээс $+\infty$ мужаар авагдах ихэнх тохиолдолд хилийг бичихгүй. Өөрөөр хэлбэл хил нь бичигдээгүй нийлбэрийг 0-ээс $+\infty$ мужаар авагдана гэж үзнэ.

1.2 Онолын үндэслэл

Уламжлагч функц нь ихэнх тохиолдолд аналитик функц болдоггүй тул илүү өргөн хүрээнд ашиглах үүднээс уламжлагч функцийг формаль зэргийн цуваа гэж үзэх бөгөөд ингэснээрээ уламжлагч функцүүд дээр илүү өргөн хувиргалт, үйлдлийг хийх боломжтой болно. Өөрөөр хэлбэл бид формаль зэргийн цуваа гэсэн алгебрийн шинэ объектийн онолыг босгож байгаа юм.

Тодорхойлолт 1.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

хэлбэрийн илэрхийллийг формаль зэргийн цуваа гэх ба $\{a_i\}_0^\infty$*-г түүний коэффициентүүдийн дараалал гэнэ.*

Тэмдэглэл 1. Бид цуваа, үүсгэгч функц гэх мэт өөр ойлголтуудыг ч авч үзнэ.

Жишээ нь

$$A(x) = 1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + n^nx^n + \dots$$

нь зөвхөн $x = 0$ цэг дээр нийлэх боловч формаль онолд бол зөв тодорхойлогдсон $\{a_i\}_0^\infty$, $a_i = i^i$ коэффициентүүдтэй формаль зэргийн цуваа болно.

Тодорхойлолт 2. $A = \sum\limits_0^\infty a_i x^i$ *ба* $B = \sum\limits_0^\infty b_i x^i$ *цуваануудын харгалзах коэффициентүүд нь тэнцүү буюу дурын* $i \in \mathbb{N}_0$*-ийн хувьд* $a_i = b_i$ *бол тэдгээрийг тэнцүү гэнэ.*

Тэмдэглэл 2. F цувааны x^n-ийн коэффициентийг цаашид $[x^n]F$ гэж тэмдэглэнэ.

Зэргийн цувааны нийлбэр болон ялгаварыг дараах байдлаар тодорхойлоно:

$$\sum_n a_n x^n \pm \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n \pm b_n)$$

харин үржвэрийг:

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n = \sum_n c_n x^n, \quad c_n = \sum_i a_i b_{n-i}$$

гэж тодорхойлно.

Үнэндээ $F \cdot F$-ийг F^2 гэх ба $F^{n+1} = F^n \cdot F$ гэж тодорхойлно.

Тодорхойлолт 3. *Хэрэв $F \cdot G = 1$ бол G-г F-ийн урвуу гэнэ.*

F-ийн урвуу уламжлагч функцийг голдуу $1/F$ гэж тэмдэглэдэг. Үржих үйлдэл байр солих тул $G \cdot F = 1$ буюу F, G нь харилцан урвуу байна. $(1-x)(1+x+x^2+\dots) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty}(1\cdot 1 - 1 \cdot 1)x^i = 1$ тул $(1-x)$ ба $(1+x+x^2+\dots)$ нь харилцан урвуу байна.

Теорем 1. *$F = \sum\limits_n a_n x^n$ зэргийн цуваа урвуутай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $a_0 \neq 0$. Энэ тохиолдолд урвуу нь цор ганц байна.*

Баталгаа. F-ийн урвуу нь $1/F = \sum\limits_n b_n x^n$ гэе. $F \cdot (1/F) = 1$ тул $a_0 b_0 = 1$ иймд $a_0 \neq 0$. $n \geq 1$ үед $0 = \sum_k a_k b_{n-k}$ тул

$$b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_k a_k b_{n-k}.$$

Мэдээж коэффициентүүд нь дээрх томъёогоор нэг утгатай тодорхойлогдоно.

Нөгөө талаас $a_0 \neq 0$ бол $1/F$-г өмнө тодорхойлсон рекуррент томъёогоор бодно. □

Ингээд бид урвуутай элементүүд нь зөвхөн тэг биш сул гишүүнтэй цуваанууд байдаг цагираг тодорхойллоо.

Хэрэв $F = \sum\limits_n f_n x^n$ нь зэргийн цуваа бол $F(G(x))$-ээр $F(G(x)) = \sum\limits_n f_n G(x)^n$-ийг тэмдэглэдэг. Үүнийг F олон гишүүнт (төгсгөлөг тооны тэг биш коэффициенттэй) юмуу $G(x)$-ийн сул гишүүн нь тэг биш үед ашигладаг. Харин G-ийн сул гишүүн нь 0 бөгөөд F нь олон гишүүнт биш үед $F(G(x))$ цувааны зарим гишүүдийг тодорхойлох боломжгүй болдог.

Тодорхойлолт 4. *Хэрэв $F(G(x)) = G(F(x)) = x$ бол G зэргийн цувааг F зэргийн цувааны композицийн урвуу гэнэ.*

Тодорхойлолт тэгш хэмтэйгээр өгөгдсөн тул G-ийн урвуу нь F болох нь ойлгомжтой.

Теорем 2. *Хэрэв F, G харилцан композицийн урвуу зэргийн цуваанууд бол $F = f_1x + f_2x^2 + \dots$, $G = g_1x + g_2x^2 + \dots$ ба $f_1 g_1 \neq 0$ байна.*

Баталгаа. $F(G(x))$ ба $G(F(x))$ нь тодорхойлогдохын тулд хоёул 0 сул гишүүнтэй байна. $F = f_r x^r + \dots$, $G = g_s x^s + \dots$ гэж үзье. Тэгвэл $F(G(x)) = x = f_r g_s x^{rs} + \dots$ болно. Иймд $rs = 1$ ба $r = s = 1$ болно. □

Тодорхойлолт 5. *$F' = \sum\limits_n n f_n x^{n-1}$-ийг $F = \sum\limits_n f_n x^n$ зэргийн цувааны уламжлал гэнэ. n зэргийн уламжлалыг $F^{(n+1)} = (F^n)'$ рекуррент томъёогоор бодно.*

Теорем 3. *Зэргийн цувааны уламжлалын хувьд дараах чанарууд биелнэ:*

1. $(F+G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$,
2. $(FG)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F^{(i)} G^{(n-i)}$

Баталгаа хялбар тул уншигч танд үлдээе. □

Цаашид бид зэргийн цувааг түүний коэффициентүүдийн дараалалтай холбож ойлгодог. Үүнийг илүү тодорхой болгох үүднээс $\overset{еуф}{\leftrightarrow}$ харьцааг оруулъя.

Тодорхойлолт 6. *$\{a_n\}_0^\infty$ дараалаар A зэргийн цуваа тодорхойлогдож байвал $A \overset{еуф}{\leftrightarrow} \{a_n\}_n^\infty$ гэж тэмдэглэнэ.*

$A \overset{еуф}{\leftrightarrow} \{a_n\}_n^\infty$ гэе. Тэгвэл

$$\sum_n a_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n>0} a_n x^n = \frac{A - a_0}{x}$$

буюу $\{a_{n+1}\}_n^\infty \overset{еуф}{\leftrightarrow} \dfrac{A-a_0}{x}$. Төсөөтэйгөөр

$$\{a_{n+2}\}_0^\infty \overset{еуф}{\leftrightarrow} \frac{(A-a_0)/x - a_1}{x} = \frac{A - a_0 - a_1 x}{x^2}.$$

Теорем 4. *Хэрэв* $\{a_n\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} A$ *ба* $h>0$ *бол*

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \frac{A-a_0-a_1x-\dots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}.$$

Баталгаа. h-аар индукцлэе. $h=1$ үед бид дээр баталсан. Одоо ямар нэг h-ийн хувьд үнэн гэж үзье.

$$\{a_{n+h+1}\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \{a_{(n+h)+1}\} \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \frac{\frac{A-a_0-a_1x-\dots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}-a_h}{x}$$
$$\overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \frac{A-a_0-a_1x-\dots-a_hx^h}{x^{h+1}}$$

болж батлах зүйл батлагдав. □

Уламжлалын тодорхойлолтоос $\{(n+1)a_{n+1}\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} A'$ байх нь ойлгомжтой. $\{na_n\}_0^\infty$ дарааллын уламжлагч функцийг олъё. Энэ xA' болохыг харах болохыг харах төвөгтэй биш. xD операторыг дараах байдлаар тодорхойлъё:

Тодорхойлолт 7. $xDA = A'$ *буюу* $xDA = x\dfrac{dA}{dx}$.

Дараах теоремууд нь уламжлалын чанаруудын шууд мөрдөлгөөнүүд болно.

Теорем 5. $\{a_n\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} A$ *байг. Тэгвэл* $\{n^ka_n\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} (xD)^kA$ *байна.*

Теорем 6. $\{a_n\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} A$ *ба* P *нь олон гишүүнт байг. Тэгвэл* $P(xD)a_n \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \{P(n)a_n\}_0^\infty$ *байна.*

$\dfrac{A}{1-x}$ хэлбэрийн уламжлагч функийг авч үзье. Үүнийг $A\dfrac{1}{1-x}$ гэж бичиж болох ба $\dfrac{1}{1-x}$-ийн урвуу нь $(1+x+x^2+\dots)$ тул

$$\frac{A}{1-x} = (a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots) = a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\dots$$

болно. Иймд

Теорем 7. *Хэрэв* $\{a_n\}_0^\infty \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} A$ *бол*

$$\frac{A}{1-x} \overset{\text{еуф}}{\leftrightarrow} \Big\{\sum_{j=0}^n a_j\Big\}_{n\ge 0}.$$

Одоо арай өөр төрлийн нэгэн уламжлагч функц авч үзье.

Тодорхойлолт 8. $\{a_n/n!\}_0^\infty$ *дарааллын уламжлагч функц буюу*

$$A = \sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$$

цуваag $\{a_n\}_0^\infty$ *дарааллын экспоненциал уламжлагч функц гэнэ.*

B нь $\{b_n\}_0^\infty$ *дарааллын экспоненциал уламжлагч функц гэхийг* $\{b_n\}_0^\infty \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} B$ *гэж тэмдэглэнэ.*

$B \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$ үед B'-г сонирхоё.

$$B' = \sum_{n=1}^\infty \frac{nb_nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1} \frac{b_nx^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{b_{n+1}x^n}{n!}.$$

Иймд $B' \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} \{b_{n+1}\}_0^\infty$ байна.

Теорем 8. $\{b_n\}_0^\infty \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} B$ *ба* $h>0$ *бол:*

$$\{b_{n+h}\}_0^\infty \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} B^{(h)}$$

байна.

Теорем 9. $\{b_n\}_0^\infty \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} B$ *ба* P *олон гишүүнт бол:*

$$P(xD)B \overset{\text{эуф}}{\leftrightarrow} \{P(n)b_n\}_0^\infty$$

байна.

Экспоненциал уламжлагч функцийн дараах чанар нь комбинаторикийн адилтгал батлах ихээхэн тустай байдаг.

Теорем 10. *$\{a_n\}_0^\infty \overset{эуф}{\leftrightarrow} A$ ба $\{b_n\}_0^\infty \overset{эуф}{\leftrightarrow} B$ байг. Тэгвэл AB нь дараах функцийг үүсгэнэ:*

$$\Big\{\sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\Big\}_0^\infty.$$

Баталгаа. Тодорхойлолт ёсоор

$$AB = \Big\{\sum_{i=0}^\infty \frac{a_i x^i}{i!}\Big\}\Big\{\sum_{j=0}^\infty \frac{b_j x^j}{j!}\Big\} = \sum_{i,j\geq 0} \frac{a_i b_j}{i!j!} x^{i+j} = \sum_n x^n \Big\{\sum_{i+j=n} \frac{a_i b_j}{i!j!}\Big\},$$

буюу

$$AB = \sum_n \frac{x^n}{n!}\Big\{\sum_{i+j=n} \frac{n! a_i b_j}{i!j!}\Big\} = \sum_n \frac{x^n}{n!} \sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

болж батлагдав. □

Бид уламжлагч функцийн үндсэн ойлголтуудтай танилцлаа. Өөр шинэ чанаруудыг нь сүүлд шаардлагатай үед нь авч үзнэ.

Хэдийгээр формаль зэргийн цуваag цэвэр алгебрийн объект байдлаар тодорхойлсон боловч түүний аналитик чанаруудыг дутуу үнэлж болохгүй. Бид Тэйлорын томъёо ашиглан функцүүдийг зэргийн цуваанд задална. Жишээ нь e^x функцийн зэргийг зэргийн цуваанд задлахад $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ болно. Үүнийг бид эсрэг чиглэлд нь гэсэн хэрэглээд явна. Дараах жагсаалтаар гол гол функцүүдийн Тэйлорын задаргааг үзүүллээ:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n,$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k,$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{n} x^n,$$

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n x^n}{n!},$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}) = \sum_n \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_n \binom{2n}{n} x^n,$$

$$x \operatorname{ctg} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-4)^n B_{2n}}{(2k)!} x^{2n},$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1},$$

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{n\ge 0}(-1)^{n-1}\frac{(4^n-2)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\Big(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\Big)^k = \sum_n \binom{2n+k}{n}x^n,$$
$$\Big(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\Big)^k = \sum_{n\ge 0}\frac{k(2n+k-1)}{n!(n+k)!}x^n,$$
$$\arcsin x = \sum_n \frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)},$$
$$e^x \sin x = \sum_{n\ge 1}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,$$
$$\ln^2\frac{1}{1-x} = \sum_{n\ge 2}\frac{H_{n-1}}{n}x^n,$$
$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{16^n\sqrt{2}(2n)!(2n+1)!}x^n,$$
$$\Big(\frac{\arcsin x}{x}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n n!^2}{(k+1)(2k+1)}x^{2n}$$

Тэмдэглэл 3. Энд $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, B_n нь n-р Бернуллийн тоо.

1.3 Рекуррент тэгшитгэл

Эхлээд нэгэн энгийн рекуррент тэгшитгэл бодъё.

Бодлого 1. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $n \ge 0$ *рекуррент харьцаагаар* a_n *дараалал өгөгдөв.* a_n *дарааллын ерөнхий гишүүнийг ол.*

Бодолт. Эхний хэдэн гишүүнийг нь жагсааж бичвэл $0, 1, 3, 7, 15$ болох бөгөөд эндээс $a_n = 2^n - 1$ гэсэн таамаглал дэвшүүлж болохоор харагдаж байна. Үүнийг математик индукцийн аргаар үнэн гэдгийг хялбархан баталчихаж болно. Энэ удаад бид үүнийг уламжлагч функцийн тусламжтайгаар хэрхэн бодохыг авч үзье. $A(x)$ нь a_n дарааллын уламжлагч функц байг. Өөрөөр хэлбэл $A(x) = \sum_n a_n x^n$. Рекуррент харьцааны 2 талыг нь x^n-ээр үржүүлээд бүх n-ээр нийлбэрчилбэл

$$\sum_n a_{n+1}x^n = \frac{A(x)-a_0}{x} = \frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x} = \sum_n (2a_n+1)x^n.$$

Эндээс

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Одоо бодлого маань $A(x)$-ийн коэффициентүүдийг олох бодлогод шилжлээ. Үүний тулд A-г хоёр хялбар бутархайн нийлбэрт задалж бодно. Тодруулбал

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = x\Big(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\Big) = (2x + 2^2x^2 + \dots) - (x + x^2 + \dots).$$

Эндээс $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n-1)x^n$ болно. Иймд $a_n = 2^n - 1$. $\triangle$

Бодлого 2. $a_{n+1} = 2a_n + n$, $(n \ge 0)$, $a_0 = 1$ *рекуррент харьцаагаар өгөгдсөн дарааллын ерөнхий гишүүнийг ол.*

Бодолт. $\{a_n\}_0^\infty \overset{еуф}{\leftrightarrow} A$ гэе. Тэгвэл $\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{еуф}{\leftrightarrow} \frac{A-1}{x}$. Түүнчлэн $xD\frac{1}{1-x} \overset{еуф}{\leftrightarrow} \{n\cdot 1\}$ байна. $xD\frac{1}{1-x} = x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$ тул

$$\frac{A-1}{x} = 2A + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Эндээс

$$A = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

Ерөнхийдөө одоо үүсэх дарааллыг олчихсон гэж үзэж болно. Учир нь энэ дарааллыг өөр нэг дараалалтай тэнцүү гэдгийг баталъя гэхэд зөвхөн уламжлагч функцууд нь тэнцүү гэж харуулахад л хангалттай. Гэхдээ бидэнд гишүүдийг нь шууд олох томъёо хэрэгтэй тул A дараах байдлаар задална.

$$\frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{P}{(1-x)^2} + \frac{Q}{(1-x)} + \frac{R}{1-2x}.$$

Ерөнхий хуваарь өгч хялбарчилбал

$$1 - 2x + 2x^2 = P(1-2x) + Q(1-x)(1-2x) + R(1-x)^2,$$

буюу

$$1 - 2x + 2x^2 = (2Q + R)x^2 + (-2P - 3Q - 2R)x + (P + Q + R).$$

Эндээс $P = -1$, $Q = 0$, $R = 2$ болно. P, Q, R-ийг олох хялбар арга нь хоёр талыг $(1-x)^2$-аар үржүүлж $x = 1$ гэвэл $P = -1$ гэж гарна. $(1-2x)$-ээр үржүүлж $x = \frac{1}{2}$ гэвэл $R = 2$ болно. Үүний дараа P, R-г орлуулаад $x = 0$ гэвэл $Q = 0$ болно. Иймд

$$A = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}.$$

$\dfrac{2}{1-2x} \overset{eyф}{\Leftrightarrow} \{2^{n+1}\}$ ба $\dfrac{1}{(1-x)^2} = D\dfrac{1}{1-x} \overset{eyф}{\Leftrightarrow} \{n+1\}$ тул $a_n = 2^{n+1} - n - 1$. $\triangle$ Өмнөх 2 жишээнд дарааллын гишүүд нь яг өмнөх гишүүнээсээ хамаарна. Бид 2 болон түүнээс дээш зэргийн рекуррент харьцааг бодоход ч уламжлагч функцийг ашиглаж болно.

Бодлого 3. ***(Фибоначчийн дараалал).*** *$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ба $n \geq 1$ үед $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.*

Бодолт. F нь $\{F_n\}$ дарааллын уламжлагч функц байг. Рекуррент харьцааны 2 талыг x^n-ээр бүх n-ээр нийлбэрчилбэл зүүн гар тал нь $\{F_{n+1}\} \overset{eyф}{\Leftrightarrow} \dfrac{F - x}{x}$, баруун тал нь $F + xF$ болно. Иймд

$$F = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Одоо F-г зэргийн цуваанд задлах шаардлагатай. Үүний тулд F-г хоёр хялбар бутархайн нийлбэрт задалъя:

$$-x^2 - x + 1 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x).$$

Тэгвэл $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ ба $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ байна. Түүнчлэн

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{x}{(1 - x\alpha)(1 - x\beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\Big(\frac{1}{1 - x\alpha} + \frac{1}{1 - x\beta}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n\Big\}. \end{aligned}$$

Иймд

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n). \quad \triangle$$

Тэмдэглэл 4. Эндээс F_n-г ойролцоо бодох томъёог хялбархан гаргаж болно. Учир нь $|\beta| < 1$ тул $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^n = 0$ тул

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Бодлого 4. *n-элементтэй олонлогийн бүх k-элементтэй дэд олонлогийн тоог ол.*

Бодолт. Мэдээж энэ тоо нь $\binom{n}{k}$ болохыг бүгд л мэднэ шүү дээ. Энэ удаад бид үүнийг уламжлагч функц ашиглан гаргая. $c(n, k)$ нь бидний олох тоо байг. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ нь n элементтэй олонлог байг. Бүх k элементтэй дэд олонлог нь a_n агуулдаг ба агуулдаггүй гэсэн 2 ангид хуваагдана. a_n-г агуулсан дэд олонлогийн тоо $c(n-1,k-1)$. Үнэндээ $\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$-ийн k элементтэй дэд олонлог дээр a_n-г нэмэхэд эдгээр олонлог дэд олонлогууд нь үүснэ. Нөгөө талаас яг $c(n-1,k)$ ширхэг олонлог a_n-г агуулахгүй. Иймд

$$c(n,k)=c(n-1,k)+c(n-1,k-1).$$

Түүнчлэн $c(n,0)=1$ байх нь ойлгомжтой. Бэхлэгдсэн n-ийн хувьд $c(n,k)$ дарааллын үүсгэгч функцийг $C_n(x)$ гэе. Тэгвэл

$$C_n(x)=\sum_k c(n,k)x^k$$

байна. Рекуррент харьцаагаа x^k-аар үржүүлж бүх $k\geq 1$-аар нийлбэрчилбэл

$$C_n(x)-1=(C_{n-1}(x)-1)+xC_{n-1}(x),\quad n\geq 0$$

ба $C_0(x)=1$. Иймд $n\geq$ үед:

$$C_n(x)=(1+x)C_{n-1}(x).$$

Ингээд $C_n(x)=(1+x)^n$. Иймд $c(n,k)$ нь $(1+x)^n$-ийн x^k-ийн коэффициент буюу $\binom{n}{k}$ байна. $\triangle$

Бид $C_n(x)$ дарааллын уламжлагч функцийг авч үзэж болно:

$$\sum_n C_n(x)y^n=\sum_n\sum_k\binom{n}{k}x^ky^n=\sum_n(1+x)^ny^n=\frac{1}{1-y(1+x)}.$$

Иймд $\binom{n}{k}=[x^ky^n]\big(1-y(1+x)\big)^{-1}$. Иймд одоо бид $\sum\limits_n\binom{n}{k}y^n$ нийлбэрийг бодож чадах боллоо:

$$[x^k]\sum_n\sum_k\binom{n}{k}x^ky^n=[x^k]\frac{1}{1-y(1+x)}=\frac{1}{1-y}[x^k]\frac{1}{1-\frac{y}{1-y}x}$$
$$\frac{1}{1-y}\Big(\frac{y}{1-y}\Big)^k=\frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

Ингээд бид

$$\sum_k\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n;\qquad\sum_n\binom{n}{k}y^n=\frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

Тэмдэглэл 5. $n<k$ бол $\binom{n}{k}=0$ гэж үзнэ.

Бодлого 5. *$a_0=2,a_1=0,a_2=-2$ ба $n\geq 0$ үед $a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n$ байх дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.*

Бодолт. Хэрэв A уг дарааллын уламжлагч функц бол

$$\frac{A-2-0\cdot x-(-2)x^2}{x^3}=6\frac{A-2-0\cdot x}{x^2}-11\frac{A-2}{x}+6A,$$

болох ба эндээс

$$A=\frac{20x^2-12x+2}{1-6x+11x^2-6x^3}=\frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

болно.

$$\frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}=\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1-2x}+\frac{D}{1-3x}$$

байх B,C,D коэффициентүүдийг ол. Хоёр талыг нь $(1-x)$-ээр үржүүлээд $x=1$ гэвэл

$$B=\frac{20\cdot 1^2-12\cdot 1+2}{(1-2\cdot 1)(1-3\cdot 1)}=5,$$

$(1-2x)$-ээр үржүүлж $x=1/2$ гэвэл $C=\dfrac{5-6+2}{-\frac{1}{4}}=-4$, $x=0$ гэвэл $B+C+D=2$ болох тул $D=1$ болно. Иймд

$$A=\frac{5}{1-x}-\frac{4}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(5-4\cdot 2^n+3^n)x^n$$

буюу $a_n=5-2^{n+2}+3^n$. $\triangle$

Зарим тохиолдолд шууд томъёог олоход бага зэргийн хүндрэл гардаг.

Бодлого 6. $a_0 = 0, a_1 = 2$ *ба* $n \geq 0$ *үед*

$$a_{n+2} = -4a_{n+1} - 8a_n.$$

Ерөнхий гишүүний томъёог ол.

Бодолт. A нь уг функцийн уламжлагч функц байг. Тэгвэл рекуррент харьцаанаас

$$\frac{A - 0 - 2x}{x^2} = -4\frac{A-0}{x} - 8A$$

буюу

$$A = \frac{2x}{1 + 4x + 8x^2.}$$

$x^2 + 4x + 8$ олон гишүүнт $r_1 = -2 + 2i$, $r_2 = -2 - 2i$ гэсэн 2 комплекс язгууруудтай. Хэдий тийм боловч бид

$$\frac{2x}{1 + 4x + 8x^2} = \frac{B}{1 - r_1 x} + \frac{C}{1 - r_2 x}$$

гэж B, C коэффициентүүдийг олоход энэ нь тийм ч нөлөөтэй биш. Өмнө үзсэн аргаараа бодвол $B = -i/2$, $C = i/2$ болно.

Хэрэв та анхааралтай уншсан бол бид хуваарьт байгаа $1+4x+8x^2$ олон гишүүнтийн язгууруудын оронд $x^2 + 4x + 8$ олон гишүүнтийн язгууруудыг авч хуваарийг үржигдэхүүнд задалсан байгаа. Энэ нь $\dfrac{B}{r_1 - x}$ хэлбэрийн бутархайг цуваанд задлах нь тохиромжгүйтэй холбоотой. Хэрэв хуваарийг $x^2\big(8 + 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\big)$ хэлбэрт бичээд $\frac{1}{x}$-ээс хамаарсан олон гишүүнт гээд үржигдэхүүнд задалбал хуваарь $x^2\big(\frac{1}{x} - r_1\big)\big(\frac{1}{x} - r_2\big)$ болно.

Одоо бодлогоо үргэлжлүүлэн бодъё.

$$A = \frac{-i/2}{1 - (-2 + 2i)x} + \frac{i/2}{1 - (-2 - 2i)x}.$$

Эндээс

$$A = \frac{-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2 + 2i)^n x^n + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2 - 2i)^n x^n$$

буюу

$$a_n = \frac{-i}{2}(-2 + 2i)^n + \frac{i}{2}(-2 - 2i)^n.$$

Бидний авч үзэж буй дарааллын гишүүд бодит тоонууд байх нь тодорхой. Гэтэл бидний олсон томъёо нь комплекс тоонуудаас хамаарч байна. Үүнийг илүү тодорхой харуулж болно.

$$-2 \pm 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pm 3\pi}{4}},$$

тул

$$a_n = \frac{i}{2}(2\sqrt{2})^n\Big(\big(\cos\frac{3n\pi}{4} - i\sin\frac{3n\pi}{4}\big) - \big(\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\big)\Big).$$

Иймд $a_n = (2\sqrt{2})^n \sin\dfrac{3n\pi}{4}$. Үүнийг өөрөөр

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ хэрэв } n = 8k \\ (2\sqrt{2})^n, \text{ хэрэв } n = 8k+6 \\ -(2\sqrt{2})^n, \text{ хэрэв } n = 8k+2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n, \text{ хэрэв } n = 8k+1 \vee n = 8k+3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n, \text{ хэрэв } n = 8k+5 \vee n = 8k+7 \end{cases}$$

гэж бичиж болно. $\triangle$

Бодлого 7. $x_0 = x_1 = 0$, $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n$, $n \geq 0$ *дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.*

Бодолт. $X(t)$ нь өгөгдсөн дарааллын уламжлагч функц гэе. Өмнөх жишээнүүдтэй ижил аргаар дараах зүйл биелэхийг харж болно:

$$\frac{X}{t^2} - 6\frac{X}{t} + 9X = \frac{1}{1 - 2t} + \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Үүнийг хялбарчилбал

$$X(t) = \frac{t^2 - t^3 - t^4}{(1-t)^2(1-2t)(1-3t)^2}$$

буюу

$$X(t) = \frac{1}{4(1-t)^2} + \frac{1}{1-2x} - \frac{5}{3(1-3x)} + \frac{5}{12(1-3x)^2}.$$

Эхний нийлбэрт харгалзах дараалал нь $\frac{n+1}{4}$, бусад нь харгалзан $2^n, 5\cdot 3^{n-1}$ ба $\frac{5(n+1)3^{n+1}}{4}$ тул

$$x_n = \frac{2^{n+2} + n + 1 + 5(n-3)3^{n-1}}{4}. \quad \triangle$$

Бодлого 8. $f_1 = 1$, $f_{2n} = f_n$, $f_{2n+1} = f_n + f_{n+1}$ *байг. Дарааллын ерөнхий гишүүний томъёог ол.*

Бодолт. Мэдээж гишүүн бүр нь зөвхөн өмнөх гишүүдээрээ тодорхойлогдох тул дараалал зөв өгөгдсөн. Дарааллын уламжлагч функцийг авч үзье:

$$F = \sum_{n\geq 1} f_n x^{n-1}.$$

Эхний харьцааг x^{2n-1}-ээр хоёр дахийг нь x^{2n}-ээр үржүүлж $n \geq 1$-ээр нийлбэрчилбэл:

$$f_1 + \sum_{n\geq 1} f_{2n}x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_{2n+1}x^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} f_{n+1}x^{2n}$$

буюу

$$\sum_{n\geq 1} f_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} f_{n+1}x^{2n}.$$

Эндээс $F(x) = x^2F(x^2) + xF(x^2) + F(x^2)$ буюу

$$F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2).$$

Эцэст нь

$$F(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^i} + x^{2^{i+1}}\right).$$

1.4 Snake oil

Snake oil нь төрөл бүрийн комбинаторик нийлбэр олох, адилтгал батлах маш хүчтэй арга юм.

Аргын гол санаа нь: Эхлээд ямар нэг S гэсэн нийлбэр олох гэж байгаа бол түүний чөлөөт хувьсагчийг тодорхойлно. Өөрөөр хэлбэр нийлбэрийг $S = f(n)$ хэлбэртэй бичиж болдог гэе. Энэ тохиолдолд $f(n)$ дарааллын үүсгэгч функц $F(x)$-ийг нь авч үзнэ. Өөрөөр хэлбэл S-ийг x^n-ээр үржүүлж бүх n-ээр нийлбэрчилнэ. Ингэхэд гадна талдаа n-ээр авсан, дотор талдаа S гэсэн давхар нийлбэр гарна. Энэ нийлбэрчлэлийн дарааллыг өөрчилж дотоод нийлбэрийг n-ээр нийлбэрчилж үүсгэгч функцийн тодорхой коэффициентүүд буюу S-ийг олно.

Энэ төрлийн бодлого бодоход түгээмэл тохиолддог нийлбэрүүд байдаг. Ийм төрлийн зарим нийлбэрийг дор үзүүлллээ. $\sum\limits_m \binom{m}{n} x^n$ нь өмнө үзсэн ёсоор:

$$(1+x)^m = \sum_m \binom{m}{n} x^n.$$

Заримдаа тохиолдолд $\sum\limits_n \binom{n}{k} x^n$-ийн

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{k} x^n$$

адилтгалыг ашиглах болно.

Өргөн тохиолддог нийлбэрүүдийн дунд зөвхөн тэгш юмуу зөвхөн сондгой зэргүүдээс тогтох нийлбэрүүд тааралддаг. Жишээ нь $(1+x)^m = \sum_n \binom{m}{n} x^n$, $(1-x)^m = \sum_n \binom{m}{n}(-x)^n$ байдаг: Эдгээрийг нэмж, хасахад:

$$\sum_n \binom{m}{2n} x^{2n} = \frac{\big((1+x)^m + (1-x)^m\big)}{2}$$
$$\sum_n \binom{m}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\big((1+x)^m - (1-x)^m\big)}{2}$$

Төстэй аргаар

$$\sum_n \binom{2n}{m} x^{2n} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}}\right)$$
$$\sum_n \binom{2n+1}{m} x^{2n+1} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}}\right).$$

Дараах адилтгалыг ч гэсэн өргөн ашигладаг:

$$\sum_n \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}).$$

Бодлого 9. $\sum\limits_k \binom{k}{n-k}$ *илэрхийллийн утгыг ол.*

Бодолт. n-ийг чөлөөт хувьсагч гэж үзээд

$$f(n) = \sum_k \binom{k}{n-k}$$

гэе. $F(x)$ нь $f(n)$ дарааллын уламжлагч функц буюу

$$F(x) = \sum_n x^n f(n) = \sum_n x^n \sum_k \binom{k}{n-k} = \sum_n \sum_k \binom{k}{n-k} x^n.$$

Өмнөх тэнцэлийг арай өөрөөр

$$F(x) = \sum_k \sum_n \binom{k}{n-k} x^n = \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n-k} x^{n-k}$$

гэж бичвэл

$$F(x) = \sum_k x^k (1+x)^k = \sum_k (x+x^2)^k = \frac{1}{1-(x+x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Энэ нь Фибоначчийн дарааллын уламжлагч функцтэй төстэй бөгөөд үнэндээ $f(n) = F_{n+1}$ байна. Иймд

$$\sum_k \binom{k}{n-k} = F_{n+1}. \quad \triangle$$

Бодлого 10.

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$

нийлбэрийг ол.

Бодолт. n-г бэхлэгдсэн гэвэл m нь чөлөөт хувьсагч болно. $f(m) = \sum\limits_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m}$, $F(x)$ нь $f(m)$ дарааллын уламжлагч функц буюу $F(x) = \sum\limits_{m} f(m)x^m$ байг. Тэгвэл

$$F(x) = \sum_{m} f(m)x^m = \sum_{m} x^m \sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{m} =$$
$$= \sum_{k\le n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m\le k}\binom{k}{m}x^m = \sum_{k\le n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^k.$$

Энд бид $\sum_{m\le k}\binom{k}{m}x^m = (1+x)^k$ болохыг ашиглав. Ингээд

$$F(x) = (-1)^n\sum_{k\le n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(1+x)^k = (-1)^n\big((1+x)-1\big)^n = (-1)^n x^n.$$

$F(x) = (-1)^n x^n$ нь $f(m)$-ийн уламжлагч функц тул

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n, \text{ хэрэв } n = m \\ 0, \text{ хэрэв } m < n \end{cases}. \quad \triangle$$

Бодлого 11. $\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ *нийлбэрийг тооцол.*

Бодолт. $f(m) = \sum\limits_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ ба $F(x) = \sum\limits_{m} x^m f(m)$ гэе. Тэгвэл

$$F(x) = \sum_{m} x^m f(m) = \sum_{m} x^m \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k\le n}\binom{n}{k}\sum_{m\le k}\binom{k}{m}x^m = \sum_{k\le n}\binom{n}{k}(1+x)^k,$$

буюу $F(x) = (2+x)^n$ болж байна.

$$(2+x)^n = \sum_{m}\binom{n}{m}2^{n-m}x^m$$

тул $f(m) = \binom{n}{m}2^{n-m}$. $\triangle$

Бодлого 12. $\sum\limits_{k}\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k$*-г бод.*

Бодолт. Нийлбэрийг 2 хэсэгт салгая:

$$\sum_{k}\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k = \sum_{k=2k_1}\binom{n}{\left[\frac{2k_1}{2}\right]}x^{2k_1} + \sum_{k=2k_2+1}\binom{n}{\left[\frac{2k_2+1}{2}\right]}x^{2k_2+1} =$$
$$= \sum_{k_1}\binom{n}{k_1}(x^2)^{k_1} + x\sum_{k_2}\binom{n}{k_2}(x^2)^{k_2} = (1+x^2)^n + x(1+x^2)^n,$$

буюу

$$\sum_{k}\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k = (1+x)(1+x^2)^n. \quad \triangle$$

Бодлого 13. $f(m) = \sum\limits_{k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^k$ *дарааллын гишүүдийг ол.*

Бодолт. $F(x) = \sum\limits_{m} x^m f(m)$ гэе. Тэгвэл

$$F(x) = \sum_{m} x^m \sum_{k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^k = \sum_{k}\binom{n}{k}y^k\sum_{m}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^m =$$
$$= \sum_{k}\binom{n}{k}y^k x^k\sum_{m}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^{m-k} = \sum_{k}\binom{n}{k}y^k x^k(1+x)(1+x^2)^{n-k}$$

болно. Иймээс

$$F(x) = (1+x)\sum_k \binom{n}{k}(1+x^2)^{n-k}(xy)^k = (1+x)(1+x^2+xy)^n.$$

$y=2$ үед $F(x)=(1+x)^{2n+1}$ тул $F(x)$ нь $\binom{2n+1}{m}$ дарааллын уламжлагч функц болох тул

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}2^k = \binom{2n+1}{m}.$$

$y=-2$ үед $F(x)=(1+x)(1-x)^{2n} = (1-x)^{2n}+x(1-x)^{2n}$ ба x^m-ийн өмнөх коэффициент нь $\binom{2n}{m}(-1)^m + \binom{2n}{m-1}(-1)^{n-1} = (-1)^m\left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right]$ буюу

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}(-2)^k = (-1)^m\left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right]. \quad \triangle$$

Бодлого 14. *Дурын $n \geq 0$-ийн хувьд $\sum\limits_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k = \binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}$ болохыг батал.*

Бодолт. n бэхлэгдсэн j нь чөлөөт хувьсагч гэе. $f(j)=\sum\limits_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k$, $g(j)=\binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}$ гээд харгалзах уламжлагч функцүүдийг нь бичье:

$$F(y) = \sum_j y^j f(j), \qquad G(y) = \sum_j y^j g(i).$$

Бид $F(y)=G(y)$ гэж батлахад хангалттай.

$$F(y) = \sum_j y^j \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k = \sum_k \binom{n}{k}x^k \sum_j \binom{k}{j}y^i = \sum_k \binom{n}{k}x^k(1+y)^k$$

тул $F(y)=(1+x+xy)^n$. Нөгөө талаас

$$G(y) = \sum_j y^j \binom{n}{n}x^j(1+x)^{n-j} = \sum_j \binom{n}{j}(1+x)^{n-j}(xy)^j = (1+x+xy)^n$$

тул $F(y)=G(y)$. $\triangle$

Уламжлагч функцийн жинхэнэ хүчийг дараах бодлогоос харж болно.

Бодлого 15. $\sum\limits_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$, $m, n \geq 0$ *нийлбэрийг бод.*

Энд нилээд олон тооны хувьсагч орсон тул энгийн комбинаторик аргуудаар үүнийг бодоход төвөгтэй. n зөвхөн нэг үржигдэхүүнд орж буй тул нийлбэрийг n-ээс хамаарсан функц гэе. $F(x)$ нь энэ дарааллын үүсгэгч функц гэвэл

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\sum_n \binom{n+k}{m+2k}x^{n+k} =$$

$$= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} = \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}\sum_k \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}\left\{\frac{-x}{(1-x)^2}\right\}^m =$$

$$= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right\} = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\frac{1+x}{1-x}\right\} = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Энэ нь $\binom{n-1}{m-1}$ дарааллын үүсгэгч функц тул

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}. \quad \triangle$$

Бодлого 16. $\sum\limits_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}$ *адилтгалыг батал.*

Бодолт. $F(x) = \sum\limits_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n}$ ба $G(x) = \sum\limits_m x^m \binom{2m+1}{2n}$ гэе. Бид $F(x) = G(x)$ гэж харуулъя.

$$F(x) = \sum_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \sum_k \binom{2n+1}{2k} \sum_m \binom{m+k}{2n} =$$

$$= \sum_k \binom{2n+1}{2k} \sum_m \binom{m+k}{2n} x^m = \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \sum_m \binom{m+k}{2n} x^{m+k} =$$

$$= \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} = \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} \sum_k \binom{2n+1}{2k} (x^{-\frac{1}{2}})^{2k}.$$

Бид $\sum\limits_k \binom{2n+1}{2k} (x^{-\frac{1}{2}})^{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1}\right)$ болохыг өмнө нь үзсэн. Иймд

$$F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}\Big(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\Big).$$

Нөгөө талаас

$$G(x) = \sum_m \binom{2m+1}{2n} x^m = (x^{-1/2}) \sum_n \binom{2m+1}{2n} (x^{1/2})^{2m+1}$$

болох ба эндээс

$$G(x) = (x^{-1/2}) \left[\frac{(x^{1/2})^{2n}}{2}\Big(\frac{1}{(1-x^{1/2})^{2n+1}} - (-1)^{2n}\frac{1}{(1+x^{1/2})^{2n+1}}\Big)\right]$$

буюу

$$G(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}\Big(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\Big). \quad \triangle$$

Бодлого 17. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$ *болохыг батал.*

Бодолт. n нь зүүн болон баруун талдаа чөлөөт хувьсагч гэе. $F(x)$, $G(x)$ харгалзах уламжлагч функцүүд нь байг. Мэдээж бид уламжлагч функцүүдийг нь тэнцүү гэж харуулахад хангалттай.

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_{0\le k\le n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \sum_{0\le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_m \binom{2n}{2k} x^n 2^{2n},$$

$$F(x) = \sum_{0\le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_n \binom{2n}{2k} (2\sqrt{x})^{2n}.$$

Тэгш зэргүүдийн нийлбэрийн томъёог ашиглавал

$$\sum_n \binom{2n}{2k} (2\sqrt{x})^{2n} = \frac{1}{2}(2\sqrt{x})^{2k}\Big(\frac{1}{(1-x)^{2k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{2k+1}}\Big),$$

$\sum \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ тул

$$F(x) = \frac{1}{2(1-2\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{(1-2\sqrt{x})^2}}} + \frac{1}{2(1+2\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{(1+2\sqrt{x})^2}}}$$

буюу

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}}.$$

Нөгөө талаас $G(x)$ нь $\sum\limits_n \binom{4n}{2n} x^n$. $\sum\limits_n \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ тул $\sum\limits_n \binom{2n}{n} (-x)^n = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ болно. Иймд

$$G(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}\Big)$$

болж $F(x) = G(x)$ болов. $\triangle$

Дараах бодлого нь харьцангуй хүндэвтэр. Учир нь “snake oil” аргаар шууд бодогдохгүй.

Бодлого 18. *Өгөгдсөн n ба p-ийн утганд*

$$\sum_k \binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}$$

илэрхийллийг тооцоол.

Бодолт. Илүү товч болгох үүднээс $r = p + k$ орлуулга хийе. n-ийг чөлөөт хувьсагч гэвэл

$$f(n) = \sum_r \binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p}.$$

$F(x) = \sum\limits_n x^{2n+1} f(n)$-ийг авч үзье. Үүнийг биномын коэффициентүүд нь $2n+1$-г агуулж байгаагаар тайлбарлаж болно. Ингэхэд

$$F(x) = \sum_n x^{2n+1} \sum_r \binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p} = \sum_r \binom{r}{p} \sum_n \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n+1}$$

болно.

$$\sum_n \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n+1} = \frac{x^{2r+1}}{2}\Big(\frac{1}{(1-x)^{2r+2}} + \frac{1}{(1+x)^{2r+2}}\Big)$$

тул

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^r + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^r,$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{(1-x)^2}\frac{\big(\frac{x^2}{(1-x)^2}\big)^p}{\big(1-\frac{x^2}{(1-x^2)}\big)^{p+1}} + \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^2}\frac{\big(\frac{x^2}{(1+x)^2}\big)^p}{\big(1-\frac{x^2}{(1+x^2)}\big)^{p+1}},$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{x^{2p+1}}{(1-2x)^{p+1}} + \frac{1}{2}\frac{x^{2p+1}}{(1+2x)^{p+1}} = \frac{x^{2p+1}}{2}\big((1+2x)^{-p-1} + (1-2x)^{-p-1}\big)$$

болох ба эндээс

$$f(n) = \frac{1}{2}\left(\binom{-p-1}{2n-2p}2^{2n-2p} + \binom{-p-1}{2n-2p}2^{2n-2p}\right)$$

болох ба хялбарчилсны дараа

$$f(n) = \binom{2n-p}{2n-2p}2^{2n-2p}. \quad \triangle$$

1.5 Бодлогууд

1. Фибоначчийн дарааллын хувьд

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} + 1$$

адилтгал биелнэ гэж батал.

2. Өгөгдсөн n натурал тооны хувьд түүнийг сондгой тоонуудын нийлбэрт задлах боломжийн тоо нь ялгаатай тоонуудын нийлбэрт задлах боломжийн тоотой тэнцүү болохыг батал. (Нэмэгдэхүүнүүдийн байр солигдоход ялгаатай задаргаа гарахгүй гэж үзэхгүй).

3. $\{1, 2, \ldots, n\}$ тоонуудын аль элемент нь байрандаа байхгүй байх сэлгэмэлийн тоог ол.

4. $\sum\limits_k (-1)^k \binom{n}{3k}$ нийлбэрийг ол.

5. $n \in \mathbb{N}$ байг.

$$x + 2y = n \text{ тэгшитгэл } \mathbb{N}_0^2\text{-д } R_1 \text{ шийдтэй}$$
$$2x + 3y = n \text{ тэгшитгэл } \mathbb{N}_0^2\text{-д } R_2 \text{ шийдтэй}$$
$$\vdots$$
$$nx + (n+1)y = 1 \text{ тэгшитгэл } \mathbb{N}_0^2\text{-д } R_n \text{ шийдтэй}$$
$$(n+1)x + (n+2)y = 0 \text{ тэгшитгэл } \mathbb{N}_0^2\text{-д } R_{n+1} \text{ шийдтэй}$$

гэе. $\sum\limits_k R_k = n + 1$ гэж батал.

6. Хэрэв дурын $\sigma \in S_n$-ийн хувьд $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ бол $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ олон гишүүнтийг *тэгш хэмтэй олон гишүүнт* гэнэ. Дараах төрлийн тэгш хэмтэй олон гишүүнтүүдийг авч үзье:

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n$$

ба $\sigma_0 = 1$, $k < n$ үед $\sigma_k = 0$ гэе. Өөр нэг төрлийн олон гишүүнтүүд нь

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}, \quad i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0.$$

7. $n \in \mathbb{N}$ ба натурал тоон $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ба $b_1, b_2, \ldots, b_n$ дарааллуудын хувьд $\{a_1, \ldots, a_n\} \neq \{b_1, \ldots, b_n\}$ байг. Хэрэв

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n$$

тоонууд нь

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n$$

тоонуудтай сэлгэмэлийн нарийвчлалтайгаар тэнцүү бол n нь 2-ийн зэрэг гэж батал.

8. (Leo Moser, Joe Lambek, 1959) Натурал тоон олонлогийг дараах чанартай A, B олонлогт цор ганц аргаар хувааж болно гэж батал: $n \geq 0$ байх бүх бүхэл тооны хувьд n тоог $a_1 + a_2, a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ хэлбэрт тавих боломжийн тоо нь дор хаяж 1 бөгөөд энэ нь n тоог $b_1 + b_2, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ хэлбэрт тавих боломжийн тоотой тэнцүүү.